ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.116–125

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.116–125

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Галина ДОМАНСЬКА
Центр математичного моделювання ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України
вул.Дудаєва, 15. 79005 Львів, Україна

Розглянуто мішану задачу для лінійної псевдопараболічної системи з періодичними крайовими умовами в області, яка є $(n+1)$-вимірним паралелепіпедом. Одержано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку.
Ключові слова: лінійні псевдопараболічні системи.

Чимало задач хімії, фізики та механіки описують псевдопараболічними рівняннями [1–4]. Починаючи з 50-х років минулого століття, дослідженню різноманітних задач для рівнянь та систем зазначеного типу присвячено багато праць. У. Ранделл [5] показав, що єдиність розв'язку задачі Коші для псевдопараболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зберігається лише в класі функцій, які зростають як $e^{\alpha|x|}$, де стала α залежить від коефіцієнтів рівняння. Припускають, що права частина та початкові функції зростають на нескінченності не швидше, ніж зазначена експонента. Аналогічні результати отримали і в працях Г.Хількевич [6, 7]. У. Шоуолтер [8], використовуючи метод груп стискуючих операторів, досліджував задачу Коші для абстрактних псевдопараболічних рівнянь.

Розглядаючи функціонально-аналітичне формулювання задач із крайовими і початковими умовами, у монографії [9] псевдопараболічні рівняння зведено до звичайних операторних диференціальних рівнянь, для яких одержано класи коректності.

Для знаходження наближеного розв'язку псевдопараболічного рівняння використовують зокрема метод Гальоркіна [9–11].

У цій праці розглянуто мішану задачу для лінійної псевдопараболічної системи в обмеженій області, яка є $(n+1)$-вимірним паралелепіпедом. Крайові умови вибрано періодичними. Використовуючи метод Гальоркіна, доведено існування узагальненого розв'язку. Одержано також достатні умови єдиності узагальненого розв'язку.

Нехай $\Pi_\nu = \{(x_1, ..., x_n) : |x_i| < \nu, i = \overline{1,n}\}$ $(\nu > 0)$. Розглянемо в області $Q = \Pi_\nu \times (0,T)$ систему рівнянь

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,t)u_{x_i t})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x,t)u_{x_i} + D(x,t)u = F(x,t), \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0 \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$
\begin{aligned}
&u(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\
=&u(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T], \qquad (3)\\
&u_{x_j}(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\
=&u_{x_j}(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i,j \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T], \qquad (4)
\end{aligned}
$$

де A_{ij}, B_{ij}, C_i, D – квадратні матриці розміру $m \times m$; $u = (u_1,...,u_m)^T$, $F = (F_1,...,F_m)^T$. Нехай надалі $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, а $|\cdot|$ – модуль в $\mathbb{R}^m$. Якщо йтиметься про просторову змінну x, то через $|\cdot|$ будемо також позначати і норму в $\mathbb{R}^n$.

Через $W^{k,r}_{\text{per}}(\Pi_\nu)$ ($k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant r \leqslant \infty$) позначатимемо простір вектор-функцій $f = \left(f_1,...,f_m\right)^T$, всі узагальнені похідні яких до порядку k включно належать до простору $L^r(\Pi_\nu)$, а узагальнені похідні до порядку $k-1$ включно задовольняють умови (3).

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) називатимемо функцію u, яка володіє такими властивостями:

1) $u \in H^1\left((0,T); W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu)\right)$;

2) функція u задовольняє умову (2) майже скрізь в Π_ν;

3) функція u задовольняє тотожність

$$
\int\limits_0^T\int\limits_{\Pi_\nu}\left[(u_t,v) + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)u_{x_it},v_{x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i},v_{x_j}\right) + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{i=1}^n \left(C_i(x,t)u_{x_i},v\right) + \left(D(x,t)u,v\right)\right] dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Pi_\nu} \left(F(x,t),v\right) dxdt \qquad (5)
$$

