ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.126–138 Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.126–138

УДК 517.956

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Уляна ЖИДИК, Галина ЛОПУШАНСЬКА
Українська академія друкарства, вул.Підголоско, 19 79020 Львів, Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано умови, при яких регулярний всередині області розв'язок квазілінійного еліптичного рівняння $A(x, D)u = f(x, u, u_x)$ набуває на межі S узагальнених значень $F \in (C^\infty(S))'$.

Ключові слова: узагальнена функція, узагальнені граничні значення, квазілінійні еліптичні рівняння.

На підставі теорем про гомеоморфізми [1] у праці [2] вивчені граничні задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь у шкалі просторів Соболєва. У праці [3] виявлено, що регулярний всередині кулі в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ додатний розв'язок рівняння $\Delta u = u^q$ може набувати на межі кулі узагальнених значень, які є мірами при $q \in (1, 1 + \frac{2}{n-1})$, а при більших q узагальнених граничних значень-мір може не існувати.

У [4] в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ обмеженій замкненою поверхнею S класу C^∞, розглянута в двох еквівалентних формулюваннях задача Діріхле

$$A(x, D)u = f(x, u),\ x \in \Omega \tag{1}$$

$$u_{|S} = F, \tag{2}$$

де $A(x, D) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x)$ – еліптичний диференціальний оператор з гладкими коефіцієнтами, f – неперервна функція, $F \in D'(S) = (C^\infty(S))'$.

Нехай $\varrho(x)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в Ω функція, яка дорівнює нулю на S, а біля S має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega$ до поверхні S;
$m(\Omega) = \{u : \text{існує таке}\, k \geqslant 0, \text{що} \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx < \infty\}$,
$m_k(\Omega) = \{u : ||u|| = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx < \infty\}$,
$M(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m(\Omega)$, $M_k(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m_k(\Omega)$,
$m_{k,C} = \{u \in m_k(\Omega) : \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx \leqslant C\}$, $m_{k,C}$– замкнена підмножина повного метричного простору $m_k(\Omega)$.

Формулювання 1 задачі. Знайти в області Ω розв'язок $u \in M(\Omega)$ рівняння (1), який набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, тобто задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi u dS =< \varphi, F >, \varphi \in D(S), \tag{3}$$

де S_ε – паралельна до S поверхня, розміщена на відстані ε від S, $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x) \in S_\varepsilon$ при $x \in S$, вважаємо $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $< \varphi, F >$ – результат дії узагальненої функції F на основну функцію φ.

У [5] доведено, що розв'язок відповідного (1) лінійного однорідного рівняння, який задовольняє граничну умову (3), належить класу $M(\Omega)$.

Нехай $Bu = B(x, D)u = a_0(x)\frac{\partial u}{\partial N_x} + \beta(x)$, $a_0(x) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x))^2\right]^{1/2}$,

$\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці x, $N_i(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x)}{a_0(x)}$,
$N = (N_1, \ldots, N_n)$ – конормаль для оператора A, $\beta \in C^\infty$,
$\hat{B}u = Bu + \sum\limits_{j=1}^{n} e_i(x)\nu_i(x)$, $e_i(x) = a_i(x) - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}$.

Також використовуватимемо позначення: $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$, $D_0(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D(\overline{\Omega}) : \psi\,|_S = 0\}$, $X(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D_0(\overline{\Omega})$: існує таке $k \geqslant 0$, що $A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x)), x \to x_0 \in S\}$, $X_k(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D_0(\overline{\Omega}) : A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x)), x \to x_0 \in S\}$.

Формулювання 2 задачі. Знайти функцію $u \in m(\Omega)$, яка задовольняє тотожність

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)u(x)dx = \int\limits_\Omega \psi(x)f(x, u(x))dx - < \hat{B}\psi, F >, \psi \in D_0(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

Можна довести, що функція $u \in M_k(\Omega)$ тоді і тільки тоді є розв'язком задачі (1), (2) у формулюванні 1, коли вона задовольняє (4) при довільній $\psi \in X_k(\Omega)$. Звідси випливає необхідна умова розв'язності задачі

$$\int\limits_\Omega \psi(x)f(x, u(x))dx < \infty, \psi \in X_k(\overline{\Omega}), u \in m_k(\Omega). \tag{5}$$

У [4] доведено, що за умови (5) одночасно розв'язок u рівняння (1) класу $M(\Omega)$ та Bu набувають узагальнених граничних значень, а якщо існує неперервна та невід'ємна $\frac{\partial f}{\partial u}$, то задача (1)-(2) має не більше одного розв'язку. Зауважимо, що для єдиності розв'язку задачі достатньо, щоб $a(x) \leqslant 0$, $x \in \Omega$, та функція f була монотонно зростаючою за аргументом u.

