ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.74–83

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.74–83

УДК 517.9

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ТИПУ ІШИМОРІ ЯК РЕДУКЦІЯ НЕКАНОНІЧНОЇ ІЄРАРХІЇ КАДОМЦЕВА-ПЕТВІАШВІЛІ

Юрій БЕРКЕЛА, Юрій СИДОРЕНКО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто нову інтегровну за Лаксом нелінійну динамічну систему. Ця система міститься в неканонічній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі і є (2+1)-вимірним узагальненням (1+1)-вимірної моделі Гейзенберга. Знайдено широкий клас точних розв'язків у вигляді нелінійної суперпозиції лінійних хвиль.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі.

Значну частину відомих сьогодні нелінійних інтегровних за Лаксом диференціальних рівнянь з частинними похідними в просторі розмірності (1+1) і (1+2) отримано як редукцію в скалярній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (КР) [1,2], яку прийнято називати канонічною. Матричне узагальнення ієрархії КР і нелінійні моделі, пов'язані з нею, розглядали в [3,4], а скалярна неканонічна (модифікована) ієрархія КР в праці [5].

Нелокальні редукції (які узагальнюють добре відомі редукції Гельфанда-Дікого) в інтегровних ієрархіях почали активно вивчати недавно (див. [5],[6],[7], і цитовану там літературу).

Праця побудована так. У першому розділі подано необхідний мінімум інформації про алгебру Лі формальних інтегродиференціальних операторів, а також введено поняття неканонічної матричної ієрархії КР. У головній частині (розділ 2) показано як відоме рівняння Ішиморі (17) [8], яке є просторово-двовимірним узагальненням нелінійного магнетика Гейзенберга, одержано з неканонічної ієрархії КР. Одним з головних результатів праці є нова версія (2+1)-вимірного узагальнення нелінійної моделі Гейзенберга (рівняння (13)), а також процедура його інтегрування (формули (24)-(25)). У третьому розділі обговорено деякі проблеми, пов'язані з дослідженням системи (13) при наявності фізично важливої редукції ермітового спряження.

1. Вихідні положення. Розглянемо над полем **C** лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : i, n(L) \in \mathbf{Z} \right\}, \qquad (1)$$

де коефіцієнти a_i є матричними $N \times N$ -функціями "просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1, t_2, \dots$.

Матричні коефіцієнти $a_i(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ вважають гладкими функціями векторної змінної $\mathbf{t}$, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{A}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot]:\zeta\times\zeta\to\zeta, [L_1,L_2]=L_1L_2-L_2L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1, L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j} f^{(j)}\mathcal{D}^{n-j}, n\in\mathbf{Z}, f\in\mathcal{A}\subset\zeta, f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j}\in\mathcal{A}\subset\zeta, \qquad (2)$$

$$\mathcal{D}^n\mathcal{D}^m := \mathcal{D}^m\mathcal{D}^n := \mathcal{D}^{n+m}, n,m\in\mathbf{Z}.$$

Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n\in\zeta$ і оператора множення на функцію $f\in\mathcal{A}\subset\zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення

$$\mathcal{D}^k(f) := \frac{\partial^k f}{\partial x^k}\in\mathcal{A}, k\in\mathbf{Z}_+.$$

Строго диференціальну та інтегральну частини МДО $S=\sum\limits_{i=-\infty}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i$ визначають так:

$$S=S_{>0}+S_{\leqslant 0}, S_{>0}=\sum_{i=1}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i, S_{\leqslant 0}=\sum_{i=-\infty}^{0} s_i\mathcal{D}^i. \qquad (3)$$

Формула (3) індукує розклад алгебри ζ в лінійну суму підалгебр строго диференціальних $\zeta_{>0}$ і інтегральних $\zeta_{\leqslant 0}$ операторів $\zeta=\zeta_{>0}\dot{+}\zeta_{\leqslant 0}$.

