ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.102–115

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.102–115

УДК 517.95

ПАРАБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; V – замкнений підпростір: $\overset{o}{H}{}^m(\vee) \subset V \subset H^m(\vee)$, $m \in N$, K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент.

Досліджено таку задачу: для заданих еліптичних операторів $A_1(t)$, $A_2(t)$, $t \in (0,T)$ порядку $2l$ і $2m$ відповідно ($l \in N$, $1 \leqslant l < m$), та функцій $f \in H^1((0,T); L^2(\vee))$, $u_0 \in V$, $u_1 \in K$ знайти таку функцію u, що $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $u_t(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$, u, $u_t \in L^\infty((0,T); V)$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T); L^2(\vee)) \cap L^2((0,T); H^l(\vee))$, $l \in N$,

$$\int_0^\tau \langle u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - f(t), v(t) - u_t(t)\rangle dt \geqslant 0$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, та всіх $v \in L^2((0,T); V)$, $v(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі, який є границею послідовності розв'язків допоміжних задач для операторних рівнянь зі штрафом.

Ключові слова: параболічні варіацінi нерівності.

Дослідженню еволюційних варіаційних нерівностей присвячено чимало праць (див. [1 - 4] та наведені там посилання). Параболічні варіаційні нерівності з першою похідною за часом у класах обмежених, періодичних та майже періодичних функцій вивчено в [1 – 3]. Багато важливих прикладних задач описано математичними моделями у вигляді варіаційних нерівностей. Для прикладу можна навести таку задачу: в області $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset R^n$ знайти розв'язок рівняння $u_t - \Delta u = f$, який задовольняє умови $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $u \geqslant 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$, $u\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$. Узагальнений розв'язок такої задачі задовольняє певну інтегральну нерівність, яку і називають варіаційною (див., наприклад, [1]).

Варіаційні нерівності з другою похідною за часовою змінною розглянуто в [1, 2]. Зокрема, досліджено гіперболічні варіаційні нерівності.

У цій праці вивчено певну еволюційну варіаційну нерівність, частинним випадком якої є параболічна варіаційна нерівність вищого порядку з другою похідною за часом. Одержано певні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку нерівності. Доведення існування розв'язку цієї задачі виконаємо методом штрафу, який детально описано в [2]. Згідно з цим методом розв'язок варіаційної нерівності наближають розв'язками певних еволюційних операторних рівнянь зі штрафом. Наведено приклад варіаційної нерівності зі сталими коефіцієнтами, яка задовольняє умови доведеної теореми, а також два приклади крайових задач, які є наслідком дослідженої варіаційної нерівності.

Розглянемо нашу задачу. Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$.

Нехай V – замкнений підпростір: $\overset{o}{H}{}^m(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m(\Omega)$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення, $m \in N$, K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент.

Норму банахового простору B позначатимемо $||\cdot;B||$. Спряжений простір до B позначимо через B^*, а скалярний добуток між V^* і V через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Аналогічно як в [5, с.145] розглядатимемо функцію $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q$ як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t) = u(\cdot,t)$.

Дамо означення розв'язку варіаційної нерівності, яку досліджуватимемо.

Означення. Функцію u,

$$u,\ u_t \in L^\infty((0,T);V),\ u_{tt} \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^l(\Omega)),\ l \in N,$$

$u_t(t) \in K$ для майже усіх $t \in (0,T)$ називають розв'язком варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[u_{tt}(v-u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta(v-u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t D^\beta(v-u_t) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u(v-u_t) +$$
$$+ \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha(x,t)D^\alpha u_t(v-u_t) - f(x,t)(v-u_t)\Bigg]dxdt \geqslant 0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u(0) = u_0, \qquad (2)$$

$$u_t(0) = u_1, \qquad (3)$$

якщо вона задовольняє (2), (3) і (1) для всіх $\tau \in (0,T]$ та всіх $v \in L^2((0,T);V)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Зауваження 1. Параболічному випадку відповідає умова $m = 2l$. Проте будемо від чисел m і l вимагати лише виконання умови $m > l \geqslant 1$. Зауважимо, що термін "параболічна нерівність" ми, аналогічно як і в [2], використовуємо тільки для найзагальніших вказівок на характер задачі.

