ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.51–56

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.51–56

УДК 517.535

ПРО МАЖОРАНТИ ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Оксана ЛИЗУН
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілих функцій f з заданими обмеженнями на кількість їхніх нулів знайдено, в певному сенсі мінімальні, мажоранти зростання неванліннівської характеристики $T(r, f)$.

Ключові слова: ціла функція, лічильна функція, характеристика Неванлінни, нескінченний порядок, скінченний порядок.

Додатні, зростаючі до $+\infty$, неперервні на $(0, +\infty)$ функції називатимемо функціями зростання. Нехай ν – функція зростання. Через S_ν позначатимемо множину послідовностей $\mathcal{Z}$ відмінних від нуля комплексних чисел без точок скупчення в $\mathbb{C}$ таких, що $n(r, \mathcal{Z}) \leqslant \nu(r)$, $r > 0$, де $n(r, \mathcal{Z})$ – кількість членів послідовності $\mathcal{Z}$ в крузі $\{z : |z| \leqslant r\}$. Скрізь надалі вважатимемо, що $\mathcal{Z} \cap \{z : |z| < 1\} = \emptyset$.

Характеристика Неванлінни цілої функції f позначається через $T(r, f)$, множина її нулів – через $\mathcal{Z}(f)$. Нехай λ – функція зростання. Ціла функція f називається функцією скінченного λ-типу, якщо при деяких $a > 0$, $b > 0$ виконується $T(r, f) \leqslant a\lambda(br)$ для всіх $r > 0$. Клас цілих функцій f таких, що $\mathcal{Z}(f) \in S_\nu$ позначатимемо через $\mathcal{E}_\nu$.

1. Ми вивчаємо такі мажоранти зростання λ цілих функцій з класів $\mathcal{E}_\nu$, які для довільної послідовності $\mathcal{Z}$ з S_ν мажорують бодай одну цілу функцію $f \in \mathcal{E}_\nu$.

Означення. *Функція зростання λ називається мінімальною мажорантою зростання для $\mathcal{E}_\nu$, якщо:*

1) *для довільної послідовності $\mathcal{Z}$ з S_ν існує ціла функція скінченного λ-типу f така, що $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$;*
2) *існує послідовність $\mathcal{Z}$ з S_ν така, що для довільної цілої функції f, послідовність нулів якої збігається з $\mathcal{Z}$, виконується $\lambda(r) \leqslant aT(br, f)$ при деяких $a > 0$, $b > 0$ для всіх $r > 0$.*

Теорема 1. *Нехай ν – неперервно диференційовна функція зростання і ϕ – додатна, неспадна, неперервно диференційовна функція така, що*

i) *функція $\omega(r) = \log \nu(r) + \log \phi(r)$ строго опукла стосовно $\log r$, $\omega(r)/\log r \to +\infty$ при $r \to +\infty$;*

ii)

$$\log \int_1^{\psi(k)} \frac{dt}{\phi(t)t} = o(k), \qquad k \to +\infty, \tag{1}$$

де функція $\psi(r)$ обернена до функції $r\omega'(r)$.

Тоді при $\lambda(r) = \phi(r)\nu(r)\int_1^r \frac{dt}{\phi(t)t}$ *для довільної послідовності* $Z \in S_\nu$ *існує ціла функція скінченного* λ*-типу* f *така, що* $Z(f) = Z$.

Для $r \in (0, +\infty)$ і послідовностей $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{C}$ та $Z = \{z_j = |z_j|e^{i\varphi_j}\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_j \to \infty$ при $j \to +\infty$, приймемо

$$l_0(r; Z, \gamma) = N(r, Z);$$

$$l_k(r; Z, \gamma) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n_k(t, Z)}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де

$$n_k(r, Z) = \sum_{|z_j| \leqslant r} e^{-ik\varphi_j}, \quad n_0(r, Z) = n(r, Z), \quad N(r, Z) = \int_0^r n(t, Z)t^{-1}dt.$$

Зауважимо, що $n_k(r, Z) = 0$ при $r \in (0, 1)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Для доведення теореми 1 нам буде потрібна така лема.

Лема [1]. *Нехай* $Z = \{z_j\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *довільна послідовність без точок скупчення в* $\mathbb{C}$. *Якщо існують послідовності* $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{C}$ *і* $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$ *такі, що для всіх* $k \in \mathbb{N}, r \in (0, +\infty)$ *і деякого* $b \in [1, +\infty)$ *виконується*

$$l_0(r; Z, \gamma) \leqslant \lambda(br),$$
$$|l_k(r; Z, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(br),$$

то існує єдина ціла функція f *скінченного* λ*-типу така, що* $Z(f) = Z$.