Задамо на алгебрі Лі ζ систему попарно комутуючих диференціювань $\{\partial_n\}, n\in\mathbf{N}$; $\partial_n:(\zeta,[\cdot,\cdot])\to(\zeta,[\cdot,\cdot])$

$$\partial_n L=\partial_n\left(\sum_j a_j\mathcal{D}^j\right) := \sum_j\frac{\partial a_j}{\partial t_n}\mathcal{D}^j + L\partial_n \equiv L_{t_n}+L\partial_n,$$

$$[\partial_n,\partial_m]=0,\quad [\mathcal{D}^j,\partial_n]=0,\quad j\in\mathbf{Z}.$$

Розглянемо $B_n^0, B_m^0\in\zeta_{>0}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\nu_i\mathcal{D}^i\right\}$, $\hat{B}_n^0 := \alpha_n\partial_{t_n}-B_n^0$, $\hat{B}_m^0 := \alpha_m\partial_{t_m}-B_m^0$, де $\alpha_i\in\mathbf{C}$ такі, що $\left[\hat{B}_n^0,\hat{B}_m^0\right]=\left[\alpha_n\partial_{t_n}-B_n^0,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m^0\right]=0.$

$$W=\sum_{i=0}^{\infty} w_i\mathcal{D}^{-i}$$

– елемент простору $\zeta_{\leqslant 0}$, для якого існує обернений W^{-1}.

Нехай оператор $B_n := \alpha_n\partial_{t_n}-W\hat{B}_n^0W^{-1}$.

Твердження.

$$1.\quad [\alpha_n\partial_{t_n}-B_n,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m]=0. \qquad (4)$$

2. $B_n\subset\zeta_{>0}$ *тоді і тільки тоді, якщо*

$$\alpha_n W_{t_n}=\left(WB_n^0W^{-1}\right)_{>0}W-WB_n^0. \qquad (5)$$

Доведення. 1. $[\alpha_n\partial_{t_n}-B_n,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m]=\left[W\hat{B}_n^0W^{-1},W\hat{B}_m^0W^{-1}\right]=$

$$=W\hat{B}_n^0\hat{B}_m^0W^{-1}-W\hat{B}_m^0\hat{B}_n^0W^{-1}=W[\hat{B}_n^0,\hat{B}_m^0]W^{-1}=0.$$

2. $B_n \subset \zeta_{>0} \Leftrightarrow (B_n)_{\leqslant 0} = 0$.

$$(B_n)_{\leqslant 0} = (\alpha_n\partial_{t_n} - W\hat{B}_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = (\alpha_n\partial_{t_n} - W(\alpha_n\partial_{t_n} - B_n^0)W^{-1})_{\leqslant 0} =$$
$$(\alpha_n W_{t_n} W^{-1} + WB_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = \alpha_n W_{t_n} W^{-1} + (WB_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = 0 \Rightarrow$$
$$\alpha_n W_{t_n} W^{-1} = -(WB_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = -WB_n^0 W^{-1} + (WB_n^0 W^{-1})_{>0} \Rightarrow$$
$$\alpha_n W_{t_n} = -WB_n^0 + (WB_n^0 W^{-1})_{>0} W.$$

Наслідок. *Нехай $\alpha_1 = 0$, $L_0 := B_1^0 = C_1\mathcal{D}, B_m^0 = C_m\mathcal{D}^m, C_1, C_m \in \mathcal{I}_N$, де $\mathcal{I}_N$ – деяка комутативна підалгебра алгебри $Mat_{N\times N}$, оператор $L := WL_0W^{-1}$, тоді*

$$\alpha_m L_{t_m} = [B_m, L], \tag{6}$$

а за умови $C_m = (C_1)^m$ оператор L є розв'язком матричної ієрархії типу КР (Кадомцева-Петвіашвілі [1,2])

$$\alpha_m L_{t_m} = [(L^m)_{>0}, L]. \tag{7}$$

Доведення. З (4) одержуємо

$$[B_1, \alpha_m\partial_{t_m} - B_m] = 0 \Rightarrow [L, \alpha_m\partial_{t_m} - B_m] = 0 \Rightarrow (6),$$
$$B_m = \alpha_m\partial_{t_m} - W\hat{B}_m^0 W^{-1} = \alpha_m\partial_{t_m} - W(\alpha_m\partial_{t_m} - C_m\mathcal{D}^m)W^{-1} =$$
$$= \alpha_m W_{t_m} W^{-1} + WC_m\mathcal{D}^m W^{-1}.$$

Оскільки $B_m \subset \zeta_{>0}$, то $B_m = (WC_m\mathcal{D}^m W^{-1})_{>0}$. При $C_m = (C_1)^m$ маємо $B_m = (L^m)_{>0} \Rightarrow (7)$.

