ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.84-101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.84-101

УДК 517.95

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В АНІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРАХ

Микола БОКАЛО, Василь ДМИТРІВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Встановлено коректність початково-граничної задачі і задачі Фур'є для інтегро-диференціальних рівнянь, диференціальна частина яких є квазілінійним параболічним оператором з різними степенями нелінійностей за різними похідними. У випадку задачі Фур'є не накладається ніяких умов на поведінку розв'язку і зростання початкових умов при $t \to -\infty$.

У природі є багато процесів, для опису яких теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних недостатньо. Все більше дослідників цікавиться інтегро-диференціальними рівняннями [1-4]. В працях [3,4] розглянуто першу крайову задачу для таких рівнянь, диференціальна частина яких є параболічним диференціальним оператором. У наведеній праці доведено коректність початково-граничної задачі та задачі Фур'є (задача без початкових умов (див. [5-7])) для інтегро-диференціальних рівнянь, диференціальна частина яких є квазілінійним параболічним оператором. Узагальнені розв'язки цих задач розглядають в анізотропних просторах Соболєва. Для доведення коректності задачі Фур'є не вимагається обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язку на нескінченності. Результати цієї роботи є узагальненням праць [6,7] на випадок інтегро-диференціальних рівнянь.

1. Коректність початково-граничної задачі

Нехай $Q_0 = \Omega \times (0,T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Розглядається задача

$$u_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) + \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \qquad (x,t) \in \quad Q_0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Sigma = 0 \qquad (j = 0,1,...,m-1), \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Тут і далі m – довільне фіксоване натуральне число, α, β, γ – мультиіндекси довжиною n, $\delta u = (D^\beta u; |\alpha| \leqslant m)$ – вектор, який містить всі можливі похідні

$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$, порядок $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ яких менший або дорівнює m. Нехай N – розмірність вектора δu.

Припустимо, що виконуються умови

(A1) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$ ($|\alpha| \leqslant m$) визначені для майже всіх $(x,t) \in Q_0$ та всіх векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$ з координатами ξ_β ($|\beta| \leqslant m$) і є каратеодорівськими; $a_\alpha(x,t,0) = 0$ ($|\alpha| \leqslant m$);

(A2) існують числа $p_\gamma > 1$ ($|\gamma| \leqslant m$) такі, що для всіх α ($|\alpha| \leqslant m$), майже всіх $(x,t) \in Q_0$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ правильні нерівності

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta| \leqslant m} |\xi_\beta|^{p_\beta / p'_\alpha} + k_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(\overline{Q_0})$, $k_\alpha \in L_{p'_\alpha}(\overline{Q_0})$, $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p'_\alpha} = 1$;

(A3) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q_0$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0;$$

(A4) $K \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times (0,T))$;

(A5) $f_\alpha \in L_{p'_\alpha}(Q_0)$ ($|\alpha| \leqslant m$);

(A6) $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Нехай $\vec{p} = (p_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ – N-вимірний вектор з координатами p_α ($|\alpha| \leqslant m$). Під $\overset{o}{W}{}^m_{\vec{p}}(\Omega)$ розумітимемо простір, який є замиканням простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v\| = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|^2_{L^{p_\alpha}(\Omega)} \right)^{1/2}$, а $W^{-m}_{\vec{p}'}(\Omega)$ – спряжений до $\overset{o}{W}{}^m_{\vec{p}}(\Omega)$ простір.

Додатково будемо припускати, що

(A7) існує неперервне вкладення $\overset{o}{W}{}^m_{\vec{p}}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Зауважимо, що для виконання припущення **(A7)** достатньо, щоб справджувалась нерівність $p_\gamma \geqslant 2$ хоча б для одного мультиіндекса γ (див. лему 1 праці [7]).

Означення 1.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1.1) – (1.3) *назвемо функцію* $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_0) \cap C([0,T]; L_2(\Omega))$, *яка задовольняє умову (1.3) та інтегральну рівність*

$$\iint_{Q_0} \left\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi + \left(\int_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi \right\} dx\, dt =$$

$$= \iint_{Q_0} \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi \, dx dt \qquad (1.4)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$.

Позначимо через $\vec{K} = (K_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ N–вимірний вектор з невід'ємними компонентами K_α ($|\alpha \leqslant m$). Скажемо, що $\vec{K}$ задовольняє умову повноти, якщо існує (залежна від $n, m, \vec{p}, \vec{K}, \Omega$) неперервна неспадна функція $G_{\vec{K}} : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ така, що $G(0) = 0$ і для будь-якого елемента v простору $\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega \times (0;1))$

$$||v||_{\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega\times(0;1))} \leqslant G_{\vec{K}}(B),$$

де $B = \iint\limits_{\Omega\times(0;1)} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha v|^{p_\alpha}\, dxdt.$

Зауважимо, коли $K_\alpha > 0$ для всіх $\alpha\,(|\alpha| \leqslant m)$, то (очевидно) вектор $\vec{K} = (K_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ задовольняє умову повноти. Коли $p_\alpha = 2\,(0 < |\alpha| \leqslant m)$, $p_0 \geqslant 2$, то вектор $\vec{K}$ задовольняє умову повноти, якщо тільки $K_\alpha > 0$ при $|\alpha| = m$ і $|\alpha| = 0$. Це випливає з відповідних інтерполяційних нерівностей.

