ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.66-73

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.66-73

УДК 517.57

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Олеся ТРАКАЛО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано аналоги співвідношень Бореля для цілих кратних рядів Діріхле.
Ключові слова: ряд Діріхле, виняткова множина, математичне сподівання.

Нехай $H^p(\lambda)$ – клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} F_n e^{<z,\lambda_n>},$$

де $\|n\| = n_1 + \dots + n_p$ для мультиіндексу $n = (n_1, \dots, n_p)$, $< a, b >= a_1 b_1 + \dots a_p b_p$ для $a = (a_1, \dots a_p)$, $b = (b_1, \dots b_p)$, а $\lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ – фіксована послідовність така, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$, $j = 1, 2, \dots p$.

Для $F \in H^p(\lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ визначимо $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{<\sigma,\lambda_n>}$, $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|F_n| e^{<\sigma,\lambda_n>} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$.

Нехай L – клас додатних неперервних неспадних необмежених на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H^p(\lambda, \Phi) = \{f \in H^p(\lambda) : \ln \mathfrak{M}(\sigma, F) = O(|\sigma| \Phi(|\sigma|)) \, (|\sigma| \to +\infty)\},$$

де $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots \sigma_p^2}$ для $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^p$.

У випадку всього класу цілих рядів Діріхле від однієї змінної (тобто класу $H^1(\lambda)$) відомо [1], що умова (при $j = 1$)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} < +\infty \tag{1}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{2}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_1)$, де E_1 – деяка множина скінченної міри Лебега на прямій $\text{meas} E_1 < +\infty$. У [2] цей результат доповнено. Для класу $H^1(\lambda, \Phi)$ з теореми 1 [2] випливає таке: якщо $\Phi \in L$, $F \in H^1(\lambda, \Phi)$ і для кожного $\eta > 0$ виконується умова (при $j = 1$)

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \lambda_k^{(j)} \leqslant \eta \Phi(R)} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} = 0, \tag{3}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$), де E_2 – деяка множина нульової лінійної щільності

$$\mathcal{D}E_2 \equiv \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{1}{R}\mathrm{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

У [3-6] отримано аналоги цих результатів у класі $H^p(\lambda)$ (в [3,4,6] для $p = 2$, в [5] при $p \geqslant 2$). Найсильніші в частині описання виняткової множини E твердження одержали в [5,6]. Нехай S_R – необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, напрямною якого є сфера $\{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) : |\sigma| = R\}$, а твірні паралельні до прямої $\{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) : \sigma_1 = \cdots = \sigma_p\}$, а K – конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат O такий, що

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \mu(t\sigma, F)}{t} = +\infty\}.$$

З результату, доведеного в [5], випливає, що співвідношення (2) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_3$) для кожної функції $F \in H^p(\lambda)$, $p \geqslant 2$, як тільки для $1 \leqslant j \leqslant p$ виконується умова (1), а для лебегової в $\mathbb{R}^p$ міри множини E_3 виконується

$$\mathrm{meas}_p(E_3 \cap S_R) = O(R^{p-1}) \quad (R \to +\infty).$$

З результату, одержаного в [6], випливає, що для кожної функції $F \in H^2(\lambda)$, якщо виконується умова (1) при $j = 1$ і $j = 2$, то співвідношення (2) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_4$), де K – кут в $\mathbb{R}^2$ з вершиною у початку координат і множина E_4, зокрема, такі, що $\mathbb{R}^2_+ \subset K$ і

$$\iint\limits_{E_4 \cap \mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty, \tag{4}$$

тут і далі $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Отримане описання (4) виняткової множини E_4 є найкраще можливим у тому сенсі, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують послідовність λ, для якої виконується умова (1) при $j = 1$ і $j = 2$, функція $F \in H^2(\lambda)$, множина E_4 і стала $h > 0$ такі, що $\iint\limits_{E_4 \cap \mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty$ і для всіх $\sigma \in E_4$

$$\ln M(\sigma, F) \geqslant (1 + h) \ln \mu(\sigma, F). \tag{5}$$

Позначимо

$$H^2_0(\lambda) = \bigcup_{\Phi} H^2(\lambda, \Phi),$$

де об'єднання беремо за всіма функціями $\Phi(t) = e^{\rho t}$, $\rho > 0$. У цьому повідомленні доповнимо в класі $H^2_0(\lambda)$ цитоване вище твердження з [6].

Правильною є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $F \in H^2_0(\lambda)$ і при $j = 1$ і $j = 2$ виконується умова (3). Тоді співвідношення (2) є правильним при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_5$) для кожного кута K з вершиною в точці O такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \mathbb{R}^2_+$, а множина E_5 така, що*

$$\iint\limits_{E_5 \cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = o(R) \quad (R \to +\infty),$$

де $C_R = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2_+ \, : \, |\sigma| \leqslant R\}$, $R > 0$.