Означення. Нескінченна система рівнянь (7) ($m \in \mathbf{N}$) називається неканонічною матричною ієрархією КР.

Як зазначено раніше, оператори W мають обернені W^{-1}, коефіцієнти яких послідовно знаходимо з означення $WW^{-1} = I$. Безпосередні обчислення дають змогу виписати достатню для наших цілей кількість коефіцієнтів оператора $W^{-1} = w_0^{-1} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i\mathcal{D}^{-i}$

$$\omega_1 = -w_0^{-1}w_1w_0^{-1};$$
$$\omega_2 = -w_0^{-1}w_2w_0^{-1} + w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_1w_0^{-1} - w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_{0x}w_0^{-1};$$
$$\omega_3 = -2w_0^{-1}w_2w_0^{-1}w_{0x}w_0^{-1} - 2w_0^{-1}w_1(w_0^{-1}w_{0x})^2w_0^{-1} - 2w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_{0xx}w_0^{-1} -$$
$$-w_0^{-1}w_3w_0^{-1} + w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_{0x}w_0^{-1}w_1w_0^{-1} + (w_1w_0^{-1})^2w_{0x}w_0^{-1} - w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_{1x}w_0^{-1}$$
$$+w_0^{-1}w_2w_0^{-1}w_1w_0^{-1} + w_0^{-1}(w_1w_0^{-1})^2w_{0x}w_0^{-1} + w_0^{-1}w_1w_0^{-1}w_2w_0^{-1} - w_0^{-1}(w_1w_0^{-1})^3.$$

2. Головна частина. Розглядатимемо введений простір ζ мікродиференціальних операторів, де коефіцієнти є матричними функціями розмірності 2×2 "просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1 = y, t_2 = t$.

Приклад 1. Візьмемо $B_1^0 = \sigma_3\mathcal{D}$, $B_2^0 = (B_1^0)^2 = \mathcal{D}^2, \ldots, B_n^0 = (B_1^0)^n$, $L = WB_1^0W^{-1}$.

$$(W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1})_{>0} = w_0\sigma_3 w_0^{-1}\mathcal{D},$$
$$(W\mathcal{D}^2W^{-1})_{>0} = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D},$$

де σ_3 – третя матриця Паулі $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Нехай $L = S\mathcal{D} + u_0 + u_1\mathcal{D}^{-1} + \dots$. Тоді існує такий зв'язок між коефіцієнтами операторів W та L:

$$S = w_0\sigma_3 w_0^{-1},$$

$$u_0 = -w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1} - w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} + w_1\sigma_3 w_0^{-1},$$

звідки випливає, що $S^2 = 1$.

З (7), враховуючи те, що $L_{>0} = S\mathcal{D}$, $L_{>0}^2 = \mathcal{D}^2 + (SS_x + u_0 S + S u_0)\mathcal{D}$ одержуємо такі рекурентні рівняння на S та u_i:

$$\alpha_1 S_y = [S, u_0]. \tag{8}$$

$$\alpha_1 u_{iy} = S u_{ix} + S u_{i+1} - \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_{j+1} S^{(i-j)},$$

$$\alpha_2 S_t = S[S, u_{0x}] + [S, u_0^2] = [S, S u_{0x} + u_0^2], \tag{9}$$

$$\alpha_2 u_{it} = u_{ixx} + 2u_{i+1,x} + (SS_x + u_0 S + S u_0)(u_{ix} + u_{i+1}) -$$
$$- \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_{j+1} (SS_x + u_0 S + S u_0)^{(i-j)}, \quad i \in \mathbf{Z}_+.$$

Зокрема,

$$\alpha_1 u_{0y} = S u_{0x} + S u_1 - u_1 S = S u_{0x} + [S, u_1], \tag{10}$$

$$\alpha_1 u_{1y} = S u_{1x} + S u_2 + u_1 S_x - u_2 S = S u_{1x} + u_1 S_x + [S, u_2],$$
$$\alpha_2 u_{0t} = u_{0xx} + 2u_{1x} + (SS_x + u_0 S + S u_0) u_{0x} + [SS_x + u_0 S + S u_0, u_1].$$