Теорема 1.1. *Припустимо, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q_0$ виконується нерівність*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha},$$

де K_α ($|\alpha| \leqslant m$) – невід'ємні сталі такі, що вектор $\vec{K} = (K_\alpha;\ |\alpha| \leqslant m)$ задовольняє умову повноти. Додатково припустимо, що $f_\alpha = 0$, коли $K_\alpha = 0\,(|\alpha| \leqslant m)$.

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1.1)-(1.3).

Доведення. Спочатку покажемо існування розв'язку. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай система $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ функцій $w_i \in C_0^\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, ...)$ є лінійно незалежною і повною в $\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega)$. Оскільки $u_0 \in L_2(\Omega)$ і правильне припущення **(A7)**, то існує послідовність $\{u_0^k\}_{k=1}^\infty$ елементів вигляду $u_0^k = \sum\limits_{i=1}^{k} \overset{o}{c}{}_i^k w_i$ $(k \in \mathbb{N})$ таких, що $u_0^k \to u_0$ в $L_2(\Omega)$ ($\overset{o}{c}{}_i^k = \text{const}\ \forall i,k$).

Для кожного натурального k шукаємо гальоркінське наближення u^k у вигляді

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_i^k(t) w_i(x), \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{1.5}$$

де $c_1^k(t), c_2^k(t), ..., c_k^k(t)$ – абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що u^k є розв'язком системи рівнянь

$$\int\limits_\Omega \left\{ u_t^k w_l + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k) D^\alpha w_l + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u^k(y,t)\, dy \right) w_l - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha w_l \right\} dx = 0 \qquad (l = 1, ..., k;\ t \in [0,T]) \tag{1.6}$$

та задовольняє умову

$$u^k(x,0) = u_0^k(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Знаходження u^k зводиться до відшукання набору абсолютно неперервних на $[0,T]$ функцій $c_1^k(t), c_2^k(t), \ldots, c_k^k(t)$, які є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{\Omega} w_l w_i\, dx\right)(c_i^k)' + \int_{\Omega}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta(\sum_{i=1}^{k} c_i^k w_i))D^\alpha w_l - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha w_l\right\} dx+$$

$$+\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} K(x,y,t)\sum_{i=1}^{k} c_i^k w_i(y)\, dy\right) w_l(x)\, dx = 0 \quad (l=1,...,k;\ t\in[0,T]) \qquad (1.8)$$

з початковими умовами

$$c_i^k(0) = \overset{\circ}{c}{}_i^k \quad (i=1,...,k). \qquad (1.9)$$

Покажемо, що задача Коші (1.8),(1.9) має потрібний нам розв'язок. Оскільки матриця $\left(\int_{\Omega} w_l w_i\, dx\right)_{l,i=1}^{k}$ невироджена і виконуються умови (**A1**)-(**A5**), то з відомих результатів (див., наприклад, теорему Каратеодорі на с. 54 праці [9]) випливає, що задача (1.8), (1.9) має єдиний непродовжуваний розв'язок $c_1^k(t), c_2^k(t), \ldots, c_k^k(t)$, який визначений на деякому проміжку $[0,t_1)$ $(t_1 \in (0,T])$ або на $[0,T]$. Доведемо, що цей розв'язок визначений на $[0,T]$, і знайдемо потрібні оцінки.

Домножимо перше рівняння системи (1.8) на $c_1^k(t)e^{-\lambda t}$, друге – на $c_2^k(t)e^{-\lambda t}$ і т.д., де λ – стала, значення якої визначимо пізніше. Підсумуємо одержані рівності та проінтегруємо за t від 0 до τ. В результаті отримаємо

$$\int_0^\tau\int_{\Omega} u_t^k u^k e^{-\lambda t}\, dxdt + \int_0^\tau\int_{\Omega}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k + \right.$$

$$\left. +\left(\int_{\Omega} K(x,y,t)u^k(y,t)\, dy\right)u^k - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k\right\} e^{-\lambda t}\, dxdt = 0. \qquad (1.10)$$

Перший член лівої частини рівності (1.10) перетворимо, врахувавши (1.7), отже,

$$\int_0^\tau\int_{\Omega} u_t^k u^k e^{-\lambda t}\, dxdt = \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_{\Omega} ([u^k]^2)_t e^{-\lambda t}\, dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega}[u_0^k(x)]^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^\tau\int_{\Omega}[u^k]^2 e^{-\lambda t}\, dxdt. \qquad (1.11)$$

Тоді з (1.10), враховуючи (1.11) та умови (**A1**)-(**A5**), одержимо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Bigg\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}K_\alpha|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}+$$
$$+\Big(\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k\Bigg\}e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_0^k(x)]^2\,dx. \tag{1.12}$$

На підставі нерівності Юнга $ab\leqslant\varepsilon a^p+M(\varepsilon,p)b^{p'}$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $\varepsilon>0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, M(\varepsilon,p)=\varepsilon^{-1/(p-1)}p^{-p'}(p-1)$) для кожного $\alpha\,(|\alpha|\leqslant m)$ такого, що $K_\alpha\neq 0$, матимемо

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant\varepsilon_\alpha\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt+$$
$$+M(\varepsilon_\alpha,p_\alpha)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}|f_\alpha|^{p'_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt, \tag{1.13}$$

де $\varepsilon_\alpha>0$ – довільне число.

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\left|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k(x,t)e^{-\lambda t}\,dxdt\right|\leqslant \tag{1.14}$$
$$\leqslant\hat K\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{\Omega}|u^k(x,t)|\,dx\cdot\int\limits_{\Omega}|u^k(y,t)|\,dy\Big)e^{-\lambda t}\,dt\leqslant\hat K|\Omega|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt,$$

де $\hat K=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(0,T)}|K(x,y,t)|$.