Доведення теореми 1. Нехай $Z \in S_\nu$. Для побудови цілої функції скінченного λ-типу f такої, що $Z(f) = Z$, побудуємо спочатку коефіцієнти Фур'є $l_k(r; Z, \gamma)$ пари послідовностей (Z, γ), підібравши γ_k так, щоб для всіх $r > 1$, $k \in \mathbb{N}$ виконувалося $|l_k(r; Z, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(br)$ при деяких $b \geqslant 1$ і $\varepsilon_k \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Нехай функції ν, ϕ задовольняють умови i) та ii). Тоді зі строгої опуклості функції $\omega(r)$ стосовно $\log r$ та її гладкості випливає, що $r\omega'(r)$ строго зростає до $+\infty$ на $(1, +\infty)$. Отже, при $k \in \mathbb{N}$ маємо: або $r\omega'(r) > k$ при $r > 1$, або існує єдине $r_k > 1$ таке, що $r\omega'(r) = k$. Це r_k є єдиною точкою мінімуму функції $\omega(t) - k\log t$. Приймемо в першому випадку $\gamma_k = 0$, $r_k = 1$, а в другому

$$\gamma_k = -\int_1^{r_k} \frac{n_k(t, Z)}{t^k}\frac{dt}{t}.$$

Тоді при $r < r_k$ одержуємо

$$l_k(r; Z, \gamma) = -r^k \int_r^{r_k} \frac{n_k(t, Z)}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

а при $r \geqslant r_k$ –

$$l_k(r; Z, \gamma) = r^k \int_{r_k}^r \frac{n_k(t, Z)}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, при $r < r_k$, $k \in \mathbb{N}$, з огляду на (1), маємо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant r^k \int\limits_r^{r_k} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^k} \frac{dt}{t} \leqslant r^k \int\limits_r^{r_k} \frac{\nu(t)\phi(t)}{t^k} \frac{dt}{\phi(t)t} = r^k \int\limits_r^{r_k} e^{\omega(t) - k \log t} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant$$

$$\leqslant \phi(r)\nu(r) \int\limits_1^{r_k} \frac{dt}{\phi(t)t} = 2^{k\varepsilon_k} \phi(r)\nu(r) \leqslant 2^{k\varepsilon_k} \lambda(r), \tag{2}$$

починаючи з деякого r, де $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

При $r \geqslant r_k$, $k \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant r^k \int\limits_{r_k}^{r} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^k} \frac{dt}{t} \leqslant r^k \int\limits_{r_k}^{r} e^{\omega(t) - k \log t} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant$$

$$\leqslant \phi(r)\nu(r) \int\limits_1^{r} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant 2^{k\varepsilon_k} \lambda(r). \tag{3}$$

Враховуючи (2) та (3), знаходимо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k} \lambda(r),$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$, починаючи з деякого r. Отже, існує стала $a > 0$ така, що

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant a 2^{k\varepsilon_k} \lambda(r) = 2^{k\varepsilon'_k} \lambda(r) \tag{4}$$

для всіх $r > 1$, де $\varepsilon'_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Маємо також

$$l_0(r; \mathcal{Z}, \gamma) \leqslant \int\limits_1^{r} \nu(t)\phi(t) \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant \lambda(r), \tag{5}$$

для всіх $r > 1$.

Враховуючи (4) та (5), бачимо, що коефіцієнти Фур'є $l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)$ пари послідовностей $(\mathcal{Z}, \gamma)$ задовольняють умови леми. Отже, існує ціла функція f скінченного λ-типу така, що $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$. Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай ν - неперервно диференційовна функція зростання така, що $\log \nu(r)$ строго опукла стосовно $\log r$, і при деякому $a > 1$ виконується $\int\limits_1^{+\infty} \nu(t)(\nu(at)t)^{-1} dt < +\infty$.*

Тоді ν - мінімальна мажоранта для $\mathcal{E}_\nu$.

Доведення. Приймемо $\phi(t) = \nu(at)/\nu(t)$. Тоді при будь-якому $\psi(k)$ виконується (1). Отже, за теоремою 1 для довільної послідовності $\mathcal{Z} \in S_\nu$ існує ціла функція скінченного λ-типу f, $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$, при

$$\lambda(r) = \nu(ar) \int\limits_1^{r} \frac{\nu(t)}{\nu(at)} \frac{dt}{t} = O(\nu(ar)), \qquad r \to +\infty.$$

Перевіримо умову 2) означення. Позначимо $N(r, \mathcal{Z}(f)) = N(r, f)$. Розглянемо послідовність $\mathcal{Z}$ таку, що $\frac{1}{2}\nu(r) \leqslant n(r, \mathcal{Z}) \leqslant \nu(r)$. Для довільної функції $f \in$

$\mathcal{E}_\nu$, $f(0)=1$, $\mathcal{Z}(f)=\mathcal{Z}$ маємо, враховуючи нерівність $N(r,f)\leqslant T(r,f)$ [2, с. 22],

$$\nu(r)\leqslant\int\limits_r^{er}\frac{\nu(t)}{t}dt\leqslant 2\int\limits_1^{er}\frac{n(t,\mathcal{Z})}{t}dt=2N(er,f)\leqslant 2T(er,f).$$

Наслідок 1 доведено.

Наступний наслідок дає результат, який отримав Г. Скода [3].