Для функцій S та u_0 з (8), (9) одержимо замкнену систему

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = [S, S u_{0x} + u_0^2], \\ \alpha_1 S_y = [S, u_0]. \end{cases} \tag{11}$$

Враховуючи, що $S^2 = 1$, друге рівняння системи (11) можна розв'язати

$$u_0 = c_1 + c_2 S + \frac{\alpha_1}{2} S S_y,$$

де c_1, c_2 – деякі скалярні функції. Підставивши цей вираз у перше рівняння системи (11) і використовуючи співвідношення

$$\alpha_1 (u_{0y} S + S u_{0y}) = S u_{0x} S + u_{0x},$$

яке є наслідком формули (10), отримаємо

$$\alpha_2 S_t = \frac{\alpha_1}{2}[S, S_{xy}] + 2\alpha_1 c_1 S_y + 2c_2 S_x,$$

$$(\alpha_1 c_{2y} - c_{1x}) I + (\alpha_1 c_{1y} - c_{2x}) S = \frac{\alpha_1}{4}[S_x, S_y]. \tag{12}$$

З (12) випливає, що $\alpha_1 c_{2y} = c_{1x}$. Беручи $c_1 = \alpha_1 \varphi_y$, $c_2 = \varphi_x$, де φ - деяка скалярна функція, одержуємо

$$u_0 = \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \varphi_x S + \alpha_1 \varphi_y.$$

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = \dfrac{\alpha_1}{2}[S, S_{xy}] + 2\alpha_1^2 \varphi_y S_y + 2\varphi_x S_x, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2 \varphi_{yy} = \dfrac{\alpha_1}{4} S[S_y, S_x]. \end{cases} \tag{13}$$

Зображення Захарова–Шабата для цієї системи має вигляд

$$[\alpha_1 \partial_y - S\mathcal{D}, \alpha_2 \partial_t - \mathcal{D}^2 - (SS_x + 2\alpha_1 \varphi_y S + 2\varphi_x)\mathcal{D}] = 0.$$

Приклад 2. Візьмемо $B_1^0 = \sigma_3 \mathcal{D}$, $B_2^0 = \sigma_3 \mathcal{D}^2$. Тоді

$$\begin{gathered} (W\sigma_3 \mathcal{D} W^{-1})_{>0} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} \mathcal{D}, \\ (W\sigma_3 \mathcal{D}^2 W^{-1})_{>0} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} \mathcal{D}^2 + (w_1 \sigma_3 w_0^{-1} - \\ - w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})\mathcal{D}. \end{gathered}$$

З (5) одержимо такі рекурентні рівняння на коефіцієнти оператора W:

$$\alpha_1 w_{iy} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{ix} + w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{i+1} - w_{i+1}\sigma_3, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \alpha_2 w_{it} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{i,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0 \sigma_3 w_0^{-1}] - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{ix} + w_{i+1}) + \\ + 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{i+1,x} + w_0 [\sigma_3, w_0^{-1} w_{i+2}], \quad i \in \mathbf{Z}_+. \end{gathered} \tag{15}$$

Декілька перших рівнянь з системи (14)–(15) мають вигляд

$$\begin{gathered} \alpha_1 w_{0y} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} + w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_1 - w_1 \sigma_3, \\ \alpha_1 w_{1y} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{1x} + w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_2 - w_2 \sigma_3, \\ \alpha_2 w_{0t} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0 \sigma_3 w_0^{-1}] - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{0x} + w_1) + \\ + 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{1,x} + w_0 [\sigma_3, w_0^{-1} w_2], \\ \alpha_2 w_{1t} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{1,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0 \sigma_3 w_0^{-1}] - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{1x} + w_2) + \\ + 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{2,x} + w_0 [\sigma_3, w_0^{-1} w_3]. \end{gathered}$$

Одержимо замкнену систему на w_0 та w_1

$$\begin{cases} \alpha_2 w_{0t} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0 \sigma_3 w_0^{-1}] - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{0x} + w_1) + \\ + w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{1,x} + \alpha_1 w_{1y}, \\ \alpha_1 w_{0y} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} + w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_1 - w_1 \sigma_3, \end{cases}$$

яка зводиться до системи

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = SS_{xx} + RS_x - SR_x + \alpha_1 R_y, \\ \alpha_1 S_y = [S, R] - SS_x, \end{cases} \tag{16}$$

де $R = w_1 \sigma_3 w_0^{-1} - w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - 2 w_0 \sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1}$, а $S := w_0 \sigma_3 w_0^{-1}$.