для довільної функції $v \in L^2\left((0,T); W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu)\right)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови:

$$
\begin{aligned}
(A): &\ a_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right) \leqslant a^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2, \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad a^0 = \text{const};\\
&A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t),\ A_{ij}(x,t) = A^T_{ij}(x,t)\ \forall i,j \in \{1,...,n\};\\
&A_{ij}, A_{ijt} \in L^\infty(Q)\ \forall i,j \in \{1,...,n\};\\
(B): &\ b_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right) \leqslant b^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2, \quad b_0 = \text{const} > 0, \quad b^0 = \text{const};\\
&B_{ij} \in L^\infty(Q) \ \ \forall i,j \in \{1,...,n\};\\
(C): &\ C_i \in L^\infty(Q) \ \ \forall i \in \{1,...,n\};\\
(D): &\ d_0|\xi|^2 \leqslant (D(x,t)\xi,\xi) \leqslant d^0|\xi|^2, \quad d_0 = \text{const}, \quad d^0 = \text{const}; \quad D \in L^\infty(Q)
\end{aligned}
$$

для довільних векторів ξ, ξ^i, ξ^j з $\mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ та для майже всіх точок (x,t) з Q.

Для спрощення подальших записів введемо кілька позначень

$$\widehat{A} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \sup_{Q} \|A_{ij}(x,t)\|^2, \quad \widehat{B} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \sup_{Q} \|B_{ij}(x,t)\|^2,$$
$$\widehat{C} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{Q} \|C_i(x,t)\|^2, \quad \widehat{D} = \sup_{Q} \|D(x,t)\|^2.$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A), (B), (C), (D). *Тоді задача (1) - (4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Нехай задача (1) – (4) має два розв'язки u^1 і u^2. Запишемо для кожного з них інтегральну тотожність (5) та віднімемо ці тотожності. Прийнявши, що $u = u^1 - u^2$, $v = (u_t + u)e^{-\mu t}$ $(\mu = \text{const} > 0)$, одержимо

$$\int_0^T \int_{\Pi_\nu} \Bigg[(u_t, (u_t+u)) + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)u_{x_i t}, (u_t+u)_{x_j}\right) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}, (u_t+u)_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^n (C_i(x,t)u_{x_i}, (u_t+u)) +$$
$$+ (D(x,t)u, (u_t+u)) \Bigg] e^{-\mu t} dxdt = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} (F(x,t), (u_t+u))\, e^{-\mu t} dxdt. \tag{6}$$

Оцінимо кожен із доданків рівності (6)

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} (u_t + D(x,t)u, u_t + u)\, e^{-\mu t} dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int_{\Pi_\nu} |u|^2 e^{-\mu T} dx \Bigg|_{t=T} +$$
$$+ \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \left(\frac{\mu}{2} + d_0 - \frac{\widehat{D}}{2}\right)|u|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$

$$I_2 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)u_{x_i t} + B_{ij}(x,t)u_{x_i}, u_{x_j t} + u_{x_j}\right) e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\left(a_0 - \frac{n\varkappa}{2}\right) \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}|^2 + \left(b_0 + \frac{\mu a_0}{2} - \frac{a^1}{2} - \frac{n\widehat{B}}{2\varkappa}\right) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$

$$I_3 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \sum_{i=1}^n (C_i(x,t)u_{x_i}, u_t + u)\, e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$
$$\geqslant - \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\frac{\widehat{C}}{\delta_0} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + \frac{n\delta_0}{2}|u_t|^2 + \frac{n\delta_0}{2}|u|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$

де стала a^1 визначається з умови

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ijt}(x,t)\xi^i,\xi^j\right)\leqslant a^1\sum_{i=1}^{n}|\xi^i|^2\quad\forall\xi^i,\xi^j\in\mathbb{R}^m\quad(i,j\in\{1,...,n\}),$$