Взявши $\varepsilon_\alpha=\frac{1}{2}K_\alpha$ для кожного α такого, що $K_\alpha\neq 0$ ($|\alpha|\leqslant m$), з (1.12)-(1.14) отримаємо

$$e^{-\lambda\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx+\lambda\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}K_\alpha|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|f_\alpha|^{p'_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt+2\hat K|\Omega|\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\int\limits_{\Omega}[u_0^k(x)]^2\,dx. \tag{1.15}$$

З (1.15), взявши $\lambda=2\hat K|\Omega|$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx\leqslant C_2, \tag{1.16}$$

де $C_2>0$ – стала, яка від τ і k не залежить.

Оскільки матриця $(\int\limits_\Omega w_i w_j\,dx)_{i,j=1}^k$ – додатно визначена, то

$$\int\limits_\Omega [u^k(x,\tau)]^2\,dx = \sum_{i,j=1}^k \left(\int\limits_\Omega w_i w_j\,dx\right) c_i^k(\tau)c_j^k(\tau) \geqslant R_k \sum_{i=1}^k |c_i^k(\tau)|^2,$$

де $R_k > 0$ – стала, яка від τ не залежить. Звідси та з (1.16) випливає, що функції c_i^k $(i = 1,\ldots,k)$ визначені на відрізку $[0,T]$. Тоді з (1.15) (взявши $\lambda = 2\hat{K}|\Omega|$ і врахувавши, що $\vec{K}$ задовольняє умову повноти) матимемо

$$\int\limits_\Omega [u^k(x,t)]^2\,dx \leqslant C_3 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{1.17}$$

$$\iint\limits_{Q_0} |D^\alpha u^k|^{p_\alpha}\,dxdt \leqslant C_4 \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant m, \tag{1.18}$$

$$\iint\limits_{Q_0} |a_\alpha(x,t,\delta u^k)|^{p'_\alpha}\,dxdt \leqslant C_5 \quad \forall\alpha,\ |\alpha| \leqslant m, \tag{1.19}$$

де $C_3, C_4, C_5 > 0$ – сталі, які від k не залежать.

На підставі оцінок (1.17) – (1.19) доходимо висновку, що існують підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (яку теж позначимо через $\{u^k\}$) і функції $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_0) \cap L_\infty([0,T]; L_2(\Omega))$ та $\chi_\alpha \in L_{p'_\alpha}(Q_0)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ такі, що

$$u^k \to u \quad \text{*-слабко в } L_\infty([0,T]; L_2(\Omega)), \tag{1.20}$$

$$D^\alpha u^k \to D^\alpha u \quad \text{слабко в } L_{p_\alpha}(Q_0) \quad (|\alpha| \leqslant m), \tag{1.21}$$

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u^k(\cdot,\cdot)) \to \chi_\alpha(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в } L_{p'_\alpha}(Q_0) \quad (|\alpha| \leqslant m). \tag{1.22}$$

Покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1.1) – (1.3). Нехай l – довільне натуральне число і $k \geqslant l$. Візьмемо довільні кусково-гладкі функції $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ такі, що $\gamma_1(T) = 0$, $\gamma_2(T) = 0, \ldots, \gamma_l(T) = 0$. Домножимо перше рівняння системи (1.6) на функцію $\gamma_1(t)$, друге рівняння – на $\gamma_2(t)$ і т.д. до l-го рівняння. Підсумуємо одержані рівності та проінтегруємо за t від 0 до T. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -u^k\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k) D^\alpha\psi + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\right)\psi - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi \right\} dxdt - \int\limits_\Omega u_0^k(x)\psi(x,0)\,dx = 0, \tag{1.23}$$

де $\psi(x,t) = \sum\limits_{i=1}^l \gamma_i(t)w_i(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, причому $\psi(x,T) = 0$.

Приймемо, що $\psi_1(x,y,t) \overset{\text{def}}{=} \psi(x,t)K(x,y,t)$, $(x,y,t) \in \Omega\times\Omega\times(0,T)$. За теоремою Фубіні

$$\iint\limits_{Q_0} \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\right)\psi(x,t)\,dxdt = \int\limits_\Omega dx \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt. \tag{1.24}$$

Нехай $g_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt$, а $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} u(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt$ для майже всіх $x \in \Omega$. На підставі наших припущень для майже всіх $x \in \Omega$ функція $\psi_1(x,\cdot,\cdot) \in L_2(Q_0)$. Тоді з (1.20) випливає, що для майже всіх $x \in \Omega$ $g_k(x) \to g(x)$ при $k \to +\infty$. Оскільки для майже всіх $x \in \Omega$

$$|g_k(x)| \leqslant \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)||\psi_1(x,y,t)|\,dydt = \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)||\psi(x,y)||K(x,y,t)|\,dydt \leqslant$$

$$\leqslant \hat{K}\Psi \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)|\,dydt \leqslant \frac{1}{2}\hat{K}\Psi \iint\limits_{Q_0} (|u^k(y,t)|^2+1)\,dydt \leqslant \frac{1}{2}\hat{K}\Psi(C_3+|\Omega|)T,$$

де $\Psi = \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |\psi(x,t)|$, а C_3 – стала з (1.17), то за теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла отримаємо, що g – інтегровна на Ω і $\int\limits_\Omega g_k(x)\,dx \to \int\limits_\Omega g(x)\,dx$ при $k \to +\infty$. Отже,

$$\iint\limits_{Q_0} \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy \right) \psi(x,t)\,dxdt = \int\limits_\Omega dx \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt \to$$

$$\int\limits_\Omega dx \iint\limits_{Q_0} u(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt = \iint\limits_{Q_0} \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy \right) \psi(x,t)\,dxdt \qquad (1.25)$$

при $k \to +\infty$. Тепер перейдемо в рівності (1.23) до границі при $k \to \infty$, враховуючи (1.20), (1.22) і (1.25). Одержимо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha\psi + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy \right)\psi - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi \right\} dxdt - \int\limits_\Omega u_0(x)\psi(x,0)\,dx = 0 \qquad (1.26)$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega \times [0,T]$, $\psi(x,T) = 0$, $x \in \Omega$.