Доведення. Нехай $n_j(t) = \sum\limits_{\lambda_k^{(j)} \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності j-их компонент векторної послідовності (λ_n), а $n(t, \sigma) = \sum\limits_{<\lambda_n, \sigma> \leqslant t} 1$. Зауважимо, що при $\sigma \in \mathbb{R}^2_+$

$$n_j\left(\frac{t}{\sigma_j}\right) \leqslant n(t, \sigma) \leqslant n_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) n_2\left(\frac{t}{\sigma_2}\right).$$

Враховуючи, що $\ln(1 + x) \leqslant x$ $(x > -1)$, маємо $\dfrac{1}{n} \geqslant \ln(n + 1) - \ln n$, тому

$$\sum_{\lambda_n^{(j)}} \frac{1}{n \lambda_n^{(j)}} \geqslant \int_0^R \frac{d \ln n_j(t)}{t},$$

звідки отримуємо, що для кожного $\sigma \in \mathbb{R}^2_+$

$$\int_0^R \frac{d \ln n(t, \sigma)}{t} \leqslant \int_0^R \frac{d \ln n_1(t/\sigma_1)}{t} + \int_0^R \frac{d \ln n_2(t/\sigma_2)}{t} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \int_0^{R/\sigma_1} \frac{d \ln n_1(t)}{t} + \frac{1}{\sigma_2} \int_0^{R/\sigma_2} \frac{d \ln n_2(t)}{t}.$$

Отже, якщо $\varepsilon(t) \searrow 0$ $(t \to +\infty)$ така, що

$$\frac{1}{\ln R} \left(\sum_{0 < \lambda_n^{(1)} \leqslant R} \frac{1}{n \lambda_n^{(1)}} + \sum_{0 < \lambda_n^{(2)} \leqslant R} \frac{1}{n \lambda_n^{(2)}} \right) < \varepsilon(R),$$

а $\overline{K} \subset \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \, : \, 0 < \delta_1 \leqslant \sigma_2/\sigma_1 \leqslant \delta_2 < +\infty\}$, то для всіх $\sigma = e_0$, $|e_0| = 1$, $e_0 \in \overline{K}$ одержуємо

$$\int_0^R \frac{d \ln n(t, e_0)}{t} \leqslant \frac{1}{\delta} \varepsilon\left(\frac{R}{\delta}\right) \ln \frac{R}{\delta},$$

де $\delta = \min\{\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2\}$, $\overline{\delta}_1 = 1/\sqrt{1 + \delta_2^2}$, $\overline{\delta}_2 = \delta_1/\sqrt{1 + \delta_1^2}$. Звідси випливає, що існує така зростаюча функція $\varphi \in L$, що

$$\ln \max\{n(t, e_0) \, : \, e_0 \in \overline{K}, \, |e_0| = 1\} = o(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{6}$$

$$I_0(R) \equiv \int_0^R \frac{d\varphi(t)}{t} = o(\ln R) \quad (R \to +\infty). \tag{7}$$

Нехай $\psi(t)$ – функція обернена до функції $\varphi(t)$. В [7] доведено, що з (7) випливає

$$I(R) \equiv \int_0^R \frac{dt}{\psi(t)} = o(\ln R) \quad (R \to +\infty). \tag{8}$$

Це доведення наведемо з дозволу автора.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\psi(x) = 1$ $(x \leqslant 0)$. Нехай $G_1 = \{R > 0 : \psi(R) > R\}$, $G_2 = \mathbb{R}_+ \setminus G_1$. Зауважимо, що

$$I(R) = \int^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t},$$

тобто якщо G_1 – обмежена множина, то співвідношення (8) доведено. Отже, вважаємо, що G_1 – необмежена множина, $\varepsilon > 0$ – довільне число, $R \in G_1$, a $\alpha(R,\varepsilon) = \max\{\psi(R - \sqrt{\varepsilon}\ln R), 1/\sqrt{\varepsilon}\}$. Для $R > \sqrt{\varepsilon}$ маємо

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \frac{R - \varphi(\alpha(R,\varepsilon))}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}\ln R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \ln R,$$

а для $R \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ln R$

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \frac{R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}\ln R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \ln R,$$

тобто для всіх $R \in G_1$

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \varepsilon \ln R. \tag{9}$$

Позначимо $G_3 = \{R \in G_1 : \alpha(R,\varepsilon) > R\}$. Для $R \in G_3$ одержуємо

$$\begin{aligned} \int^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} &= I_0(R) + \int\limits_{R}^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \\ &\leqslant I_0(R) + \frac{1}{R}(\varphi(\alpha(R,\varepsilon)) - \varphi(R)) \leqslant I_0(R) + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

а для $G_1 \setminus G_3$

$$\int^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant I_0(R).$$

Тому з нерівностей (9) і (10) для всіх $R \in G_1$ отримуємо

$$I(R) \leqslant \varepsilon \ln R + I_0(R) + 1.$$

Залишається зауважити, що для $R \in G_2$, очевидно,

$$I(R) \leqslant I_0(R).$$

З останніх двох нерівностей отримуємо співвідношення (8).