Позначимо через $G(x, y)$ функцію Гріна задачі Діріхле для оператора A. Відомо [6], що при умовах

$$a(x) \leqslant 0,\ a(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i(x)}{\partial x_i} \leqslant 0,\ x \in \Omega, \tag{6}$$

функція Гріна існує і єдина. Для деяких операторів A (наприклад, оператора Лапласа)

$$G(x, y) \leqslant 0,\ x, y \in \overline{\Omega}. \tag{7}$$

В [4] показано, що функція $u \in M(\Omega)$, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y,u(y))dy = - < \hat{B}(y,D)G(x,y), F >, x \in \Omega, \tag{8}$$

є розв'язком задачі (1)-(2) в обох формулюваннях.

У цій праці покращуємо визначені в [4] достатні умови розв'язності задачі (1)-(2).

Припускаємо виконаними умови (5) та (6).

Лема 1. *Нехай $\Phi = \Phi(x,u)$ визначена для $x \in \Omega, u \in m_k(\Omega)$, диференційовна за u,*

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|\Phi(x,u(x))|dx < \infty, u \in m_k(\Omega), \tag{9}$$

існують такі сталі m, M, що

$$0 < m \leqslant \Phi_u(x,u(x)) \leqslant M, u \in m_k(\Omega). \tag{10}$$

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння

$$\Phi(x,u) = 0 \tag{11}$$

у просторі $m_k(\Omega)$.

Доведення. Розглянемо оператор $Pu = u - \frac{1}{M+1}\Phi(x,u)$. Із (9) та означення простору $m_k(\Omega)$ одержуємо $\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|Pu(x)|dx < \infty, u \in m_k(\Omega)$, так що $P : m_k \to m_k$. Для $u_1, u_2 \in m_k(\Omega)$ маємо
$||Pu_1 - Pu_2|| = \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|Pu_1(x) - Pu_2(x)|dx =$
$= \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|(u_1(x) - u_2(x)) - \frac{1}{M+1}(\Phi(x,u_1(x)) - \Phi(x,u_2(x)))|dx =$
$= \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|(u_1(x) - u_2(x))(1 - \frac{1}{M+1}\int\limits_0^1 \Phi_u(x, u_2(x) + \theta(u_1(x) - u_2(x)))d\theta)|dx \leqslant$
$\leqslant \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u_1(x) - u_2(x)|dx(1 - \frac{m}{M+1}) = M_1 \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u_1(x) - u_2(x)|dx,$
де $M_1 = \frac{M+1-m}{M+1} < 1$, а отже оператор P стиснений. За теоремою Банаха існує єдиний розв'язок $u \in m_k(\Omega)$ рівняння $Pu = u$, а отже, рівняння (11).

Лема 2. *Нехай $\Phi = \Phi(x,u)$ визначена для $x \in \Omega, u \in m_k(\Omega)$, диференційовна за u, $\Phi(x,u) \geqslant \Phi_1(x,u) + a_0 u$, $a_0 > 0$,*

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u(x))|dx \leqslant C_1, u \in m_{k,C}(\Omega), \tag{9'}$$

і виконується умова (10) для $u \in m_{k,C}(\Omega)$. Тоді рівняння (11) має єдиний розв'язок у просторі $m_{k,C}(\Omega)$ при $C > \frac{C_1}{a_0}$.