δ_0, $\varkappa$ – додатні числа. Виберемо μ, δ_0 та $\varkappa$ такими, щоб виконувалися умови

$$\begin{aligned}a_0&=n\varkappa,\\ \frac{1}{2}-n\delta_0&\geqslant 0,\\ \mu-1+2d_0-\widehat{D}-n\delta_0&\geqslant 0,\\ b_0+\mu a_0-a^1-\frac{n\widehat{B}}{\varkappa}-\frac{2\widehat{C}}{\delta_0}&\geqslant 0,\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}&\varkappa=\frac{a_0}{n},\\ &\mu>\left\{1+\widehat{D}-2d_0,\ \frac{1}{a_0}\left(4n\widehat{C}+a^1+\frac{n^2\widehat{B}}{a_0}-b_0\right),\ 0,\right.\\ &\quad\frac{1}{2}\left(1+\widehat{D}-2d_0+\frac{1}{a_0}\left(a^1+\frac{n^2\widehat{B}}{a_0}-b_0\right)+\right.\\ &\quad\left.\left.+\sqrt{\left(2d_0-1-\widehat{D}+\frac{1}{a_0}\left(a^1+\frac{n^2\widehat{B}}{a_0}-b_0\right)\right)^2+\frac{8n\widehat{C}}{a_0}}\right)\right\},\\ &\quad\frac{2\widehat{C}}{b_0+\mu a_0-a^1-\dfrac{n^2\widehat{B}}{a_0}}<\delta_0<\min\left\{\frac{1}{2n},\ \frac{\mu-1-\widehat{D}+2d_0}{n}\right\}.\end{aligned}$$

З рівності (6) та оцінок інтегралів I_1, I_2, I_3 випливає нерівність

$$\min\left\{\frac{1}{2},a_0,b_0\right\}\int_0^T\int_{\Pi_\nu}\left[|u_t|^2+|u|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_it}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\right]dxdt\leqslant 0,$$

тобто $\|u\|_{H^1(\Pi_\nu\times(0,T))}=0$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A), (B), (C), (D); $F\in L^2(Q)$, $u_0\in W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (4).*

Доведення. Для одержання умов існування розв'язку задачі (1) – (4) розглянемо в Q допоміжну задачу

$$\varepsilon u^\varepsilon_{tt}+u^\varepsilon_t-\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_it}\right)_{x_j}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}C_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i}+D(x,t)u^\varepsilon=F(x,t),\quad\varepsilon>0,\tag{7}$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0, \tag{8}$$

$$u^\varepsilon_t|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon(x_1, ..., x_{i-1}, -\nu, x_{i+1}, ..., x_n, t) = \\ =&u^\varepsilon(x_1, ..., x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, ..., x_n, t) \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon_{x_j}(x_1, ..., x_{i-1}, -\nu, x_{i+1}, ..., x_n, t) = \\ =&u^\varepsilon_{x_j}(x_1, ..., x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, ..., x_n, t) \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{11}$$

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (7) – (11) називатимемо функцію u^ε, яка має такі властивості:

1) $u^\varepsilon \in H^1((0,T); W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu))$; $u^\varepsilon_t \in C([0,T]; L^2(\Pi_\nu))$;

2) функція u^ε задовольняє (7) та рівність

$$\int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[-\varepsilon\,(u^\varepsilon_t, v_t) + (u^\varepsilon_t, v) + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t) u^\varepsilon_{x_i t}, v_{x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t) u^\varepsilon_{x_i}, v_{x_j}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n \left(C_i(x,t) u^\varepsilon_{x_i}, v\right) + \left(D(x,t) u^\varepsilon, v\right) \right] dxdt + \varepsilon \int_{\Pi_\nu} (u^\varepsilon_t, v)\, dx \Bigg|_{t=T} =$$

$$= \int_0^T \int_{\Pi_\nu} (F(x,t), v)\, dxdt \tag{12}$$

для довільної функції v такої, що $v \in L^2\left((0,T); W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu)\right)$, $v_t \in L^2(Q)$.