Зауваження 2. З вибору простору V маємо $V \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, де символ $\hookrightarrow\hookrightarrow$ означає неперервне та щільне вкладення. Тому, ототожнивши $L^2(\Omega)$ зі спряженим до нього простором, ми можемо ототожнити його з деяким підпростором простору V^*. Тоді $V \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow V^*$.

Зауваження 3. Простори

$$Z_1^k = \left\{ u : \Omega \to R \ : \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^2\Bigg]dx < +\infty \right\},$$

$$Z_2^k = \left\{ u : \Omega \to R \ : \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u(x)|^2 dx < +\infty \right\},\ k \in N$$

загалом не збігаються. За умови $\partial\Omega \subset C^1$ маємо $Z_1^k = Z_2^k$ ([6, с. 27]). Тому існує стала S^k залежна від Ω, k, n така, що $\|\cdot; Z_1^k\|^2 \geqslant S^k\|\cdot; Z_2^k\|^2$.

Далі вимагатимемо, щоб коефіцієнти нерівності (1) задовольняли такі умови:

(A) : $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta t}$, $a_{\alpha\beta tt} \in L^\infty(Q)$, $(1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m)$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant a_0 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2, \; a_0 = \text{const} > 0;$$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m-1} |a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta| \leqslant a_1 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |\eta_\alpha|^2, \; a_1 = \text{const},$$

для всіх наборів $\xi_\alpha \in R\,(|\alpha| = m)$, $\eta_\alpha \in R\,(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1)$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(B) : $b_{\alpha\beta}(x,t) = b_{\beta\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q)$, $(1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l)$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=l} b_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant b_0 \sum_{|\alpha|=l} |\xi_\alpha|^2, \; b_0 = \text{const} > 0,$$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l-1} |b_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta| \leqslant b_1 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l-1} |\eta_\alpha|^2, \; b_1 = \text{const},$$

для всіх наборів $\xi_\alpha \in R\,(|\alpha| = l), \eta_\alpha \in R\,(1 \leqslant |\alpha| \leqslant l-1)$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(C) : $c_\alpha, c_{\alpha t} \in L^\infty(Q)\,(0 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$; $c_0(x,t) \geqslant \tilde{c_0} > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(F) : $f, f_t \in L^2(Q)$.

(H) : $h_\alpha, h_{\alpha t} \in L^\infty(Q)\,(0 \leqslant |\alpha| \leqslant l)$, $h_0(x,t) \geqslant \tilde{h_0} > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(U) : $u_0 \in V$, $u_1 \in K$.

Позначимо для зручності $\alpha_0 = \min\{a_0, \tilde{c_0}\}$, $\beta_0 = \min\{b_0, \tilde{h_0}\}$.

Визначимо сім'ї операторів $A_1(t), A_2(t) : V \to V^*$, $t \in (0,T)$ так:

$$\langle A_1(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta v + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha(x,t)D^\alpha u v\Bigg]dx,$$

$$\langle A_2(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta v + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u v\Bigg]dx,$$

де $u, v \in V$.

Зауваження 4. При виконанні умов **(A)**, **(B)** з зауваження 3 випливають такі оцінки:

$$\int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u(x)D^\beta u(x) + c_0(x,t)|u(x)|^2\Bigg]dx \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^2\Bigg]dx - a_1 \int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |D^\alpha u(x)|^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant (\alpha_0 S^m - a_1) \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x)|^2 dx, \; u \in H^m(\Omega);$$

$$\int_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha v(x)D^\beta v(x) + h_0(x,t)|v(x)|^2 \Big] dx \geqslant$$
$$\geqslant (\beta_0 S^l - b_1) \int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha v(x)|^2 dx, \;\; v \in H^l(\Omega), \;\; t \in (0,T).$$

Зауваження 5. З нашого означення та з зауваження 2 випливає, що розв'язок задачі (1) – (3) та його похідна за t належать до простору $C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A)-(U)**, $\alpha_0 S^m - a_1 > 0$, $\beta_0 S^l - b_1 > 0$, $A_1(0)u_1 + A_2(0)u_0 \in L^2(\Omega)$ *і виконується одна з умов: 1)* $u_1 \equiv 0$, *2)* $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, *де* $\operatorname{int} K$ *– внутрішність множини* K. *Тоді задача (1) – (3) має єдиний розв'язок.*