Аналогічно до попереднього прикладу, друге рівняння системи (16) дає змогу виключити функцію R

$$R = \frac{1}{2} S_x + \frac{\alpha_1}{2} S S_y + c_1 S + c_2,$$

де c_1, c_2 - деякі скалярні функції. Підставляючи R у перше рівняння системи (16), воно набуває вигляду

$$\alpha_2 S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx} + \alpha_1^2 S_{yy}] + c_2 S_x + \alpha_1 c_1 S_y - c_{1x} + \alpha_1 c_{2y} + \frac{\alpha_1}{2} S[S_y, S_x] + \alpha_1 c_{1y} S - c_{2x} S.$$

Враховуючи співвідношення $\operatorname{tr} S = 0$, одержуємо

$$\alpha_1 c_{2y} - c_{1x} = -\frac{\alpha_1}{2} S[S_y, S_x],$$

$$\alpha_1 c_{1y} - c_{2x} = 0,$$

звідки випливає, що $\alpha_1 c_{1y} = c_{2x}$. Приймемо, що $c_1 = \frac{\varphi_x}{\alpha_1}, c_2 = \varphi_y$, де φ – скалярна функція. В результаті одержимо

$$R = \frac{1}{2} S_x + \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \frac{1}{\alpha_1} \varphi_x S + \varphi_y,$$

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx} + \alpha_1^2 S_{yy}] + \varphi_y S_x + \varphi_x S_y, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2 \varphi_{yy} = \frac{\alpha_1^2}{2} S[S_y, S_x]. \end{cases} \tag{17}$$

Ця модель відома як система Ішиморі (2d-магнетик Гейзенберга)[8].

Зображення Захарова-Шабата для цієї системи має вигляд

$$\left[\alpha_1 \partial_y - S\mathcal{D}, \alpha_2 \partial_t - S\mathcal{D}^2 - (\frac{1}{2} S_x + \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \frac{1}{\alpha_1} \varphi_x S + \varphi_y)\mathcal{D}\right] = 0.$$

Система (17) є інтегровною класичною моделлю, яка описує нелінійну спінову систему на площині (x, y).

В одновимірному випадку модель Гейзенберга є калібрувально-еквівалентною до нелінійного рівняння Шредінгера [9],[10]. Подібна калібрувальна еквівалентність є також у (1+2)-вимірному випадку.

Розглянемо оператори

$$L_{DS} = \alpha_1 \partial_y - \sigma_3 \mathcal{D} - U,$$

$$M_{DS} = \alpha_2 \partial_t - \mathcal{D}^2 - V,$$

де U, V – деякі матричні функції.

При $U = [\sigma_3, \omega]$, $V = 2\omega_x$ одержуємо зображення Захарова-Шабата $[L_{DS}, M_{DS}] = 0$ системи

$$\begin{cases} \alpha_2 P_t = \alpha_1 \sigma_3 P_{xy} + 2[D_x, P], \\ D_x - \alpha_1 \sigma_3 D_y = -2P^2, \end{cases} \tag{18}$$

де

$$\omega = P + D = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{off}(q, r) + \operatorname{diag}(d_1, d_2). \tag{19}$$

Система (18) при редукції $r = \mu \bar{q}, \mu \in \mathbf{R}$ зводиться до нелінійної моделі Деві-Стюартсона (DS) [11] вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2 q_t = \alpha_1 q_{xy} + 2\hat{S} q, \\ \hat{S}_{xx} - \alpha_1^2 \hat{S}_{yy} + 4\alpha_1 \mu |q|^2_{xy} = 0, \end{cases}$$

де $\hat{S} \equiv (d_1 - d_2)_x$.