Зауваження 1. Якщо $u^\varepsilon \in H^1((0,T); W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu))$, то

$$u^\varepsilon_t \in L^2\left((0,T); H^1(\Pi_\nu)\right), \; D(x,t)u^\varepsilon \in H^1\left((0,T); H^1(\Pi_\nu)\right),$$

$$\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t) u^\varepsilon_{x_i t} + B_{ij}(x,t) u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j} \in L^2\left((0,T); H^{-1}(\Pi_\nu)\right),$$

$$\sum_{i=1}^n \left(C_i(x,t) u^\varepsilon_{x_i}\right) \in H^1\left((0,T); L^2(\Pi_\nu)\right).$$

Тоді з (7) випливає, що $u^\varepsilon_{tt} \in L^2\left((0,T); L^2(\Pi_\nu) + H^{-1}(\Pi_\nu)\right)$. Це включення разом з $u^\varepsilon_t \in L^2\left((0,T); H^1(\Pi_\nu)\right)$ свідчить про те, що $u^\varepsilon_t \in C\left([0,T]; L^2(\Pi_\nu)\right)$ [6, с. 20].

Доведемо існування розв'язку задачі (7) – (11) методом Гальоркіна. Нехай $\{\phi^\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ – база в просторі $L^2(\Pi_\nu)$, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$. Приймемо, що $u^{\varepsilon,N} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant N} c^N_\alpha(t) \phi^\alpha(x)$, де коефіцієнти $c^N_\beta(t)$ ($|\beta| \leqslant N$) визначають із задачі

$$\varepsilon \sum_{|\alpha| \leqslant N} \left(c^N_\alpha(t)\right)'' \int_{\Pi_\nu} \left(\phi^\alpha(x), \phi^\beta(x)\right) dx = - \int_{\Pi_\nu} \left[\left(\sum_{|\alpha| \leqslant N} \left(c^N_\alpha(t)\right)' \phi^\alpha(x), \phi^\beta(x) \right) + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t) \sum_{|\alpha| \leqslant N} \left(c^N_\alpha(t)\right)' \phi^\alpha_{x_i}(x) + B_{ij}(x,t) \sum_{|\alpha| \leqslant N} c^N_\alpha(t) \phi^\alpha_{x_i}(x), \phi^\beta_{x_j}(x) \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(t)\phi_{x_i}^\alpha(x),\phi^\beta(x)\right)+ \tag{13}$$

$$+\left(D(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(t)\phi^\alpha(x),\phi^\beta(x)\right)-\left(F(x,t),\phi^\beta(x)\right)\Bigg]\,dx,$$

$$c_\beta^N(0)=\int\limits_{\Pi_\nu}\left(u_0,\phi^\beta\right)dx,\qquad \left(c_\beta^N(0)\right)'=0,\quad (|\beta|\leqslant N). \tag{14}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) є лінійною з неперервними коефіцієнтами, а тому вона має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (14). Доможимо рівність (13) на $\left[\left(c_\beta^N(t)\right)'+c_\beta^N(t)\right]e^{-\mu t}$ $(\mu>0)$, підсумуємо за $|\beta|\leqslant N$ та зінтегруємо по відрізку $[0,t_0]$, $0<t_0\leqslant T$. Результатом зазначених перетворень буде рівність

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\Bigg[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+\left(u_t^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_{x_jt}^{\varepsilon,N}+u_{x_j}^{\varepsilon,N}\right)+ \tag{15}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt.$$