Доведення. (Єдиність). Нехай існує два розв'язки u^1, u^2 задачі (1) – (3). Тоді для довільного $\tau \in (0,T]$ та всіх $v \in L^2((0,T);V)$, $v_t \in L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$ виконується нерівність

$$\int_0^\tau \langle v_t(t) + A_1(t)u_t^i(t) + A_2(t)u^i(t) - f(t), v(t) - u_t^i(t)\rangle dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int_\Omega |v(x,\tau) - u_t^i(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |v(x,0) - u_1(x)|^2 dx, \;\; i = 1,2.$$

Візьмемо $v = (u_t^1 + u_t^2)/2$, тобто $v - u_t^1 = (u_t^2 - u_t^1)/2$, $v - u_t^2 = (u_t^1 - u_t^2)/2$. Оскільки K – опукла множина, $u_t^1(t), u_t^2(t) \in K$, то вибрана функція $v(t)$ належить до K як середина "відрізка" $[u_t^1(t), u_t^2(t)]$. Додавши дві останні нерівності та позначивши $u = u^1 - u^2$, з умови (3) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,\tau)|^2 dx + \int_0^\tau \langle A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t), u_t(t)\rangle dt \leqslant 0. \tag{4}$$

З вибору функції u випливає, що $D^\alpha u(x,0) = 0$. Тому з зауваження 4 одержимо

$$\int_0^\tau \langle A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t), u_t(t)\rangle dt = \int_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u_t +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t D^\beta u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u u_t + c_0 u u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t u_t +$$
$$+ h_0|u_t|^2 \Big] dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta u + c_0|u|^2 \Big] dx \Big|_{t=\tau} +$$
$$+ \int_{Q_{0,\tau}} \Big[-\frac{1}{2} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u D^\beta u + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t D^\beta u_t +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u u_t - \frac{1}{2} c_{0t}|u|^2 + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t u_t + h_0|u_t|^2 \Big] dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(\alpha_0 S^m - a_1) \int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x,\tau)|^2 dx +$$

$$+(\beta_0 S^l - b_1 - \varkappa_1) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u_t|^2 dxdt - C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|^2 + |u_t|^2 \right] dxdt.$$

Позначимо $z(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} [\sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2] dxdt$. Вибравши $\varkappa_1 > 0$ досить малим, з останньої оцінки та з (4) отримаємо $z'(\tau) - C_2 z(\tau) \leqslant 0$. Тому з леми 1.1 [7, с.152] випливає, що $z(\tau) \leqslant 0$. Але $z(t) \geqslant 0$ при $t \in [0,T]$. Отже, $z(t) = 0$ при $t \in [0,T]$ і тому $u(x,t) = 0$ майже скрізь в Q.

(Існування). Нехай $B : V \to V^*$ – оператор штрафа, $B(u) = J(u - P_K(u))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_K – оператор проектування на K. Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і семінеперервним оператором ([2], с. 384). Розглянемо задачу зі штрафом

$$u_{tt}^k(t) + A_1(t)u_t^k(t) + A_2(t)u^k(t) + kB(u_t^k(t)) = f(t), \ \ t \in (0,T) \tag{5}$$

$$u^k(0) = u_0, \ \ u_t^k(0) = u_1, \ \ k \in N. \tag{6}$$

Розв'язок цієї задачі шукатимемо методом Фаедо - Гальоркіна. Нехай $\{w^\mu\}_{\mu\in N}$ – база простору V, $u^{k,m}(x,t) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^{k,m}(t) w^\mu(x)$, $(x,t) \in Q$, де функції $\varphi_1^{k,m}(t), \dots, \varphi_m^{k,m}(t)$ шукаємо як розв'язки задач

$$\langle u_{tt}^{k,m}(t), w^\mu\rangle + \langle A_1(t)u_t^{k,m}(t) + A_2(t)u^{k,m}(t) + kBu^{k,m}(t), w^\mu\rangle = \langle f(t), w^\mu\rangle, \tag{7}$$

$$\varphi_\mu^{k,m}(0) = \alpha_\mu^m, \ \varphi_{\mu t}^{k,m}(0) = \beta_\mu^m, \ \ 1 \leqslant \mu \leqslant m, \tag{8}$$