Проведемо калібрувальне перетворення такого вигляду:

$$\Phi^{-1} L_{DS} \Phi = \hat{L}, \quad \Phi^{-1} M_{DS} \Phi = \hat{M},$$

де Φ – матрична 2×2-функція і $L_{DS}(\Phi)=0$, $M_{DS}(\Phi)=0$. Одержана пара операторів утворює зображення Захарова – Шабата $[\hat{L},\hat{M}]=[\alpha_1\partial_y-\Phi^{-1}\sigma_3\Phi\mathcal{D},\alpha_2\partial_t-\mathcal{D}^2-2\Phi^{-1}\Phi_x\mathcal{D}]=0$ для системи (13), за умов

$$S=\Phi^{-1}\sigma_3\Phi \tag{20}$$

та

$$\alpha_1\varphi_y+\varphi_x\sigma_3=\frac{1}{2}(\sigma_3\Phi_x\Phi^{-1}+\Phi_x\Phi^{-1}\sigma_3). \tag{21}$$

Зі співвідношення (20) випливає, що $\Phi=\pm w_0^{-1}$.

Шляхом елементарних перетворень з рівняння (21) можна виразити функцію φ

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln|\det\Phi|=\frac{1}{2}\ln|\Phi_{11}\Phi_{22}-\Phi_{12}\Phi_{21}|. \tag{22}$$

Для знаходження точних розв'язків нелінійної спінової моделі (13) скористаємося теоремою.

Теорема. *Нехай* $\vec\varphi_1=\vec\varphi_1(\alpha_1x+y,t)$, $\vec\varphi_2=\vec\varphi_2(\alpha_1x-y,t)$ – *векторні розв'язки системи*

$$\begin{cases}\alpha_2\vec\varphi_{1t}=\vec\varphi_{1xx},\\ \alpha_2\vec\varphi_{2t}=\vec\varphi_{2xx},\end{cases} \tag{23}$$

$$\Omega=C+\mu\int\limits_x^{+\infty}\vec{\bar\varphi}_1^T\otimes\vec\varphi_1\,d\tau+\int\limits_x^{+\infty}\vec{\bar\varphi}_2^T\otimes\vec\varphi_2\,d\tau,$$

$\Omega, C\in \mathrm{Mat}_{2n,2n}(\mathbf{C})$, $\vec\varphi_i=(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_{2n}}),i=1,2$; *тоді компоненти матриці* Φ *мають такий вигляд:*

$$\Phi_{ij}=(-1)^j\frac{\begin{vmatrix}\Omega_{(j)}\\ \vec\varphi_i\end{vmatrix}}{|\Omega|},$$

де $\Omega_{(j)}\in\mathrm{Mat}_{2n-1,2n}(\mathbf{C})$ *одержують з* Ω *викресленням* (j)*-стрічки,* $j=\overline{1,2n}$.

Доведення цієї теореми міститься в [12].

Використовуючи (20) і (22), розв'язки системи (13) набувають вигляду

$$S=\Phi^{-1}\sigma_3\Phi=\frac{1}{\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix} & -2\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\\ 2\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix} & -\left(\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\right)\end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\ln\left|\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Omega_{(1)}\\ \vec\varphi_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_{(2)}\\ \vec\varphi_2\end{vmatrix}\right|-\ln|\det\Omega|. \tag{25}$$

Отже, розв'язки нелінійної моделі (13) одержують в явному вигляді як нелінійну суперпозицію розв'язків лінійної системи (23), тобто параметризують 4n-функціональними параметрами $\varphi_{ij}, i=1,2; j=\overline{1,2n}$ і ермітовою матрицею $C=C^*$.

Розглянемо деякі з них, які відповідають найпростішій параметризації.

1. Візьмемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\mu = 1$, $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ і $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}), i = 1,2$ – вектори розмірності 2, компоненти яких мають вигляд

$$\varphi_{11} = e^{\lambda_1(x+y)-i\lambda_1^2 t+\gamma_1}, \varphi_{12} = 0,$$
$$\varphi_{21} = 0, \varphi_{22} = e^{\lambda_2(x-y)-i\lambda_2^2 t+\gamma_2},$$

де $\lambda_i \in \mathbf{C}, i = 1,2$. Позначимо

$$\lambda_i^+ = \mathrm{Re}\lambda_i; \lambda_i^- = \mathrm{Im}\lambda_i; \gamma_i^+ = \mathrm{Re}\gamma_i; \qquad i = 1,2.$$

Для збіжності інтегралів у формулі (23) приймемо $\lambda_i^+ < 0$, $i = 1,2$.