За допомогою оцінок

$$I_4=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{4}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{\mu-2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}-\frac{\varepsilon\mu}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{\mu^2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_5=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_{x_jt}^{\varepsilon,N}+u_{x_j}^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_0}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}-\frac{a^0}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_it}\right|^2+\left(b_0+\frac{\mu a_0}{2}-\frac{a^1}{2}-\frac{n^2\widehat{B}}{2a_0}\right)\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_i}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_6=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(u^{\varepsilon,N}_t+D(x,t)u^{\varepsilon,N},u^{\varepsilon,N}_t+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}-\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{2}\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+\left(d_0+\frac{\mu}{2}-\frac{\widehat{D}}{2}\right)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_7=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u^{\varepsilon,N}_{x_i},u^{\varepsilon,N}_t+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant-\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{\widehat{C}}{\delta_1}\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_i}\right|^2+\frac{n\delta_1}{2}\left(\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right)\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_8=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),u^{\varepsilon,N}_t+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{\delta_1}\left|F(x,t)\right|^2+\frac{\delta_1}{2}\left(\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right)\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

приходимо до нерівності

$$\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left[a_0\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_i}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{2}\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+(\mu-2)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\varepsilon\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+\frac{\varepsilon\mu^2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{(n+1)\delta_1}{2}\right)\left|u^{\varepsilon,N}_t\right|^2+\right.$$

$$+\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_it}\right|^2+\left(b_0+\mu\frac{a_0}{2}-\frac{a^1}{2}-\frac{n^2\widehat{B}}{2a_0}-\frac{\widehat{C}}{\delta_1}\right)\sum_{i=1}^n\left|u^{\varepsilon,N}_{x_i}\right|^2+$$

$$\left.+\left(d_0+\frac{\mu}{2}-\frac{\widehat{D}}{2}-\frac{(n+1)\delta_1}{2}\right)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\frac{\varepsilon\mu}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}|F(x,t)|^2e^{-\mu t}dxdt, \tag{16}$$

де δ_1 та μ – такі додатні числа, що

$$\mu\geqslant 2,$$

$$\frac{1}{2}-(n+1)\delta_1\geqslant 0,$$

$$\mu-1+2d_0-\widehat{D}-(n+1)\delta_1\geqslant 0,$$

$$b_0+\mu a_0-a^1-\frac{n^2\widehat{B}}{a_0}-\frac{2\widehat{C}}{\delta_1}\geqslant 0.$$

Тоді з (16) випливає, що

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}+$$

$$+\min\left\{a_0,b_0,\frac{1}{2}\right\}\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i t}^{\varepsilon,N}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\frac{2C_1(F)}{\delta_1}+\varepsilon\mu\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}, \tag{17}$$

де

$$C_1(F)=\int\limits_0^{T}\int\limits_{\Pi_\nu}|F(x,t)|^2e^{-\mu t}dxdt.$$

Оскільки $u^{\varepsilon,N}\big|_{t=0}=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(0)\phi^\alpha\to u_0$ в $L^2(\Pi_\nu)$ (тобто виконується умова (8)), то

$$\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\varepsilon\mu\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}\leqslant M_0=\text{const},$$

де M_0 не залежить від N.

Отже, з послідовності $\{u^{\varepsilon,N}\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{\varepsilon,N_k}\}$, що $u^{\varepsilon,N_k}\to u^\varepsilon$ слабко в $H^1\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right)$.

Покажемо, що знайдена функція u^ε є узагальненим розв'язком задачі (7) – (11). Домножимо (13) на довільну функцію $d_\beta(t)$, для якої d''_β є абсолютно неперервною функцією, додамо одержані рівності за всіма β такими, що $|\beta|\leqslant N$, а результат зінтегруємо по відрізку $[0,T]$. Матимемо рівність

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\Bigg[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\left(u_t^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},\Phi_{x_j}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon,N},\Phi\right)\Bigg]\,dxdt+\varepsilon\int_{\Pi_\nu}\left(u_t^{\varepsilon,N},\Phi\right)dx\Bigg|_{t=T}=$$
$$=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),\Phi\right)dxdt, \tag{18}$$

де $\Phi=\sum\limits_{|\beta|\leqslant N}d_\beta(t)\phi^\beta(x)$. Позначимо через $\mathbb{M}_N$ множину всіх таких Φ. Сукупність $\bigcup\limits_{p=1}^\infty\mathbb{M}_p$ щільна в просторі $H^1\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right)$. Перейшовши в (18) до границі при фіксованому Φ з $\mathbb{M}_p$, одержимо