де $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu^m w^\mu \to u_0$, $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \to u_1$ сильно в V при $m \to \infty$, $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \in K$. Зауважимо, що такі β_μ^m існують. Якщо $u_1 \equiv 0$, то це очевидно. Нехай $u_1 \not\equiv 0$, $u_1 \in \operatorname{int} K$. Тоді існує окіл U точки u_1 такий, що $U \subset \operatorname{int} K$. Оскільки функція $u_1 \in V$, то її можна наблизити лінійними комбінаціями елементів $\{w^j\}_{j\in N}$. Починаючи з деякого номера, елементи цієї послідовності належатимуть до $U \subset K$. Якщо $u_1 \in \partial K$, то з того, що K – опукла множина, випливає, що функцію u_1 можна наблизити послідовністю $\{\tilde{u}_j\}_{j\in N} \subset \{0\} \cup \operatorname{int} K$. Кожну функцію $\tilde{u}_j$ можна наблизити лінійними комбінаціями функцій з $\{w_\mu\}_{\mu\in N}$. Тому сталі β_μ^m можна вибрати так, щоб $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \in K$.

Запишемо (7) у вигляді

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\mu tt}^{k,m}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} = \Bigg\langle f(t) - A_1(t)\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{it}^{k,m}(t) w^i\right) -$$

$$-A_2(t)\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^{k,m}(t) w^i\right) - B\left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{it}^{k,m}(t) w^i\right), w^\mu \Bigg\rangle \equiv G_\mu(t, \vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\varphi}_t^{k,m}(t)), \tag{9}$$

де $\vec{\varphi}^{k,m}(t) = \operatorname{colon}(\varphi_1^{k,m}(t), \dots, \varphi_m^{k,m}(t))$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$. З лінійної незалежності системи $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в V маємо, що матриця $[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]$ невироджена $(\det[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}] \neq 0)$. Тому система (9) може бути записана у вигляді

$$\vec{\varphi}_{tt}^{k,m}(t) = [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1} \vec{G}(t, \vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\varphi}_t^{k,m}(t)). \tag{10}$$

Нехай $\vec{\chi}^{k,m}(t) = \vec{\varphi}_t^{k,m}(t)$, $\vec{z}^{k,m}(t) = \text{colon}(\vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\chi}^{k,m}(t))$,

$$\vec{H}^{k,m}(t, \vec{z}^{k,m}(t)) = \text{colon}(\vec{\chi}^{k,m}(t), [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1}\vec{G}(t, \vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\chi}^{k,m}(t))).$$

Тоді задача (10), (8) рівносильна такій задачі Коші:

$$\vec{z}_t^{k,m}(t) = \vec{H}^{k,m}(t, \vec{z}^{k,m}(t)), \tag{11}$$

$$\vec{z}^{k,m}(0) = \text{colon } (\alpha_1^m, \dots, \alpha_m^m, \beta_1^m, \dots, \beta_m^m). \tag{12}$$

З семінеперервності операторів $A_1(t)$, $A_2(t)$, B випливає, що функція $\vec{H}^{k,m}(t, \vec{y})$, $\vec{y} \in R^{2m}$ є неперервною за $\vec{y}$ для майже всіх $t \in (0, T)$. З теореми Фубіні отримуємо, що вона також є вимірною за t при кожному фіксованому $\vec{y}$. Крім того, для кожного $l > 0$ виконується нерівність $|\vec{H}(t, \vec{y})| \leqslant m(t)$, де $m \in L^1(0, T)$ для всіх $\vec{y} : |\vec{y}| \leqslant l$. Тому з теореми Каратеодорі [8, с. 54] на деякому інтервалі $[0, t_0]$ існує абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (11), (12). Тобто існує $\vec{\varphi}^{k,m} \in [C^1([0, t_0])]^m$, де $\vec{\varphi}_t^{k,m}$ – абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (10), (8). З апріорних оцінок, які одержано нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$.