Компоненти матриці Ω матимуть такий вигляд:

$$\Omega_{11} = -\frac{1}{2\lambda_1^+} e^{2\lambda_1^+(x+y)+4\lambda_1^+\lambda_1^- t+2\gamma_1^+}, \quad \Omega_{12} = i,$$
$$\Omega_{21} = -i, \quad \Omega_{22} = -\frac{1}{2\lambda_2^+} e^{2\lambda_2^+(x-y)+4\lambda_2^+\lambda_2^- t+2\gamma_2^+}.$$

Якщо матрицю S подати у вигляді

$$S = \begin{pmatrix} U_3 & U_1 \\ U_2 & -U_3 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

то з формули (24) випливає явний вигляд компонент U_i, i=1,2,3

$$U_1 = \frac{4\lambda_2^+ e^{2(\lambda_1^+ x+\lambda_1^+ y+\lambda_1^+\lambda_1^- t+\gamma_1^+)}}{e^{2((\lambda_1^++\lambda_2^+)x+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)y+(\lambda_1^+\lambda_1^-+\lambda_2^+\lambda_2^-)t+\gamma_1^++\gamma_2^+)} - 4\lambda_1^+\lambda_2^+},$$

$$U_2 = \frac{4\lambda_1^+ e^{2(\lambda_2^+ x-\lambda_2^+ y+\lambda_2^+\lambda_2^- t+\gamma_2^+)}}{4\lambda_1^+\lambda_2^+ - e^{2((\lambda_1^++\lambda_2^+)x+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)y+(\lambda_1^+\lambda_1^-+\lambda_2^+\lambda_2^-)t+\gamma_1^++\gamma_2^+)}},$$

$$U_3 = \frac{e^{2((\lambda_1^++\lambda_2^+)x+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)y+(\lambda_1^+\lambda_1^-+\lambda_2^+\lambda_2^-)t+\gamma_1^++\gamma_2^+)} + 4\lambda_1^+\lambda_2^+}{e^{2((\lambda_1^++\lambda_2^+)x+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)y+(\lambda_1^+\lambda_1^-+\lambda_2^+\lambda_2^-)t+\gamma_1^++\gamma_2^+)} - 4\lambda_1^+\lambda_2^+}.$$

Зокрема, при $\lambda_i^+ = -1, \lambda_i^- = 1, \gamma_i^+ = 0, i = 1,2$

$$U_1 = \frac{-4ie^{-2x-2y-t}}{e^{-4x-2t}-4}, \qquad U_2 = \frac{-4ie^{-2x+2y-t}}{e^{-4x-2t}-4}, \qquad U_3 = \frac{e^{-4x-2t}+4}{e^{-4x-2t}-4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{4e^{-2(1-i)x-4t}}{e^{-4x-2t}-4}.$$

2. Візьмемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\mu = 1$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}), i = 1,2$ – вектори розмірності 2, компоненти яких мають вигляд

$$\varphi_{11} = 0, \varphi_{12} = e^{\lambda_1(x+y)-i\lambda_1^2 t+\gamma_1},$$
$$\varphi_{21} = e^{\lambda_2(x-y)-i\lambda_2^2 t+\gamma_2}, \varphi_{22} = 0,$$

де $\lambda_i \in \mathbf{C}, i = 1,2$. Нехай $\lambda_j = -1+i, \gamma_j^+ = 0, j = 1,2$. Аналогічно до попереднього випадку знаходимо компоненти матриці S з (26)

$$U_1 = \frac{-4e^{-2x-2y-t}}{e^{-4x-2t}-4}, \qquad U_2 = \frac{4e^{-2x+2y-t}}{e^{-4x-2t}-4}, \qquad U_3 = \frac{e^{-4x-2t}+4}{e^{-4x-2t}-4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{4e^{-2(1-i)x-4t}}{e^{-4x-2t}-4}.$$

3. Завершальні зауваження. Одержана інтегровна система (13) допускає два суттєво відмінних випадки. За аналогією з моделями Деві-Стюартсона (DS) їх можна назвати моделями типу Ішиморі - I (випадок $\alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_2 \in \mathbf{iR}$) і Ішиморі - II (випадок $\alpha_1 \in \mathbf{iR}, \alpha_2 \in \mathbf{R}$). Обидві моделі калібрувально еквівалентні до систем DS-I і DS-II відповідно. Ми розглядали перший випадок. Для отримання розв'язків другої моделі можна використати результати праць [11], [13] з інтегрування системи DS-II.