Обмежившись функціями ψ з простору $C_0^\infty(Q_0)$, з (1.26) та з леми 2 праці [7] отримаємо, що $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$. Покажемо, що $u(x,0) = u_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$. В (1.26) приймемо, що $\psi\varphi_\delta$ замість ψ, де $\varphi_\delta(t) = 1$ при $t > \delta$, $\varphi_\delta(t) = 0$ при $t < 0$ і $\varphi_\delta(t) = t/\delta$, коли $t \in [0,\delta]$, де δ – довільне фіксоване число з інтервалу $(0,T)$. Отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -u\psi_t\varphi_\delta + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha\psi\varphi_\delta + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy \right)\psi\varphi_\delta - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi\varphi_\delta \right\} dxdt - \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta \left(\int\limits_\Omega u\psi\,dx \right) dt = 0 \qquad (1.27)$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega \times [0,T]$ і $\psi(x,T) = 0$, $x \in \Omega$.

Перейдемо в (1.27) до границі при $\delta \to 0$. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha \psi + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi \right\} dxdt - \int\limits_\Omega u(x,0)\psi(x,0)\, dx = 0 \tag{1.28}$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega \times [0,T]$ і $\psi(x,T) = 0$, $x \in \Omega$.

З (1.27) і (1.28) отримаємо

$$\int\limits_\Omega (u(x,0) - u_0(x))\varphi(x)\, dx = 0$$

для довільних $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Звідси випливає, що $u(x,0) = u_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Покажемо, що

$$\iint\limits_{Q_0} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \chi_\alpha(x,t) D^\alpha \psi\, dxdt = \iint\limits_{Q_0} \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi\, dxdt \tag{1.29}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$. Для цього використаємо метод монотонності [8].

Розглянемо вираз

$$M_k \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta v) - a_\alpha(x,t,\delta u^k))(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \frac{\lambda}{2}(v - u^k)^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u^k(y,t))\, dy \right)(v - u^k) \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt,$$

де $v \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_0)$ – поки що довільна функція; $\theta_\delta(t) = 1$ при $t \leqslant T - \delta$, $\theta_\delta(t) = 0$ при $t \geqslant T$ і $\theta_\delta(t) = \frac{T-t}{\delta}$, коли $t \in [T-\delta, T]$, δ – довільне число з інтервалу $(0,T)$; $\lambda \geqslant 2\hat{K}|\Omega|$.

Зауважимо, що $M_k \geqslant 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Справді, враховуючи (**A3**), маємо

$$M_k \geqslant \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \frac{\lambda}{2}(v - u^k)^2 - \left(\int\limits_\Omega |K(x,y,t)||v(y,t) - u^k(y,t)|\, dy \right)|v - u^k| \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{2} - \hat{K}|\Omega| \right) \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - u^k)^2 e^{-\lambda t}\, dxdt \geqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Перепишемо вираз M_k так

$$M_k = \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\, dxdt -$$

$$-\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha v e^{-\lambda t}\,dxdt+\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta(v-2u^k)ve^{-\lambda t}\,dxdt+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t)-u^k(y,t))\,dy\Bigr)v-\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)v(y,t)\,dy\Bigr)u^k\right\}e^{-\lambda t}dxdt$$

$$+\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Bigr)u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt. \tag{1.31}$$

Прийнявши в (1.23) $u^k e^{-\lambda t}\theta_\delta$ замість ψ, отримаємо

$$-\iint\limits_{Q_0}u^k u^k_t e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2\theta'_\delta e^{-\lambda t}\,dxdt+\lambda\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2\theta_\delta e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_0}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Bigr)u^k-\right.$$

$$\left.-\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k\right\}e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\int\limits_\Omega[u^k_0(x)]^2\,dx=0.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\iint\limits_{Q_0}u^k_t u^k e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt=\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}([u^k]^2)_t e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[u^k_0(x)]^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2e^{-\lambda t}\theta'_\delta\,dxdt,$$

одержимо

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta(t)\left\{\frac{\lambda}{2}[u^k]^2+\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Bigr)u^k-\right.$$

$$\left.-\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta'_\delta[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[u^k_0]^2\,dx=0,$$

звідки

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\frac{\lambda}{2}[u^k]^2+\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Bigl(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Bigr)u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt=$$

$$= \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2 e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [u_0^k]^2\,dx. \quad (1.32)$$

Отже, з (1.31), враховуючи (1.32), матимемо

$$M_k = \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\,dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k) D^\alpha v e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - 2u^k) v e^{-\lambda t}\,dxdt +$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u^k(y,t))\,dy \right) v - \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) v(y,t)\,dy \right) u^k \right\} e^{-\lambda t}\,dxdt$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2 e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [u_0^k]^2\,dx. \quad (1.33)$$