Доведення. Розглянемо оператор $Pu = u - \frac{1}{M+N}\Phi(x,u)$, $N > 0$. Оскільки $u - \frac{1}{M+N}\Phi(x,u) \leqslant u - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u) - \frac{a_0}{M+N}u = u(1 - \frac{a_0}{M+N}) - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u)$, то $||Pu|| \leqslant \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u(1 - \frac{a_0}{M+N}) - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u)|dx \leqslant ||u||(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{C_1}{M+N}$. Виберемо N таким, щоб $a_0 < M + N$. Тепер для $u \in m_{k,C}(\Omega)$ маємо $||Pu|| \leqslant C(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{C_1}{M+N}$,

$||Pu|| < C$, якщо $C > \frac{C_1}{a_0}$. Отже, $P : u \in m_{k,C}(\Omega) \to u \in m_{k,C}(\Omega)$ при $C > \frac{C_1}{a_0}$. Як при доведенні леми 1 показуємо, що оператор P стиснений, і застосовуємо теорему Банаха.

Зауваження 1. Твердження леми 2 залишається правильним, якщо умову (9') замінити умовою

$$||\Phi_1|| = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u)|dx \leqslant A + B||u||^\alpha,\ A > 0,\ B > 0, \tag{9"}$$

$$0 < \alpha < 1, \text{ або } \alpha = 1 \text{ та } B < 1, \text{ або } \alpha > 1, \text{ та існує } \min_{0\leqslant s<\infty}(Bs^\alpha - s) \leqslant -A.$$

Справді, тоді $||Pu|| \leqslant ||u||(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{A+B||u||^\alpha}{M+N} \leqslant C(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{A+BC^\alpha}{M+N} < C$ для $u \in m_{k,C}(\Omega)$ при досить великому C.

Зауваження 2. Якщо

$$|\Phi_1(x,u)| \leqslant A + B|u|^q,\ \ x \in \Omega,\ \ u \in m_{k,C}(\Omega),\ A \geqslant 0,\ B > 0,\ q \in (0,1), \tag{9"'}$$

то $||\Phi_1|| \leqslant A_0 + B_0||u||^q$, $A_0, B_0 > 0$.

Справді, $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u)|dx \leqslant \int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx(A+\ +B\int\limits_\Omega \varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{1/s}\varrho^{k-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_0 + B||u||^{1/s}(\int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx)^{(s-1)/s} = A_0 + B_0||u||^q$ при $q = \frac{1}{s}$, де $A_0 = A\int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx$, $B_0 = B(\int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx)^{(s-1)/s}$.

Якщо $A_0 = 0$, то спочатку за нерівністю Гельдера оцінимо $B|u|^q \leqslant \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{|u|^{qr}}{r}$, $r, r' > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Одержуємо $|\Phi_1| \leqslant A_0 + B_0||u||^{qr}$ при $A_0 = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx(A + B^{r'}/r')$, $B_0 = \frac{1}{r}\left(\int\limits_\Omega \varrho^k(x)dx\right)^{(s-1)/s}$, $s = \frac{1}{qr}$. Для $q \in (0,1)$ можна завжди вибрати $s > 1$ $(1 < r < \frac{1}{q})$.

Лема 3. *Для довільного мультиіндексу* α

$$D^\alpha \int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx = O(\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y) + 1),\ y \in \Omega;$$

для довільних точок $y, x_0 \in S, k \geqslant 0$, $|\alpha| \leqslant k$

$$D^\alpha \int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx = O(|y - x_0|^{k+3-n-|\alpha|} + 1).$$

Доведення. Нехай $y \in \Omega$, $v_\alpha(y) = D_y^\alpha \int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx$. Функцію $v_\alpha(y)$ подамо у вигляді суми $v_{1\alpha}(y) + v_{2\alpha}(y) + v_{3\alpha}(y)$ трьох доданків відповідно до розбиття області Ω на $\Omega_1 = \{x \in \Omega : d(x) < \frac{d(y)}{2} < \frac{\varepsilon}{4}\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |x - y| < \frac{d(y)}{2}\}$, $\Omega_3 = \Omega \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. Нехай $\varepsilon > 0$, $h(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leqslant \varepsilon \\ 0, & d(x) > 2\varepsilon \end{cases}$, $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для $x \in \Omega_1$ маємо $|x - y| \geqslant \frac{1}{2}d(y), 1 - h(x) = 0$. Тому $|v_{1\alpha}(y)| = \int\limits_{\Omega_1} \varrho^k(x)D_y^\alpha\big(h(y)G(x,y)\big)dx = \int\limits_{\Omega_1} h(x)\varrho^k(x)D_y^\alpha\big(h(y)G(x,y)\big)dx$. $|h(x)\varphi(x)| \leqslant$