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\Bigg[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon},\Phi\right)+\left(u_t^{\varepsilon},\Phi\right)+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon},\Phi_{x_j}\right)+ \tag{19}$$
$$+\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon},\Phi\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon},\Phi\right)\Bigg]\,dxdt=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),\Phi\right)dxdt$$

для всіх $\Phi\in\mathbb{M}_p$. Оскільки $\bigcup\limits_{p=1}^\infty\mathbb{M}_p$ щільна в просторі $H^1\left(\Pi_\nu\times(0,T)\right)$, то тотожність (19) правильна і для всіх Φ із $H^1\left(\Pi_\nu\times(0,T)\right)$, тобто u^ε задовольняє (12). Виконання умови (10) випливає з зображення розв'язку, а тому функція u належить до простору $H^1((0,T);W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu))$.

Легко бачити, що оцінка (17) є правильною і для функції u^ε, тобто $u^\varepsilon\to u$ при $\varepsilon\to+0$ в просторі $H^1(\Pi_\nu\times(0,T))$. Тому в рівності (12) можна перейти до границі при $\varepsilon\to+0$, враховуючи, що

$$\varepsilon\int_{\Pi_\nu}\left(u_t^\varepsilon,v\right)dx\leqslant\varepsilon\left(\int_{\Pi_\nu}\left|u_t^\varepsilon\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\Pi_\nu}|v|^2dx\right)^{\frac12}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon^{\frac43}}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u_t^\varepsilon\right|^2dx+\frac{\varepsilon^{\frac23}}{2}\int_{\Pi_\nu}|v|^2dx\to0,\quad\text{якщо } \varepsilon\to0.$$

Отже, знайдена функція u є узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) в Q. Теорему доведено.

Зауваження 2. *Оскільки граничні умови є періодичними, то при підвищенні гладкості коефіцієнтів системи (1) та початкової функції u_0, можна довести існування розв'язку майже скрізь та класичного розв'язку задачі (1), (2) в смузі* $\mathbb{R}^n\times[0,T]$.

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5.– С. 852–864.
2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. "География и геофизика". – 1948. – Т. 12. – №1. – С. 27–45.
3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М., 1976.
4. *Majchrowski M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equatons and pseudoparabolic equations // Demonstr. math. – 1993. – Vol. 26. – №1. – P. 255–275.
5. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol. 76. – №2. – P. 253–257.
6. *Хилькевич Г.И.* Аналог принципа Сен-Венана, задача Коши и первая краевая задача в неограниченной области для псевдопараболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36. – №3. – С. 229–230.
7. *Хилькевич Г.И.* О поведении решений псевдопараболических уравнений в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности // Дифференциальные уравнения и их приложения. – М., – 1984. – С. 170–175.
8. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations. – Texas: Austin, 1994.
9. *Гаевский Х., Грегèр К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
10. *Ляшко С.І.* Аналог методу Гальоркіна для розв'язання псевдопараболічних рівнянь // Доп. АН УРСР. – 1991. – №8. – С. 54–55.
11. *Ляшко И.И., Ляшко С.И., Томашевская Т.В.* Приближенный метод решения псевдопараболических уравнений // Доп. АН України. – 1994. – №9. – С. 56–58.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR PSEUDOPARABOLIC SYSTEM

G. Domans'ka

Centre of Mathematical Modelling of Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics named after Ya.S.Pidstrygach of Ukrainian NAS
15 Dudayev Str. 79005 Lviv, Ukraine

The initial boundary value problem for linear pseudoparabolic system in $(n+1)$-dimensional parallelepiped is considered. The initial conditions are periodical. Sufficient conditions of existence and uniqueness of generalized solution are obtained.

Key words: linear pseudoparabolic system.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2001

Прийнята до друку 03.07.2001