ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.61-65 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.61-65*

УДК 517.5

ПРО МІНІМУМ МОДУЛЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО РОДУ

Олег СКАСКІВ, Ігор ЧИЖИКОВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілої функції $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - z/a_n)$ нульового роду доведено, що умова $\varliminf\limits_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\sum_{|a_n|<r}|a_n|+r\sum_{|a_n|>r}\frac{1}{|a_n|}\right) = 0$ є достатньою, а у випадку, коли $a_n > 0$ $(n \geqslant 1)$, і необхідною для того, щоб $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} m_f(r)/M_f(r) = 1$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Ключові слова: ціла функція, мінімум модуля, нульовий рід.

Для мероморфної функції f позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$. А. А. Гольдберг довів таку теорему.

Теорема А [1]. *Якщо f – мероморфна у комплексній площині функція порядку нуль і*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N(r,0,f)+N(r,\infty,f)}{\ln^2 r}\leqslant\sigma<+\infty, \tag{1}$$

то

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{m_f(r)}{M_f(r)}\geqslant C(\sigma)=\Big(\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\Big)^2,\quad q=e^{-\frac{1}{4\sigma}}, \tag{2}$$

де $N(r,0,f)$ і $N(r,\infty,f)$ – усереднені лічильні функції відповідно нулів і полюсів функції f (означення див. [2]), $C(0)=1$.

Він висловив припущення [1], що теорема А правильна для кожної мероморфної функції нульового роду, якщо виконується умова (1).

У праці [3] доведено, що нерівність (2) є правильна для кожної мероморфної функції нульового роду, як тільки виконується умова

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{r}{\ln^2 r}\int_r^{+\infty}\frac{N(r,0,f)+N(r,\infty,f)}{t^2}dt\leqslant\sigma<+\infty, \tag{3}$$

яка є дещо сильнішою за умову (1). З умови (1) для мероморфної функції нульового порядку, а з умови (3) для мероморфної функції нульового роду випливає при $\sigma=0$ рівність

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{m_f(r)}{M_f(r)}=1. \tag{4}$$

Тому природно виникає запитання про необхідні і достатні умови правильності рівності (4) в класі мероморфних функцій нульового роду. Ми даємо відповідь

Дослідження частково підтримані грантом INTAS, проект 99-0089

на це запитання у випадку цілих функцій нульового роду. Власне, якщо $\lambda = (\lambda_n)$ – неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел така, що $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, то через $Z(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій f нульового роду таких, що

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big), \quad |a_n| = \lambda_n \ (n \geqslant 1),$$

тобто клас функцій з фіксованою послідовністю $(|a_n|)$.

Правильна така теорема.

Теорема. *Для того щоб для цілої функції $f \in Z(\lambda)$ справджувалась рівність (4) достатньо, а у випадку, коли $a_n = \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$, і необхідно, щоб*

$$\varliminf_{r \to +\infty} \Big(\frac{1}{r} \sum_{\lambda_n \leqslant r} \lambda_n + r \sum_{\lambda_n > r} \frac{1}{\lambda_n}\Big) = 0. \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи, що при $|z| = r > 0$

$$|f(z)| \leqslant \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{r}{\lambda_n}\Big) = \hat{f}(-r), \quad |f(z)| \geqslant \prod_{n=1}^{+\infty} \Big|1 - \frac{r}{\lambda_n}\Big| = \hat{f}(r),$$

де $\hat{f}(z) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - z/\lambda_n\Big)$, то $M_f(r) \leqslant \hat{f}(-r) = M_{\hat{f}}(r)$ і $m_f(r) \geqslant \hat{f}(r) = m_{\hat{f}}(r)$, а отже, достатньо довести теорему для функції $\hat{f}$. Далі для $r \notin \{\lambda_n\}$

$$\ln \frac{M_{\hat{f}}(r)}{m_{\hat{f}}(r)} \leqslant \sum_{\lambda_n < r} \ln \frac{1 + \frac{r}{\lambda_n}}{1 - \frac{r}{\lambda_n}} + \sum_{\lambda_n > r} \ln \frac{\frac{r}{\lambda_n} + 1}{\frac{r}{\lambda_n} - 1} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1(r) + \Pi_2(r).$$

Тому достатньо показати, що $\varliminf\limits_{r \to +\infty} (\Pi_1(r) + \Pi_2(r)) = 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (5).

Зауважимо, що

$$\Pi_1(r) = \sum_{\lambda_n < r} \ln\Big(1 + \frac{2\lambda_n}{r - \lambda_n}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n < r} c_n(r),$$
$$\Pi_2(r) = \sum_{\lambda_n > r} \ln\Big(1 + \frac{2r}{\lambda_n - r}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n > r} d_n(r),$$

при цьому $c_n(r) > 0$ і $d_n(r) > 0$ для всіх $n \geqslant 1$ і $r \notin \{\lambda_n\}$.