$d^k(x)\varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in C(\overline{\Omega}_1)$. Згідно з [7], для довільного мультиіндексу α $|D^\alpha G(x,y)| = = |\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} G(x,y)| \leqslant C_\alpha(|x-y|^{2-n-|\alpha|}+1)$. Тоді $|v_{1\alpha}(y)| \leqslant C'_{1\alpha}(d^{2-n-|\alpha|}(y)+1)\int\limits_{\Omega_1} d^k(x)\varphi_0(x)dx$; $\int\limits_{\Omega_1} d^k(x)\varphi_0(x)dx \leqslant \int\limits_S dS \int\limits_0^{\frac{1}{2}d(y)} \xi^k d\xi\tilde{\varphi}_0(y) = C'_1 d^{k+1}(y)\tilde{\varphi}_0(y)$. Отже, $|v_{1\alpha}(y)| \leqslant C"_{1\alpha}(d^{k+1+2-n-|a|}(y) + d^{k+1}(y))\tilde{\varphi}_{1\alpha}(y) \leqslant (\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y)+1)\varphi_{1\alpha}(y)$, $\varphi_{1\alpha} \in C(\overline{\Omega})$.

Для $x \in \Omega_2$ маємо $\frac{1}{2}d(y) < d(x) < \frac{3}{2}d(y)$, тому $|D^\alpha(h(x)\varrho^k(x))| \leqslant d^\alpha(y)\varphi_\alpha(y)$, $\varphi_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Нехай $\delta > 0$-настільки мале, що $K_\delta(y) = \{x : |x-y| < \delta\} \subset \Omega_2$, $\Omega_{2\delta} = \Omega_2 \setminus K_\delta(y)$, $S_\delta(y) = \{x : |x-y| = \delta\}$. Тоді $v_{2\alpha}(y) = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\delta}} \varrho^k(x) D_y^\alpha(G(x,y)h(y))dx =$

$= \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\delta}} \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\varrho^k(x)(-D_x)^\beta(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx =$

$= \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\lim\limits_{\delta\to 0}\{\int\limits_{\Omega_{2\delta}} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx +$

$\sum\limits_{|\gamma|\leqslant|\beta|}\int\limits_{|x-y|=\delta} \varrho^k(x)\nu^\gamma(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}D_x^\gamma(h(y)G(x,y))dS\}$.

У локальній розпрямляючій системі координат на сфері $\{x : |x-y| = \delta\}$

$$D_x^\gamma = \begin{cases} \sum\limits_{t\leqslant|\gamma|} R'_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t, & |\gamma| < 2 \\ \sum\limits_{t\leqslant 1} R_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t + M_\gamma A(x,D), & 2i \leqslant |\gamma| < 2(i+1),\ i = 1,2,\ldots \end{cases},$$

$R'_{\gamma t}(\xi, D') = \sum\limits_{|q|\leqslant|\gamma|-t} R'_{\gamma tq}(\xi)(D')^q$, $R_{\gamma t}(\xi, D') = \sum\limits_{|q|\leqslant|\gamma|-t-2i} R_{\gamma tq}(\xi)(D')^q$, оператор M_γ має порядок $|\gamma| - 2i$, $M_\gamma AG\,|_S = 0$. Тоді

$$v_{2\alpha}(y) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\lim_{\delta\to 0}\{\int\limits_{\Omega_{2\delta}} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx +$$

$$\sum_{2i\leqslant|\gamma|\leqslant|\beta|<2(i+1)} \sum_{t=0}^{\min[|\gamma|-2i,1]} \sum_{|q|\leqslant|\gamma|-t-2i} \int\limits_{S_\delta} (D')^{*q}(\varrho^k(x)\nu^\gamma(x))R_{\gamma tq}(\xi)\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^t(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dS\},$$

$(D')^{*q}$ – оператор, спряжений до D' на S_δ.

Оскільки $\varrho \in C^\infty(\Omega_2)$, а оператор $(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}$ не збільшує порядку особливості функції при $x = y$, то перша група доданків у виразі для $v_{2\alpha}(y)$ набуває вигляду

$\sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\int\limits_{\Omega_2} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G_0(x,y))dx$ з оцінкою

$\sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}(d^2(y)+1)d^{k-\beta_\nu}(y)h(y)\tilde{\varphi}_{2\alpha}(y) \leqslant (\varrho^{k+2-|\alpha|}(y)+1)\varphi_{2\alpha}(y)$, $\varphi_{2\alpha} \in C(\overline{\Omega})$.