Помножимо (7) на $\varphi_{\mu t}^{k,m}(t)$, підсумуємо за μ та зінтегруємо за t по відрізку $[0, \tau]$ $(0 < \tau \leqslant t_0)$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[u_{tt}^{k,m} u_t^{k,m} + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} +$$
$$+ \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k,m} u_t^{k,m} + \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_t^{k,m} \Bigg] dxdt +$$
$$+ k \int\limits_0^\tau \langle B u_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t) \rangle dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f u_t^{k,m} dxdt.$$

Зробивши перетворення такі, як при доведенні єдиності розв'язку задачі (1) – (3), одержимо оцінку

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Bigg[(\alpha_0 S^m - a_1) \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}|^2 + |u_t^{k,m}|^2 \Bigg] dx \Bigg|_{t=\tau} + (\beta_0 S^l - b_1 - \varkappa_1) \times$$
$$\times \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} |D^\alpha u_t^{k,m}|^2 dxdt - C_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}|^2 + |u_t^{k,m}|^2 \Bigg] dxdt +$$
$$+ k \int\limits_0^\tau \langle B u_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t) \rangle dt \leqslant C_4. \tag{13}$$

Вибираючи $\varkappa_1 > 0$ досить малим та використовуючи монотонність оператора B та лему 1.1 [7, с.152], отримаємо оцінки

$$\int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}(x, \tau)|^2 + |u_t^{k,m}(x, \tau)|^2 \Bigg] dx \leqslant C_5,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}(x,t)|^2 + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u_t^{k,m}(x,t)|^2 \Big] dxdt \leqslant C_5,$$

$$\int\limits_0^\tau \langle Bu_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt \leqslant \frac{1}{k} C_5, \tag{14}$$

де стала C_5 не залежить від k, m.

Продиференціюємо (7) за t, домножимо на $\varphi_{\mu tt}^{k,m}(t)$, підсумуємо за μ та зінтегруємо за t по відрізку $[0,\tau]$ $(0<\tau\leqslant t_0)$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{ttt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_{tt}^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_{\alpha t} D^\alpha u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + c_{0t} u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + c_0 u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_{\alpha t} D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + h_{0t} u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ h_0 u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} \Big] dxdt + k \int\limits_0^\tau \langle (Bu_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f_t u_{tt}^{k,m} dxdt.$$

Оскільки $u_t^{k,m}(0) \in K$, то з (5), (6) отримаємо $u_{tt}^{k,m}(0) = f(0) - A_1(0)u_t^{k,m}(0) - A_2(0)u^{k,m}(0) - kB(u_t^{k,m}(0)) = f(0) - A_1(0)u_t^{k,m}(0) - A_2(0)u^{k,m}(0) \in L^2(\Omega)$. Розглянемо інтеграли

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{ttt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{tt}^{k,m}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{tt}^{k,m}(x,0)|^2 dx,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} dxdt =$$
$$= \int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} -$$
$$- \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta tt} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}) dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} dxdt =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} c_0 u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c_0 |u_t^{k,m}|^2 dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} c_{0t}|u_t^{k,m}|^2 dxdt.$$

Враховуючи ці перетворення, отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big[|u_{tt}^{k,m}|^2 + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + c_0|u_t^{k,m}|^2 +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}\Big] dx\Big|_{t=\tau} +$$
$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[-3\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} - 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta tt} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_{tt}^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_{\alpha t} D^\alpha u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2c_{0t} u^{k,m} u_{tt}^{k,m} - c_{0t}|u_t^{k,m}|^2 +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_{\alpha t} D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2h_{0t} u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+2h_0|u_{tt}^{k,m}|^2\Big] dxdt + 2k\int\limits_0^\tau \langle (Bu_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt = 2\int\limits_{Q_{0,\tau}} f_t u_{tt}^{k,m} dxdt + \int\limits_{\Omega}\Big[|u_{tt}^{k,m}|^2 +$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}\Big] dx\Big|_{t=0}.$$

З [2, с. 419] одержуємо оцінку $\int\limits_0^\tau \langle (Bu_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt \geqslant 0$. З останньої рівності та (14) випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega}\Big[|u_{tt}^{k,m}|^2 + (\alpha_0 S^m - a_1 - \varkappa_2)\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u_t^{k,m}|^2\Big] dx\Big|_{t=\tau} + (2\beta_0 S^l - 2b_1 - \varkappa_3)\times$$
$$\times\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha u_{tt}^{k,m}|^2 dxdt - C_6\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u_t^{k,m}|^2 + |u_{tt}^{k,m}|^2\Big] dxdt \leqslant C_7.$$