Припустимо, що виконується умова (5). Тоді існує така послідовність $r_j \uparrow +\infty$, що при $r = r_j \to +\infty$

$$\frac{1}{r} \sum_{\lambda_n < r} \lambda_n + r \sum_{\lambda_n > r} \frac{1}{\lambda_n} = o(1). \tag{6}$$

Звідси отримуємо, що для $m_j = \max\{n : \lambda_n < r_j\}$ виконується $r_j/\lambda_{m_j+1} \to 0$ і $\lambda_{m_j}/r_j \to 0$ $(j \to +\infty)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $r_j/\lambda_{m_j+1} \leqslant \frac{1}{2}$ і $\lambda_{m_j}/r_j \leqslant \frac{1}{2}$ $(j \geqslant 1)$.

Тоді для всіх $n \leqslant m_j$

$$c_n(r_j) = \ln\Big(1 + \frac{2\lambda_n}{r_j - \lambda_n}\Big) \leqslant \frac{2\lambda_n}{r_j\Big(1 - \frac{\lambda_n}{r_j}\Big)} \leqslant 4\frac{\lambda_n}{r_j},$$

а для всіх $n \geqslant m_j + 1$

$$d_n(r_j) = \ln\Big(1 + \frac{2r_j}{\lambda_n - r_j}\Big) \leqslant \frac{2r_j}{\lambda_n\Big(1 - \frac{r_j}{\lambda_n}\Big)} \leqslant 4\frac{r_j}{\lambda_n},$$

тому згідно з (6)

$$\Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j) \leqslant 4\Big(\frac{1}{r_j}\sum_{\lambda_n < r_j}\lambda_n + r_j\sum_{\lambda_n > r_j}\frac{1}{\lambda_n}\Big) = o(1) \quad (r_j \to +\infty),$$

і достаність умови (5) доведено.

Припустимо, що $r_j \uparrow +\infty$ послідовність, для якої

$$\Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j) = o(1) \quad (r_j \to +\infty). \tag{7}$$

Тоді $c_n(r_j) = o(1)$ $(r_j \to +\infty)$ для кожного $n \leqslant m_j$ і $d_n(r_j) = o(1)$ $(r_j \to +\infty)$ для кожного $n \geqslant m_j + 1$. Звідки отримуємо, що для $n \leqslant m_j$

$$\tilde{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\lambda_n}{r_j - \lambda_n} = o(1) \quad (r_j \to +\infty),$$

і для $n \geqslant m_j + 1$

$$\tilde{d}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2r_j}{\lambda_n - r_j} = o(1) \quad (r_j \to +\infty).$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\tilde{c}_n \leqslant 1/2$, $\tilde{d}_n \leqslant 1/2$. Тому, використовуючи нерівності $\ln(1+x) \geqslant 2x/3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$, $\frac{\lambda_n}{r_j - \lambda_n} \geqslant \frac{\lambda_n}{r_j}$ і $\frac{r_j}{\lambda_n - r_j} \geqslant \frac{r_j}{\lambda_n}$, отримуємо

$$\frac{4}{3}\Big(\sum_{\lambda_n < r_j}\frac{\lambda_n}{r_j} + \sum_{\lambda_n > r_j}\frac{r_j}{\lambda_n}\Big) \leqslant \Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j).$$

Звідси, згідно з (7), бачимо, що виконується умова (5).

Необхідність умови (5), а з нею і теорему повністю доведено.

Наведемо один наслідок з теореми.

Наслідок. *Якщо $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant n_0)$, то для того щоб для функції $f \in Z(\lambda)$ справджувалась рівність (4) достатньо, а у випадку, коли $a_n = \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$ і необхідно, щоб*

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Необхідність умови (8) отримуємо негайно з того, що $\frac{\lambda_{m_j}}{r_j} \geqslant \frac{\lambda_{m_j}}{\lambda_{m_j+1}}$, де m_j і r_j визначено у доведенні теореми.

Для доведення достатності умови (8) припустимо, не зменшуючи загальності міркувань, що $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 1)$. Тому $\lambda_m \geqslant \lambda_p q^{m-p}$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$ і, отже, у випадку, коли послідовність $m_j \to +\infty$ така, що $\lambda_{m_j}/\lambda_{m_j+1} = o(1)$ $(j \to +\infty)$, а $r_j = \sqrt{\lambda_{m_j}\lambda_{m_j+1}}$ негайно отримаємо

$$\frac{1}{r_j}\sum_{k=1}^{m_j}\lambda_k + r_j\sum_{k=m_j+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{\lambda_{m_j}}{r_j}\sum_{k=1}^{m_j} q^{k-m_j} + \frac{r_j}{\lambda_{m_j+1}}\sum_{k=m_j+1}^{+\infty} q^{m_j+1-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{m_j}}{\lambda_{m_j+1}}}\frac{2q}{q-1} = o(1) \quad (j \to +\infty),$$

тобто виконується умова (5).