Оскільки $u^k \to u$ слабко в $L_2((T-\delta, T); L_2(\Omega))$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2\,dxdt = - \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\delta}^{T} \int\limits_\Omega [u^k]^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\delta}^{T} \int\limits_\Omega u^2\,dxdt = \iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2\,dxdt.$$

Враховуючи це, а також (1.20)-(1.22), (1.25),(1.30), з (1.33) ми отримаємо

$$0 \leqslant \overline{\lim_{k\to+\infty}} M_k \leqslant \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u) e^{-\lambda t}\,dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha v e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - 2u) v e^{-\lambda t}\,dxdt +$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u(y,t))\,dy \right) v - \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) v(y,t)\,dy \right) u \right\} e^{-\lambda t} dxdt$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2 e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_0^2\,dx. \quad (1.34)$$

На підставі леми 2 праці [7] (взявши $\theta = \theta_\delta e^{-\lambda t}$), з (1.26) матимемо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_0^2\,dx - \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2 e^{-\lambda t}\,dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta u^2 e^{-\lambda t}\,dxdt + \quad (1.35)$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha u + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\,dy \right) u - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u \right\} e^{-\lambda t} dxdt = 0.$$

Тому з (1.34) і (1.35) одержимо

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta v(x,t)) - \chi_\alpha(x,t))(D^\alpha v - D^\alpha u)e^{-\lambda t}\,dxdt+ \tag{1.36}$$

$$+\iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2}(v-u)^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t)-u(y,t))\,dy\right)(v-u)\right\} e^{-\lambda t}dxdt \geqslant 0.$$

Приймемо в (1.36) $v = u \pm \mu\psi$, де $\mu > 0$ – будь-яке число, а ψ – довільна функція з $C_0^\infty(Q_0)$. Одержимо

$$\pm\mu \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u + \mu\delta\psi) - \chi_\alpha(x,t))D^\alpha\psi e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\mu^2 \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{\lambda\psi^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)\psi(y,t)\,dy\right)\psi\right\} e^{-\lambda t}\,dxdt \geqslant 0. \tag{1.37}$$

Поділимо (1.37) на μ і перейдемо до границі при $\mu \to 0$. Врахувавши умови (**A1**)-(**A4**) і теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, отримаємо

$$\pm \iint\limits_{Q_0} (a_\alpha(x,t,\delta u) - \chi_\alpha(x,t))D^\alpha\psi\,dxdt \geqslant 0$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$.

Звідси випливає (1.29). На підставі (1.26) і (1.29) маємо (1.4). Існування узагальненого розв'язку задачі (1.1)-(1.3) доведено.

Доведемо єдиність одержаного розв'язку. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Віднімемо від інтегральної тотожності (1.4) для u_1 ту саму тотожність для u_2. В результаті одержимо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{-w\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2))D^\alpha\psi+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy\right)\psi\right\} dxdt = 0$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$, де $w = u_1 - u_2$. Застосуємо до отриманої тотожності лему 2 праці [7] з $t_1 = 0$, $t_2 = \tau$, $\theta = e^{-\lambda t}$, де τ – довільне число з $(0,T]$, $\lambda \geqslant 2\hat{K}|\Omega|$. Тоді одержимо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left\{\frac{\lambda}{2}w^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy\right)w\right\} e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2))D^\alpha w e^{-\lambda t}\,dxdt = 0. \tag{1.38}$$

Оскільки

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2} w^2 + \Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t) w(y,t)\,dy \Big) w \right\} e^{-\lambda t}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2} w^2 - \Big(\int\limits_\Omega |K(x,y,t)||w(y,t)|\,dy \Big) |w| \right\} e^{-\lambda t}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{2} - \hat{K}|\Omega| \right) \iint\limits_{Q_0} w^2 e^{-\lambda t}\,dxdt \geqslant 0,$$

то другий член лівої частини (1.38) невід'ємний. З умови (**A3**) випливає, що третій член лівої частини (1.38) невід'ємний. Отже, всі члени лівої частини рівності (1.38) дорівнюють нулю. Звідси отримаємо, що $w = 0$. Теорему доведено.

2. Задача Фур'є

Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $0 \leqslant T < +\infty$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$.

Розглядаємо задачу

$$u_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) +$$

$$+ \int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\,dy = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.1}$$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right|_\Sigma = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{2.2}$$

Нехай m, δu і N такі самі як в §1.

Припустимо, що виконуються умови:

(**A1**) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ визначені для майже всіх $(x,t) \in Q$ та всіх векторів $\xi = (\xi_\beta; |\beta| \leqslant m) \in \mathbb{R}^N$ з координатами ξ_β $(|\beta| \leqslant m)$ і є каратеодорівськими; $a_\alpha(x,t,0) = 0$ $(|\alpha| \leqslant m)$;

(**A2**) існують числа $p_\gamma \geqslant 2$ $(|\gamma| \leqslant m)$ такі, що для всіх α $(|\alpha| \leqslant m)$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ правильні нерівності

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta| \leqslant m} |\xi_\beta|^{p_\beta / p'_\alpha} + k_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $k_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p'_\alpha} = 1$;

(**A3**) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0;$$

(**A4**) $K \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times (-\infty, T))$;

(**A5**) $f_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $\quad (|\alpha| \leqslant m)$.

Нехай $Q_{t_1,t_2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} Q \cap \{(x,t) : t_1 < t < t_2\}$ для довільних t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$. Під $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розумітимемо простір вимірних на Q функцій, звуження яких на Q_{t_1,t_2} для будь-яких чисел t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, належать простору $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_{t_1,t_2})$, який визначений в §1.