Вибравши $\varkappa_2, \varkappa_3 > 0$ – досить малими, застосувавши лему 1.1 [7, с.152] та оцінки (14), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(|D^\alpha u^{k,m}(x,\tau)|^2 + |D^\alpha u_t^{k,m}(x,\tau)|^2) + |u_{tt}^{k,m}(x,\tau)|^2\Big] dx \leqslant C_8,$$
$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(|D^\alpha u^{k,m}(x,t)|^2 + |D^\alpha u_t^{k,m}(x,t)|^2) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha u_{tt}^{k,m}(x,t)|^2\Big] dxdt \leqslant C_8,$$
$$\int\limits_0^\tau \langle Bu_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt \leqslant \frac{1}{k} C_8,\quad \tau\in(0,t_0], \tag{15}$$

де стала C_8 не залежить від k, m. З оцінки (15_1) випливає, що розв'язок задачі (10), (8) можна продовжити на весь інтервал $[0, T]$, і оцінки (15) можна отримати для $t_0 = T$. Оцінки (15) гарантують існування підпослідовності $\{u^{k,m_i}\} \subset \{u^{k,m}\}$ такої, що

$$u^{k,m_i} \to u^k,\ u_t^{k,m_i} \to u_t^k\ * - \text{ слабко в } L^\infty((0,T);V),$$
$$u_{tt}^{k,m_i} \to u_{tt}^k\ * - \text{ слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),$$
$$u^{k,m_i} \to u^k,\ u_t^{k,m_i} \to u_t^k\ - \text{ слабко в } L^2((0,T);V),$$
$$u_{tt}^{k,m_i} \to u_{tt}^k\ - \text{ слабко в } L^2((0,T);H^l(\Omega)),$$

при $i \to \infty$. З одержаних збіжностей випливає, що можемо перейти до границі зразу в (7) і отримати, що функція u^k задовольняє (5) в сенсі простору $D^*((0,T);V^*)$.

Отже, ми одержали послідовність $\{u^k\}_{k\in N}$ розв'язків задач (5), (6). Для цих функцій виконуються оцінки (15). Тому існує підпослідовність $\{u^{k_i}\} \subset \{u^k\}$ така, що $u^{k_i} \to u$, $u_t^{k_i} \to u_t$ $*$ – слабко в $L^\infty((0,T);V)$, $u_{tt}^{k_i} \to u_{tt}$ $*$– слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, $u^{k_i} \to u$, $u_t^{k_i} \to u_t$ – слабко в $L^2((0,T);V)$, $u_{tt}^{k_i} \to u_{tt}$ – слабко в $L^2((0,T);H^l(\Omega))$, при $i \to \infty$. З [2, с.70] випливає, що $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ сильно в $L^2((0,T);Z_1^{m-1})$, $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ сильно в $L^2((0,T);Z_1^l)$.

Нехай $v \in L^2((0,T);V)$, $v_t \in L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Оскільки $Bv(t) = 0$, то з монотонності оператора B одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[v_t(v - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u^{k_i} D^\beta (v - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta (v - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i} (v - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i} (v - u_t^{k_i}) - f(v - u_t^{k_i}) \Bigg] dxdt =$$
$$= k_i \int\limits_0^\tau \langle Bv(t) - Bu^{k_i}(t), v(t) - u^{k_i}(t)\rangle dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,\tau) - u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,0) - u_1(x)|^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,\tau) - u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,0) - u_1(x)|^2 dx \tag{16}$$

для довільного $\tau \in (0,T]$.