Наслідок 2. *Нехай ν - неперервно диференційовна функція зростання така, що $\log\nu(r)$ опукла стосовно $\log r$, $\log\nu(r)/\log r\to+\infty$ при $r\to+\infty$. Тоді існує ціла функція $f\in\mathcal{E}_\nu$ скінченного λ-типу при $\lambda(r)=r^\varepsilon\nu(r)$, де $\varepsilon>0$.*

Доведення. Приймемо $\phi(r)=r^\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Тоді функція $\omega(r)=\log\nu(r)+\log\phi(r)$ опукла стосовно $\log r$ і

$$\log\int\limits_1^{\psi(k)}\frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}=O(1)=o(k),\qquad k\to+\infty.$$

За теоремою 1 існує ціла функція $f\in\mathcal{E}_\nu$ скінченного λ-типу при

$$\lambda(r)=r^\varepsilon\nu(r)\int\limits_1^r\frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}=O(r^\varepsilon\nu(r)),\qquad r\to+\infty.$$

Наслідок 2 доведено.

2. Розглянемо випадок, коли функція зростання ν має скінченний порядок, тобто $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\log\nu(r)/\log r<+\infty$.

Теорема 2. *Нехай ν – функція зростання скінченного порядку. Тоді функція зростання*

$$\lambda(r)=\begin{cases} r^{q-1}\int\limits_1^r\frac{\nu(t)}{t^q}dt+r^q\int\limits_r^\infty\frac{\nu(t)}{t^{q+1}}dt & ,\ \text{при } r\geqslant 1,\\ r\int\limits_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^{q+1}}dt & ,\ \text{при } r\in(0,1),\end{cases}$$

де q – найменше натуральне число таке, що

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\nu(t)}{t^{q+1}}dt<+\infty.$$

є мінімальною мажорантою для $\mathcal{E}_\nu$.

Доведення. Існування цілої функції скінченного λ-типу з заданою послідовністю нулів $\mathcal{Z}\in S_\nu$ добре відоме (див., наприклад, [2, с.53]). Ця функція – канонічний добуток Вейєрштрасса роду $q-1$.

Перевіримо умову 2) означення. Розглянемо послідовність $\mathcal{Z}$ додатних чисел таку, що $n(r,\mathcal{Z})=\nu(r)+O(1)$, $r\to+\infty$. Нехай f – деяка ціла функція така, що

$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$. Оцінимо коефіцієнти Фур'є $l_k(r, f)$, $k = q-1, q$, її логарифма [4]

$$l_{q-1}(r,f) = \gamma_{q-1}r^{q-1} + r^{q-1}\int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^q}dt, \quad \gamma_{q-1} = 0 \quad \text{при} \quad q = 1,$$

$$l_q(r,f) = \gamma_q r^q + r^q \int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}}dt.$$

За означенням q і побудовою $\mathcal{Z}$ одержуємо

$$l_{q-1}(r,f) = (1+o(1))r^{q-1}\int\limits_0^r \frac{\nu(t)}{t^q}dt, \qquad r \to \infty.$$

При $r \to +\infty$ маємо

$$\gamma_q + \int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}}dt \to \gamma_q + \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}}dt.$$

Мінімум модуля цієї границі досягається при

$$\gamma_q = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}}dt.$$

Тому при досить великих r отримуємо

$$r^q \int\limits_r^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{q+1}}dt \leqslant |l_q(r,f)| + O(1).$$

Оскільки при деяких додатних a, b для всіх $r > 0$ виконується [5]

$$\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |l_k(r,f)|^2\right\}^{1/2} \leqslant bT(ar,f),$$

то при певному $c > 0$ одержуємо

$$\lambda(r) \leqslant c(|l_{q-1}(r,f)| + |l_q(r,f)|) \leqslant BT(ar,f),$$

починаючи з деякого $r > 0$. Тепер сталі a, B можна вибрати так, що ця нерівність буде виконуватися для всіх $r > 0$. Умова 2) означення виконана. Теорема 2 доведена.

Праця виконана при підтримці INTAS, проект № 99-00089.

1. *Васильків Я.В.* Зауваження до умов скінченності λ-типу цілої функції// Мат. методи та фіз.-мех. поля (в друці)
2. *Хейман У.* Мероморфные функции. – М., 1966.
3. *Skoda H.* Sous-ensembles analytique ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$// Bull. Soc. Math. France. – 1972. – Vol. 100. – №4. – P.353-408.

4. *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці// Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50. – №7. – С.889-896.

5. *Бридун А.М., Лизун О.Я., Мицик Р.З.* Узагальнення теореми Ліндельофа для цілих функцій// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.20-27.

ON MAJORANTS OF THE GROWING OF ENTIRE FUNCTIONS

Ya. Vasylkiv, O. Lyzun

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

For entire functions f satisfying certain restrictions on the number of its zeros are find growth majorants of Nevanlinna characteristic $T(r, f)$ which are minimal in some sence.

Key words: entire function, counting function, Nevanlinna characteristic, infinite order, finite order.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2001

Прийнята до друку 03.07.2001