Зазначимо, що у випадку, коли виконується умова

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N_\lambda(r)}{\ln^2 r} = 0, \quad N_\lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\lambda(t)}{t}dt, \quad n_\lambda(t) = \sum_{0<\lambda_n\leqslant t} 1,$$

то виконується (8). Навпаки це не правильно. Для кожного $\sigma > 0$ існує послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, що одночасно

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_\lambda(r)}{\ln^2 r} = \sigma, \quad \lim_{r\to+\infty}\frac{r}{\ln^2 r}\int_r^{+\infty}\frac{N_\lambda(t)}{t^2}dt = \sigma, \tag{9}$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant q > 1 \quad (n \geqslant 1), \quad \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty.$$

Справді, нехай $\tilde\lambda = (\tilde\lambda_n)$ наступна послідовність $\tilde\lambda_n = q^n$, $q = e^{\frac{1}{2\sigma}}$, $\sigma > 0$. Тоді

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{n_{\tilde\lambda}(t)}{\ln t} = 2\sigma \tag{10}$$

і, отже, для $\tilde\lambda$ правильні рівності (9).

Виберемо послідовності $n_k = 2^{2^k}$ $(k \geqslant \max\{[q]+1, 2\})$ та $m_k = \min\{m : \tilde\lambda_m \geqslant k\tilde\lambda_{n_k}\}$. Нехай послідовність λ вибрана з умови

$$\lambda = \{\lambda_n : n \geqslant 1\} = (\{k\tilde\lambda_{n_k}\} \cup \{\tilde\lambda_n\}) \setminus \{\tilde\lambda_n : n_k + 1 \leqslant n \leqslant m_k\}.$$

Позаяк $\tilde\lambda_{n+1} = q\tilde\lambda_n$ $(n \geqslant 1)$ і

$$\frac{k\tilde\lambda_{n_k}}{\tilde\lambda_{n_k}} = k \geqslant [q]+1 > 1, \quad \frac{\tilde\lambda_{m_k+1}}{k\tilde\lambda_{n_k}} \geqslant \frac{\tilde\lambda_{m_k+1}}{\tilde\lambda_{m_k}} = q,$$

то $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 1)$, а також $\varlimsup_{n\to+\infty}\lambda_{n+1}/\lambda_n = +\infty$. Далі, очевидно, що

$$n_\lambda(t) \leqslant n_{\tilde\lambda}(t) \quad (t > 0), \tag{11}$$

крім того, при $k \geqslant \max\{[q]+1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} k_0$ і $t \in [\tilde\lambda_{n_k}, \tilde\lambda_{n_{k+1}})$

$$n_\lambda(t) \geqslant n_{\tilde\lambda}(t) - \sum_{s=k_0}^{k}(m_s - n_s).$$

Зауважимо, що

$$\tilde\lambda_{m_s} = (e^{\frac{1}{2\sigma}})^{m_s} \geqslant s\tilde\lambda_{n_s} = s(e^{\frac{1}{2\sigma}})^{n_s},$$

тобто $m_s \geqslant 2\sigma \ln s + n_s$, а, враховуючи, що m_s є найменшим можливим, то $m_s = n_s + [2\sigma \ln s]$, тому для $t \in [\tilde\lambda_{n_k}, \tilde\lambda_{n_{k+1}})$

$$n_\lambda(t) \geqslant n_{\tilde\lambda}(t) - \sum_{s=k_0}^{k} [2\sigma \ln s]. \tag{12}$$

Оскільки $\sum\limits_{s=k_0}^{k} [2\sigma \ln s] \sim 2\sigma k \ln k$ $(k \to +\infty)$ та $n_{\tilde\lambda}(t) \geqslant n_k = 2^{2^k}$ при $t \geqslant \lambda_{n_k}$, то з (11) і (12) одержуємо

$$n_\lambda(t) = (1 + o(1)) n_{\tilde\lambda}(t) \quad (t \to +\infty),$$

а отже,

$$N_\lambda(t) = (1 + o(1)) N_{\tilde\lambda}(t) \quad (t \to +\infty).$$

Звідки отримуємо, що для послідовності λ виконуються умови (8)–(10) і $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 1)$.

---

1. *Гольдберг А.А.* О минимуме модуля мероморфной функции медленного роста // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. –№6. – С.835-844.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
3. *Skaskiv O.B.* An elementary addendum to A. Gol'dbergs's theorem on the minimum modulus of a meromorphic function of zero order // Math. methods and phiz.-mech. fields. – 1999. – Vol.43. – №4 – P.155-158.

ON THE MINIMUM OF AN ENTIRE FUNCTION OF ZERO GENUS

O. Skaskiv, I. Chyzhykov

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - z/a_n)$ be an enitre function of zero genus. We prove that in order to $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}}\, m_f(r)/M_f(r) = 1$, where $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, it is sufficient and in the case when $a_n > 0$ $(n \geqslant 1)$ is necessary that $\underline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \left(\frac{1}{r} \sum_{|a_n|\leqslant r} |a_n| + r \sum_{|a_n|>r} \frac{1}{|a_n|} \right) = 0.$

Key words: entire function, minimum modulus, zero order.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.2001

Прийнята до друку 03.07.2001