Для фіксованого $e_0 \in \mathbb{R}^2_+$, $|e_0| = 1$ розглянемо функцію $g(t) = \ln \mathfrak{M}(te_0, F)$, $t \in \mathbb{R}$ і випадкову величину $\xi =< \lambda_n, e_0 >$, $n \in \mathbb{Z}^2_+$ з розподілом ймовірностей

$$P\{\xi =< \lambda_n, e_0 >\} = \frac{|a_n| e^{t<\lambda_n, e_0>}}{\mathfrak{M}(\sigma, F)}.$$

Нескладний підрахунок засвідчує, що математичне сподівання $M\xi = g'(t)$, а дисперсія $D\xi = g''(t)$. Позаяк $g''(t) = D\xi \geqslant 0$ для кожного фіксованого e_0 і $t > 0$, то функція $g(t)$ – опукла на $(0, +\infty)$.

Нехай $E(e_0) = \{t : g'(t) \geqslant 0,5\psi(g(t))\}$, де функцію ψ визначено вище, а $E_5 = \bigcup\limits_{|e_0|=1} E(e_0)$. Тоді

$$\iint\limits_{E_5\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)\cap[0,R]} \Theta dt\Bigg)d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)\cap[0,R]} \frac{g'(t)dt}{\psi(g(t))}\Bigg)d\Theta \leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_0^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)}\Bigg)d\Theta = \pi\int\limits_0^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Залишається пригадати, що $g(R) = O(e^{\rho R})$ $(R \to +\infty)$ для деякого $\rho > 0$ і застосувати співвідношення (8). Отже,

$$\iint\limits_{E_5\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} \leqslant o(\ln g(R)) = o(R) \quad (R \to +\infty),$$

тобто отримали потрібну оцінку величини множини E_5. Для всіх $\sigma \notin E_5$ при $\sigma = te_0$ послідовно одержуємо

$$g'(t) \leqslant \frac{1}{2}\psi(g(t)) = \frac{1}{2}\psi(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)). \tag{11}$$

За нерівністю Маркова $P\{\xi \geqslant a\} \leqslant \dfrac{M\xi}{a}$ $(a > 0)$ при $a = 2M\xi = 2g'(t)$ і $\sigma = te_0$ отримуємо

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{<\lambda_n, e_0>\leqslant a} |a_n|e^{<\sigma,\lambda_n>} + \mathfrak{M}(\sigma, F)P\{\xi > a\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{<\lambda_n, e_0>\leqslant a} |a_n|e^{<\sigma,\lambda_n>} + \frac{1}{2}\mathfrak{M}(\sigma, F).$$

Тому звідси і за нерівністю (11) при $\sigma \notin E_5$ маємо

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leqslant \ln n(2g'(t), e_0) + \ln \mu(\sigma, F) + \ln 2 \leqslant$$
$$\leqslant \ln n(\psi(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)), e_0) + \ln \mu(\sigma, F) + \ln 2.$$

Враховуючи, що (див. [8]) $|\sigma| = o(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F))$ $(|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K)$ за допомогою співвідношення (6) отримуємо при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_5)$

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) + o(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)).$$

З огляду на нерівності $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ $(\sigma \in \mathbb{R}^2)$, теорему 1 доведено.

За допомогою теореми 2 [2] одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Для кожної послідовності* λ *такої, що* $\ln\|n\| = O(\|\lambda_n\|)$ $(\|n\| \to +\infty)$ *і умова (3) не виконується при* $j = 1$ *або* $j = 2$, *існують функція* $F \in$

$H_0^2(\lambda)$, стала $h > 0$, множина $E_6 \subset \mathbb{R}_+^2$ такі, що для всіх $\sigma \in E_6$ правильною є нерівність (5) і

$$\varlimsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} > 0. \tag{12}$$

Доведення. Для визначеності приймемо, що умова (3) не виконується при $j = 1$. Тоді одночасно $\ln k = O(\lambda_k^{(1)})$ $(k \to +\infty)$ і

$$\varlimsup_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{0<\lambda_k^{(1)}\leqslant R} \frac{1}{k\lambda_k} > 0.$$

Тому за теоремою 2 [2] існують стала $h > 0$, цілий ряд Діріхле

$$f_1(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{\sigma_1 \lambda_k^{(1)}}$$