Особливе зацікавлення система (13) представляє при додатковій редукції ермітового спряження $S^* = S^{-1} = S$ (редукція $S^2 = I = \mathrm{diag}(1,1)$ очевидно задовольняється). Обидві системи (13) і (17) є (2+1)-вимірними узагальненнями (1+1) - вимірної класичної моделі феромагнетика Гейзенберга (ізотропного рівняння Ландау – Ліфшиця). Функція $S(x,y,t)$ в цьому випадку приймає значення в алгебрі Лі su(2) і може бути зображена у вигляді $S = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_3\sigma_3$, де σ_i - стандартні матриці Паулі, $i = 1,2,3$.

У термінах магнітного вектора $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ система (13) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2\vec{S}_t = \frac{\alpha_1}{2}\vec{S}\times\vec{S}_{xy} + 2\alpha_1^2\varphi_y\vec{S}_y + 2\varphi_x\vec{S}_x, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2\varphi_{yy} = \frac{\alpha_1}{4}\vec{S}(\vec{S}_y\times\vec{S}_x), \end{cases} \tag{27}$$

де "$\times$" є зовнішнім (векторним) добутком. Одержані в праці розв'язки (24), (25) не задовольняють системі (27) автоматично. Дослідження моделі (27) буде проведено окремо.

---

1. *Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T.* An elementary introduction to Sato theory// Progress Theoret. Phys. Suppl. – 1988. – Vol. 94. – P.210-241.
2. *Dickey L.A.* Soliton equations and Hamiltonian systems// Adv. Ser. in Math. Phys. – 1991. – N 12. – 310 p.
3. *Strampp W., Kundu A.* Derivative and higher order extension of Davey-Stewartson equation from matrix KP hierarchy// J. Math. Phys. – 1995. – Vol. 36. – P.4192-4200.
4. *Сидоренко Ю.М.* Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі і нелінійні інтегровні системи// Нелінійні коливання. – 1999. – Вип. 2. – N 2. – С.30-39.
5. *Oewel W., Strampp W.* Constrained KP-hierarchy and bi-hamiltonian structures// Commun. Math. Phys. – 1993. – Vol. 157. - P.51-68.
6. *Sidorenko J.M., Strampp W.* Multicomponent integrable reductions in the KP-hierarchy// J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34. – P.1429-1444.
7. *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями. Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 1. – С.78-97.
8. *Ishimori Y.* Multi-vortex solutions of a two-dimentional nonlinear wave equation// Progr. Theor. Rhys. – 1983. – Vol. 72. – N 1. - C.33-39.

9. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.* Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга// Теор. и мат. физика - 1979. - Т. 38. - N 1. - С.26-35.

10. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. - М., 1986.

11. *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса та інтегровні редукції в системі Деві-Стюартсона // Укр. мат. журн. - 1998. - Т. 50. - N 2. - С.252-264.

12. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. - 2001. - Т. 53. - N 5.

13. *Беркела Ю.Ю.* Матричні аналоги нелінійних рівнянь Бюргерса// Укр. фіз. журн. - 1998. - Т. 43. - N 7. - С.776-780.

NONLINEAR MODEL ISHIMORI'S TYPE AS REDUCTION OF THE NONCANONICAL HIERARCHY OF KADOMTSEV-PETVIASHVILI

Yu. Berkela, Yu. Sidorenko

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

New integrable by Lax nonlinear dynamical system is proposed. This system contains in the noncanonical hierarchy of Kadomtsev-Petviashvili and it is (2+1)-dimensional generalization of the (1+1)-dimensional Heisenberg model. Wide class of exact solutions in form of a nonlinear superposition of linear waves is obtained.

Key words: nonlinear dynamical system, hierarchy of Kadomtsev-Petviashvili.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2000

Прийнята до друку 03.07.2001