З (5) та оцінок (15) випливає, що для довільного $v \in L^2((0,T);V)$

$$\int\limits_0^T \langle Bu_t^{k_i}(t), v(t)\rangle dt = \frac{1}{k_i}\int\limits_0^T \langle f(t) - u_{tt}^{k_i}(t) - A_1(t) u_t^{k_i}(t) -$$
$$- A_2(t) u^{k_i}(t), v(t)\rangle dt \leqslant \frac{C_9}{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

де стала C_9 не залежить від k. Тому з монотонності оператора B, оцінки (15_3) та отриманих нами збіжностей одержимо

$$0 \leqslant \int_0^T \langle Bu_t^{k_i}(t) - Bv(t), u_t^{k_i}(t) - v(t)\rangle dt \xrightarrow[i\to\infty]{} -\int_0^T \langle Bv(t), u_t(t) - v(t)\rangle dt.$$

Візьмемо $v = u_t - \lambda w$, де $w \in L^2((0,T);V)$, $\lambda > 0$. Тоді

$$-\lambda \int_0^T \langle B(u_t(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \geqslant 0.$$

З семінеперервності оператора B отримаємо

$$0 \leqslant -\int_0^T \langle B(u_t(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \xrightarrow[\lambda\to+0]{} \int_0^T \langle Bu_t(t), w(t)\rangle dt$$

для довільного $w \in L^2((0,T);V)$. Отже, $Bu_t(t) = 0$ і $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Тому можемо в (16) взяти $v = u_t$. Перетворимо ліву частину отриманої нерівності так:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta}D^\alpha u - a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i}))D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+(c_0 u - c_0(u - u^{k_i}))(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) - f(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt =$$
$$= G_{k_i}(\tau) - \int_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+c_0(u - u^{k_i})(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt = G_{k_i}(\tau) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u - u^{k_i}) + c_0|u - u^{k_i}|^2\Big] dx\Big|_{t=\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u - u^{k_i}) + c_0|u - u^{k_i}|^2\Big] dxdt \leqslant$$
$$\leqslant G_{k_i}(\tau) - \frac{1}{2}(\alpha_0 S^m - a_1)\int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx +$$
$$+C_{10}\int_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u - u^{k_i})|^2 dxdt,$$

де

$$G_{k_i}(\tau) \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ c_0 u(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) - f(u_t - u_t^{k_i}) \Big] dxdt.$$

Тоді нерівність (16) набуде вигляду

$$G_{k_i}(\tau) + C_{10} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_t(x,\tau) -$$
$$- u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx + \frac{1}{2}(\alpha_0 S^m - a_1) \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx.$$

Звідси отримаємо

$$\int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant C_{11} \Big(\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt + G_{k_i}(\tau) \Big). \tag{17}$$

Перепишемо $G_{k_i}(\tau)$ у вигляді

$$G_{k_i}(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) + c_0 u(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) -$$
$$- f(u_t - u_t^{k_i}) \Big] dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) dxdt = I_1 + I_2 + I_3.$$

З слабкої збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2((0,T);V)$ отримаємо $I_1 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. З сильної збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2((0,T);Z_1^l)$ випливає, що $I_2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. З слабкої збіжності $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ в $L^2((0,T);V)$, сильної збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2(Q)$ та леми 5.2 [5, с. 19] одержимо, що $I_3 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Отже, $G_{k_i}(\tau) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ для $\tau \in (0,T]$. Крім того, $|G_{k_i}(\tau)| \leqslant ||u^{k_i}; L^2((0,T);V)|| + ||u_t^{k_i}; L^2((0,T);Z_1^l)|| + ||u - u^{k_i}; L^2((0,T);V)|| \leqslant C_{12}$. Тому з теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла отримаємо, що $\int\limits_0^\tau G_{k_i}(t)dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ при

$\tau \in (0,T]$. Тоді з (17) та леми 1.1 [7, с.152]

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt \leqslant C_{13} \int\limits_0^\tau G_{k_i}(t)dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Отже, $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ сильно в $L^2((0,T);V)$. Аналогічно як (16) одержимо, що функції $\{u^{k_i}\}_{i\in N}$ задовольняють нерівність (1). Спрямувавши $i \to \infty$ отримаємо, що функція u є розв'язком задачі (1) – (3).

Теорема доведена.

Наведемо приклад варіаційної нерівності, для якої виконуються всі умови теореми.

Приклад 1. Нехай у (1) (для спрощення) $m = 2$, $l = 1$, $n = 2$, $f \in H^1((0,T); L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \equiv 0$. Решту коефіцієнтів нерівності (1) виберемо так, щоб

$$\langle A_1(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega [b(u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2}) + huv]dx,$$

$$\langle A_2(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big[u_{x_1x_1}v_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}v_{x_2x_2} + \mu(u_{x_1x_1}v_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}v_{x_1x_1}) + \\ +2(1-\mu)u_{x_1x_2}v_{x_1x_2} + cuv\Big]dx, \quad u, v \in V,$$

де $b, c, h, \mu = \mathrm{const}$, $b, c, h > 0$, $\mu \in (0,1)$.