Означення 2.1. Узагальненим розв'язком задачі (2.1), (2.2) назвемо функцію $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T];L_2(\Omega))$, яка справджує інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q} \Bigg\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi + \left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi \Bigg\}\, dxdt = \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi \, dxdt \qquad (2.3)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Зауважимо, що функції з простору $C((-\infty,T];L_2(\Omega))$ можуть зростати при $t \to -\infty$ з довільною швидкістю.

Визначимо умови на коефіцієнти a_α ($|\alpha| \leqslant m$) рівняння (2.1), при яких узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2)

1) існує для будь-яких функцій $f_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$;

2) єдиний у класі $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T];L_2(\Omega))$;

3) неперервно залежить від вихідних даних.

Під неперервною залежністю узагальненого розв'язку задачі (2.1),(2.2) від вихідних даних розумітимемо таке. Нехай коефіцієнти a_α ($|\alpha| \leqslant m$) рівняння (2.1) такі, що задача (2.1),(2.2) має єдиний узагальнений розв'язок для будь-яких $f_\alpha \in L_{p'_{\alpha},\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$. Скажемо, що узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2) неперервно залежить від вихідних даних, якщо для будь-яких послідовностей $\{f_{\alpha,k}\}_{k=1}^\infty \subset L^{p'_\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$ таких, що $f_{\alpha,k} \to f_\alpha$ при $k \to \infty$ в $L^{p'_\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$, відповідна послідовність $\{u^k\}$ збігається до u в $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T];L_2(\Omega))$. Тут u – узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2), а (для кожного $k \in \mathbb{N}$) u_k – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (2.1),(2.2) тільки тим, що в правій частині рівняння (2.1) стоять $f_{\alpha,k}$ замість f_α ($|\alpha| \leqslant m$).

Нагадаємо, що $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $L_{p_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}))$, якщо $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $L^{p_\alpha}(Q_{t_1,t_2})$ $(\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(Q_{t_1,t_2}))$ для будь-яких чисел t_1, t_2 $(-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T)$ $(|\alpha| \leqslant m)$. Домовимось вважати, що $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $C((-\infty,T];L_2(\Omega))$, якщо для довільного відрізка $[t_1,t_2] \subset (-\infty,T]$ маємо $\max\limits_{t\in[t_1,t_2]} ||g_k(t) - g(t)||_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Скажемо, що задача (2.1),(2.2) є коректною, якщо виконуються умови 1)-3).

Теорема 2.1. *Нехай існує мультиіндекс* γ *(*$|\gamma| \leqslant m$ *) такий, що* $p_\gamma > 2$ *і для всіх* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ *та майже всіх* $(x,t) \in Q$ *правильна нерівність*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha} + M_0 |\xi_0 - \eta_0|^2. \quad (2.4)$$

Тут K_α ($|\alpha| \leqslant m$) – невід'ємні сталі такі, що вектор $\vec{K} = (K_\alpha;\, |\alpha| \leqslant m)$ задовольняє умову повноти, M_0 – додатна стала, причому $M_0 \geqslant \hat{K} \cdot |\Omega|$, де $|\Omega|$ – міра Лебега множини Ω, а $\hat{K} \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(-\infty,T)} |K(x,y,t)|$. Додатково припустимо, що $f_\alpha = 0$, якщо $K_\alpha = 0$ ($|\alpha| \leqslant m$).

Тоді задача (2.1),(2.2) є коректною і її узагальнений розв'язок u для будь-яких чисел t_1, t_2, δ таких, що $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, $\delta > 0$, задовольняє оцінку

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha u|^{p_\alpha}\, dxdt + (M_0 - \hat{K}\cdot|\Omega|) \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} u^2\, dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{p_\gamma - 2}} + C_2 \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |f_\alpha|^{p'_\alpha}\, dxdt, \quad (2.5)$$

де C_1, C_2 – деякі додатні сталі, які залежать тільки від $n, m, \Omega, \gamma, \vec{p}, \vec{K}$.

Далі всюди під γ розумітимемо мультиіндекс, про який йдеться в теоремі.

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 2.1. *Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2), а $\tilde{u}$ – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (2.1),(2.2) тільки тим, що в правій частині рівняння (2.1) стоять $\tilde{f}_\alpha$ замість f_α ($|\alpha| \leqslant m$), де $\tilde{f}_\alpha \in L_{p'_{\alpha},\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і $\tilde{f}_\alpha = 0$, якщо $K_\alpha = 0$ ($|\alpha| \leqslant m$). Припустимо, що справджуються умови теореми 2.1.*

Тоді для довільних чисел t_1, t_2, δ таких, що $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T, \delta > 0$, виконується нерівність

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} \int\limits_\Omega |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha u - D^\alpha \tilde{u}|^{p_\alpha}\, dxdt + \quad (2.6)$$
$$+ (M_0 - \hat{K}\cdot|\Omega|) \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u-\tilde{u})^2\, dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{p_\gamma - 2}} + C_2 \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |f_\alpha - \tilde{f}_\alpha|^{p'_\alpha}\, dxdt,$$

де C_1, C_2 – сталі, які залежать тільки від n, m, Ω, γ, M_0, $\hat{K}$, $\vec{p}, \vec{K}$.