такий, що

$$0 \leqslant a_k \leqslant e^{-\lambda_k^{(1)} \ln \lambda_k^{(1)}}, \tag{13}$$

та множина $E^{(1)} \subset [0, +\infty)$ така, що $\frac{1}{R}\text{meas}(E^{(1)} \cap [0, R]) \geqslant d > 0$ для деякої послідовності $R = R_j \to +\infty$ і такі, що

$$\ln f_1(\sigma_1) > (1 + 2h) \ln \mu(\sigma_1, f_1) \tag{14}$$

для всіх $\sigma_1 \in E^{(1)}$. Зазначимо, (див. [9]) з умови (13) випливає, що

$$\ln f_1(\sigma_1) \leqslant Ae^{\rho\sigma_1} \quad (\sigma_1 > 0)$$

для деяких $A > 0$ і $\rho > 0$. Виберемо довільний цілий ряд Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами $b_k \geqslant 0$ і показниками $\lambda_k^{(2)}$, вимагаючи лише, щоб виконувались нерівності

$$\mu(\sigma_1, f_2) \leqslant \mu(\sigma_1, f_1) \quad (\sigma_1 > 0), \tag{16}$$

$$\ln f_2(\sigma_2) \leqslant Ae^{\rho\sigma_2} \quad (\sigma_2 > 0). \tag{17}$$

Тоді для всіх $\sigma \in E_6 \equiv \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1 \in E^{(1)}, 0 < \sigma_2 \leqslant \sigma_1\}$ для функції $F(\sigma) = f_1(\sigma_1)f_2(\sigma_2)$, послідовно використовуючи нерівність (14), Коші і (16), маємо

$$\begin{gathered}\ln F(\sigma) \geqslant (1 + 2h) \ln \mu(\sigma_1, f_1) + \ln f_2(\sigma_2) \geqslant \\ \geqslant (1 + 2h) \ln \mu(\sigma_1, f_1) + \ln \mu(\sigma_2, f_2) \geqslant \\ \geqslant (1 + h)(\ln \mu(\sigma_1, f_1) + \ln \mu(\sigma_2, f_2)) = (1 + h) \ln \mu(\sigma, F).\end{gathered}$$

Залишається перевірити, що $F \in H_0^2(\lambda)$. Використовуючи нерівності (15) і (16), для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+^2$ і деякого $\rho_1 > 0$ одержуємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant Ae^{\rho\sigma_1} + Ae^{\sigma_2} \leqslant Ae^{\rho_1|\sigma|}.$$

Доведемо, що для множини E_6 виконується (12). Нехай $E^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k, b_k)$ – об'єднання інтервалів, які не перетинаються. Тоді у випадку, коли $b_m \leqslant R <$

a_{m+1},

$$\iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{0}^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_k/\cos\Theta}^{b_k/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi}{4}(b_k - a_k) = \frac{\pi}{4}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0, R])$$

та у випадку, коли $R \in (a_{m+1}, b_{m+1})$,

$$\iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{0}^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_k/\cos\Theta}^{b_k/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta + \int\limits_{0}^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_{m+1}/\cos\Theta}^{R/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{4}\Bigg(\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) + R - a_{m+1}\Bigg) = \frac{\pi}{4}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0, R]).$$

Залишається використати співвідношення $\varlimsup\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0, R]) > 0$. Теорему 2 доведено.

З теорем 1 і 2 одержуємо такий критерій.

Теорема 3. *Для того щоб для кожної функції $F \in H_0^2(\lambda)$ співвідношення (2) виконувалось при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_5$), необхідно і достатньо, щоб при $j = 1$ і $j = 2$ справджувалась умова (3); тут кут K і множина E_5 такі, як і в теоремі 1.*

1. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – N 1. – С. 41-47.
2. *Шеремета М.Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42. – N 2. – С. 215-226.
3. *Гречанюк Н.И.* О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – N 8. – С. 1047-1053.
4. *Гречанюк Н.И.* Максимум модуля и максимальный член двойного ряда Дирихле: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1989.
5. *Скаскiв О.Б., Орищин О.Г.* Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле // Матем. студії. – 1997. – Т. 8. – N 1. – С. 43-52.
6. *Скаскiв О.Б., Тракало О.М.* Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле // Матем. студії. – 2001. – Т. 16. – N 1.
7. *Скаскiв О.Б.* Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле : Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995.

8. *Скасків О.Б., Луцишин М.Р.* Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44. – N 9. – С. 1296-1298.

9. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

ABOUT RELATIONS OF BOREL FOR MULTIPLE DIRICHLET SERIES

O. Trakalo

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The relations of Borel type for entire multiple Dirichlet series are obtained.

Key words: Dirichlet series, exceptional set, mathematical expactation.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.2001

Прийнята до друку 03.07.2001