Очевидно, що в цьому випадку умови нашої теореми виконуються, бо згідно з введеними в теоремі позначеннями $a_0 = 1-\mu$, $b_0 = b$, $a_1 = b_1 = 0$, $\tilde{c}_0 = c$, $\tilde{h}_0 = h$.

За допомогою підбору простору V та множини K ми, аналогічно, як в [2, с. 255] можемо отримати, що розв'язок цієї варіаційної нерівності є розв'язком певної крайової задачі. Проілюструємо це на двох прикладах.

Приклад 2. Нехай виконуються умови попереднього прикладу, $V = H^2(\Omega)$, $K = \{v \in V \mid v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}$. Тоді, використовуючи формулу інтегрування частинами та формулу Гріна [1, с. 202], отримаємо, що розв'язок задачі (1) – (3) є розв'язком такої задачі:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - b\Delta u_t + hu_t + cu = f \text{ майже скрізь в } Q,$$
$$u(0) = u_0, \ u_t(0) = 0, \ u\big|_\Sigma \geqslant 0, \ M\big|_\Sigma(u) = 0,$$
$$\left(F(u) + b\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\bigg|_\Sigma \geqslant 0, \ \left(F(u) + b\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)u\bigg|_\Sigma = 0,$$

де $\Sigma = \Omega \times (0,T)$,

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}, \ \Delta^2 u = u_{x_1x_1x_1x_1} + 2u_{x_1x_1x_2x_2} + u_{x_2x_2x_2x_2},$$
$$F(u) = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial \nu} - (1-\mu)\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\nu_1\nu_2(u_{x_2x_2} - u_{x_1x_1}) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)u_{x_1x_2}\right],$$
$$M(u) = -\Delta u - (1-\mu)(2\nu_1\nu_2 u_{x_1x_2} - \nu_2^2 u_{x_1x_1} - \nu_1^2 u_{x_2x_2}),$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор зовнішньої нормалі, а $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ – вектор дотичний до $\partial\Omega$.

Приклад 3. Нехай виконуються умови прикладу 1, $K = V = \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$. Тоді розв'язок задачі (1) – (3) є розв'язком такої класичної задачі:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - b\Delta u_t + hu_t + cu = f \text{ майже скрізь в } Q,$$
$$u(0) = u_0,\ \ u_t(0) = 0,\ \ u\big|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Sigma = 0.$$

Зауважимо, що аналогічно як в [2, с. 255], можемо отримати як наслідок варіаційної нерівності (1) й інші крайові задачі.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М., 1980.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
3. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – К., 1985.
4. *Friedman A.* Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and applications to stopping time problems// Arch. Rational. Mech. Anal. – 1973. – Vol. 52. –P.134-160.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
6. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Ленинград, 1985.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.
8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN BOUNDED DOMAIN

O. Buhrii

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded domain with the boundary $\partial\Omega \subset C^1$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; V is a closed subspace such the $\overset{o}{H}{}^m(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m(\Omega)$, $m \in N$, K a convex closed subset of V which includes zero. The problem to be studied is: for given eliptic operators $A_1(t)$, $A_2(t)$, $t \in (0,T)$ of order $2l$ and $2m$ respectively ($l \in N$, $1 \leqslant l < m$), for given functions $f \in H^1((0,T); L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$, $u_1 \in K$ find a function u such that $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $u_t(t) \in K$ for almost all $t \in (0,T)$, u,

$u_t \in L^\infty((0,T);V)$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $l \in N$,

$$\int_0^\tau \langle u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - f(t), v(t) - u_t(t)\rangle dt \geqslant 0$$

for all $\tau \in (0,T]$, and for each $v \in L^2((0,T);V)$, $v(t) \in K$ for almost all $t \in (0,T)$.

Under some additional hypotheses the author proves that this problem has a unique solution which is the limit of a sequence of approximating initial-value boundary problems.

Key words: parabolic variational inequality.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2000

Прийнята до друку 03.07.2001