Доведення. Віднімемо від інтегральної рівності (2.3), записаної для u, ту саму інтегральну рівність, але записану для $\tilde{u}$. В результаті, прийнявши, що $w = u - \tilde{u}$, отримаємо

$$\iint\limits_Q \Bigg\{ -w\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u) - a_\alpha(x,t,\delta\tilde{u})) D^\alpha \psi +$$
$$+ \Bigg(\int\limits_\Omega K(x,y,t) w(y,t)\, dy \Bigg) \psi \Bigg\}\, dxdt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\leqslant m} (f_\alpha - \tilde{f}_\alpha) D^\alpha \psi\, dxdt \quad (2.7)$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Візьмемо функцію $\theta_1(t)$ з простору $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ з такими властивостями: $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1$, $\theta'_1(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$, $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1,-1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2,0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0,+\infty)$.

Очевидно, що

$$\sup \theta_1'(t)\theta_1^{-\varkappa}(t) \leqslant C_3, \tag{2.8}$$

де $0 < \varkappa < 1$, $C_3 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $\varkappa$.

Нехай t_1, t_2, δ – довільні числа такі, що $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, $\delta > 0$. З (2.7) і леми 2 праці [7], взявши $t_1 - \delta$ замість t_1 і $t_2 = s$, де s – довільне число з інтервалу $[t_1, t_2]$, отримаємо

$$\int\limits_\Omega w^2(x,s)\,dx + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u) - a_\alpha(x,t,\delta\tilde u))D^\alpha w\,dxdt = \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt -$$
$$-2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy\Big) w\,dxdt + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{|\alpha|\leqslant m}(f_\alpha - \tilde f_\alpha)D^\alpha w\,dxdt. \tag{2.9}$$

Тут $\theta(t) \stackrel{def}{=} \theta_1(\frac{t-t_1}{\delta})$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Оцінимо перший доданок правої частини рівності (2.9) аналогічно як в [7] при доведенні теореми 2. Матимемо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt \leqslant \varepsilon_\gamma \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\gamma w|^{p_\gamma}\theta\,dxdt + C_4\,[\delta\,\varepsilon_\gamma]^{-\frac{2}{p_\gamma-2}}, \tag{2.10}$$

де $\varepsilon_\gamma > 0$ – довільне число, $C_4 > 0$ – стала, яка залежить тільки від Ω, γ, p_γ.

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\left|\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy\Big) w\,dxdt\right| \leqslant \tag{2.11}$$
$$\leqslant \hat K \int\limits_{t_1-\delta}^{s} \theta\Big(\int\limits_\Omega |w(y,t)|\,dy \cdot \int\limits_\Omega |w(x,t)|\,dx\Big)dt \leqslant \hat K \cdot |\Omega| \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta\,dxdt.$$

Оцінимо ті члени третього доданку правої частини рівності (2.9), які відмінні від нуля. Використовуючи нерівність Юнга, для кожного α такого, що $K_\alpha > 0$, одержимо

$$2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta(f_\alpha - \tilde f_\alpha)D^\alpha w\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_\alpha \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\alpha w|^{p_\alpha}\theta\,dxdt + C_\alpha \varepsilon_\alpha^{-1/(p_\alpha-1)} \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |f_\alpha - \tilde f_\alpha|^{p'_\alpha}\theta\,dxdt, \tag{2.12}$$

де $\varepsilon_\alpha > 0$ – довільне число, $C_\alpha > 0$ – стала, яка залежить тільки від p_α.

З (2.9) – (2.12) та нерівності (2.4) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,s)\,dx + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha|D^\alpha w|^{p_\alpha} + M_0 w^2\right\} dxdt \leqslant \tag{2.13}$$

$$\leqslant \varepsilon_\gamma \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\gamma w|^{p_\gamma}\,dxdt + C_4[\delta\varepsilon_\gamma]^{-\frac{2}{p_\gamma-2}} + 2\hat{K}\cdot|\Omega| \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta\,dxdt +$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m} \varepsilon_\alpha \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\alpha w|^{p_\alpha}\theta\,dxdt + \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \varepsilon_\alpha{}^{-\frac{1}{p_\alpha-1}} \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |f_\alpha - \tilde{f}_\alpha|^{p'_\alpha}\theta\,dxdt.$$

Врахувавши, що $s \in [t_1, t_2]$, і прийнявши $\varepsilon_\alpha = K_\alpha$, коли $\alpha \neq \gamma$ і $K_\alpha > 0$ ($|\alpha| \leqslant |m|$), та $\varepsilon_\gamma = K_\gamma/2$, з (2.13) одержимо (2.6) з $C_1 = C_4$, $C_2 = \max\limits_{\alpha} C_\alpha \varepsilon_\alpha{}^{-\frac{1}{p_\alpha-1}}$. Лему доведено.

Доведення теореми 2.1. Єдиність розв'язку задачі (2.1),(2.2) доводиться аналогічно як в [7], використовуючи лему.

Існування. Побудуємо послідовність функцій, які в певному сенсі апроксимують узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2). Нехай $Q_\mu = \Omega \times (T-\mu, T)$, $\Sigma_\mu = \partial\Omega \times (T-\mu, T)$, де $\mu \in \mathbb{N}$. Розглянемо сім'ю початково-граничних задач ($\mu \in \mathbb{N}$)

$$\hat{u}_{\mu t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta\hat{u}_\mu) + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\hat{u}_\mu(y,t)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q_\mu, \tag{2.1_μ}$$

$$\left.\frac{\partial^j \hat{u}_\mu}{\partial \nu^j}\right|_{\Sigma} = 0 \qquad (j = 0,1,\dots,m-1), \tag{2.2_μ}$$

$$\hat{u}_\mu(x, T-\mu) = 0. \tag{2.3_μ}$$

Функція $\hat{u}_\mu(x,t) \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_\mu) \cap C([T-\mu,T]; L_2(\Omega))$ *називається узагальненим розв'язком задачі* (2.1_μ)-(2.3_μ), *якщо вона справджує умову* (2.3_μ) *та інтегральну рівність*

$$\iint\limits_{Q_\mu} \Bigg\{-\hat{u}_\mu\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta\hat{u}_\mu)D^\alpha\psi +$$

$$+\left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\hat{u}_\mu(y,t)\,dy\right)\psi\Bigg\}\,dxdt = \iint\limits_{Q_\mu} \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi\,dxdt \tag{2.4_μ}$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(\overline{Q_\mu})$.

Існування єдиного узагальненого розв'язку $\hat{u}_\mu$ задачі (2.1_μ) – (2.3_μ) доведено в §1. Продовжимо функцію $\hat{u}_\mu$ нулем на $\overline{Q} \setminus \overline{Q}_\mu$ і позначимо це продовження через u_μ. Приймемо, що $f_{\alpha,\mu}(x,t) = f_\alpha(x,t)$ для $(x,t) \in Q_\mu$ і $f_{\alpha,\mu}(x,t) = 0$ для

$(x,t) \in Q \setminus Q_\mu$ ($|\alpha| \leqslant m, \mu \in \mathbb{N}$). Очевидно, що u_μ – узагальнений розв'язок задачі Фур'є

$$u_{\mu t} + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u_\mu) +$$

$$+ \int_\Omega K(x,y,t) u_\mu(y,t)\, dy = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_{\alpha,\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (2.5_\mu)$$

$$\left. \frac{\partial^j u_\mu}{\partial \nu^j} \right|_\Sigma = 0 \qquad (j = 0,1,\ldots,m-1), \qquad (2.6_\mu)$$

тобто u_μ належить простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q) \subset \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(Q)$ і справджує тотожність

$$\iint_Q \left\{ -u_\mu \psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u_\mu) D^\alpha \psi + \right.$$

$$\left. + \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_\mu(y,t)\, dy \right) \psi - \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_{\alpha,\mu}(x,t) D^\alpha \psi \right\} dxdt = 0 \qquad (2.7_\mu)$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Аналогічно як в [7] можна показати, що існує підпослідовність $\{u_{\mu_i}\}$ послідовності $\{u_\mu\}$ і функція $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$ такі, що

$$u_{\mu_i} \to u \quad \text{в} \quad C((-\infty,T]; L_2(\Omega)), \qquad (2.14)$$

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u_{\mu_i}(\cdot,\cdot)) \to a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u(\cdot,\cdot)) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \quad (|\alpha| \leqslant m). \qquad (2.15)$$

З (2.14) випливає, що

$$\iint_Q \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_{\mu_i}(y,t)\, dy \right) \psi\, dxdt \to \iint_Q \left(\int_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi\, dxdt \qquad (2.16)$$

при $i \to +\infty$ для будь-якої функції $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2). Нехай $\psi \in C_0^\infty(Q)$ – довільна фіксована функція. З (2.7_μ) отримаємо

$$\iint_Q \left\{ -u_{\mu_i} \psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u_{\mu_i}) D^\alpha \psi + \right.$$

$$\left. + \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_{\mu_i}(y,t)\, dy \right) \psi \right\} dxdt = \iint_Q \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_{\alpha,\mu_i} D^\alpha \psi\, dxdt. \qquad (2.17)$$

Перейдемо до границі при $i \to +\infty$ в (2.17), взявши до уваги (2.14)-(2.16) і означення функцій f_{α,μ_i} ($|\alpha| \leqslant m$, $i \geqslant 1$). Отримаємо тотожність (2.3).

Неперервна залежність від вихідних даних доводиться аналогічно як в [7], використовуючи лему. Теорему доведено.

---

1. *Londen S.-O.* On a quasilinear parabolic integro-differential equations //Differential Integral Equations. – 1995. –Vol. 8. – N 2.– P.59-68.
2. *Szarski J.* Uniqueness of solutions of a mixed problem for parabolic differential-functional equations// Ann. Polon. Math. – 1973. – Vol. 5. – N 2.– P.105-126.
3. *Ugovski H.* On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments//Demonstr. Math.– 1973.– Vol. 5. – N 3.– P.143-169.
4. *Ugovski H.* On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments in unbounded domains // Demonstr. Math.– 1973.– Vol. 5. – N 3.– P.143-169.
5. *Bokalo M.M,, Dmytriv V.M.* A Fourier problem for quasi-linear parabolic equations of arbitrary order in noncylindric domains// Математ. студії. – 2000. – Т.14. – N 2. – С.175-188.
6. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений// Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С.3-44.
7. *Bokalo M.M., Sikorsky V.M.* The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces// Математ. студії. – 1997. – Т.8. – N 1. – С.53-70.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

THE BOUNDARY VALUE PROBLRMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN UNISOTROPIC SPACES

M. Bokalo, V. Dmytriv

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The well-poseness of the Initial Boundary value problem and the Fourier problem have been established. The differential part of these equations is a quasi-linear parabolic operator with different powers of non-linearities by different derivatives. In the case of Fourier problem no conditions on the behaviour of a solution and increasing of the data-in at $t \to -\infty$ are required.

Key words: integro-differential equations, boundary value problems.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2000

Прийнята до друку 03.07.2001