Друга група доданків (інтегралів за сферою $\{x : |x-y| = \delta\}$) має оцінку $\delta^{2-t}\mu_\alpha(y)$, $\mu_\alpha \in C(\overline{\Omega})$, $t \leqslant 1$, а тому має границею при $\delta \to 0$ неперервну функцію.

Для $x \in \Omega_3$ підінтегральний вираз в $v_{3\alpha}$ є нескінченно диференційовною функцією y, тому $v_{3\alpha} = \varphi_{3\alpha} \in C(\overline{\Omega})$. Одержуємо $|v_\alpha(y)| \leqslant (\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y)+1)\varphi_\alpha(y)$, $\varphi_\alpha \in C(\overline{\Omega})$.

Нехай $\Phi(x,u) = u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u(y))dy + g(x) = u(x) + \Phi_1(x,u)$.

Маємо
$\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\Phi(x,u(x))|dx \leqslant \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx + \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx +$
$+\int\limits_\Omega |\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx||f(y,u(y))|dy.$

Відомо, що існує єдиний розв'язок ψ задачі

$$A^*\psi(x) = \varrho^k(x),\ x\in\Omega,\ \psi\mid_S = 0,$$

$\psi \in X_k(\overline{\Omega}) \subset X(\overline{\Omega}) \subset D_0(\overline{\Omega})$ і має зображення $\psi(y) = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx$.

За лемою 3 $\psi(y) = O(\varrho^{k+3-n}(y)+1)$, $y\to x_0\in S$ при $n>2$.

Нехай Ω_ε – область обмежена поверхнею S_ε. У виразі
$\int\limits_\Omega |\psi(y)f(y,u(y))|dy = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy$
маємо $\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy \leqslant C\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}(\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy$ за лемою 3. Припускаючи, що

$$\int\limits_\Omega (\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy < \infty,\ u\in m_k(\Omega), \tag{12}$$

одержуємо скінченність $\int\limits_\Omega |\psi(y)f(y,u(y))|dy$ для довільних $\psi\in X_k(\overline{\Omega})$, $u\in m_k(\Omega)$. Отже, з (12) випливає (5).

Якщо умову (12) замінити умовою

$$\int\limits_\Omega (\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy \leqslant C',\ u\in m_{k,C}(\Omega), \tag{12'}$$

то одержимо, що $\int\limits_\Omega |\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx||f(y,u(y))|dy \leqslant C''$ для $u\in m_{k,C'}(\Omega)$. Крім того, при $||g||\leqslant C'''$ матимемо $||\Phi_1||\leqslant C''+C'''=C_1$. Отже, з (12') та обмеженості $||g||$ випливає виконання умови (9').

Маємо $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u(y))dy|dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(-\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx|\right)|f(y,u(y))|dy = -\int\limits_\Omega \psi(y)|f(y,u(y))|dy < \infty$, якщо виконуються умови (7) та (12). Якщо, крім того, $||g||_k<\infty$, то виконується умова (9) леми 1 для вибраної функції Φ.

Нехай $(Pu)(x) = u(x) - \frac{1}{N}(u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u)dy)$. Якщо виконується умова (7) та $f'_u \geqslant 0$ для $u\in m_k(\Omega)$, то $||Pu_1 - Pu_2|| \leqslant \frac{1}{N}[(N-1)||u_1-u_2|| + \int\limits_{\Omega'}(-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega'}\varrho^k(x)G(x,y)dx)f'_u(y,u)|u_1(y)-u_2(y)|dy]$, де $\Omega'\subset\Omega$, u_1-u_2 зберігає знак в Ω'. В $\Omega\setminus\Omega'\times\Omega'$ функція G неперервна. Вибираючи значення $\varrho(x)$ досить малим при $d(x)\geqslant\varepsilon$, одержуємо $(-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega'}\varrho^k(x)G(x,y)dx) = O(\varepsilon)$ для довільного $y\in\Omega'$. Тому якщо існує така стала $L_1>0$, що

$$|\varrho^{-k}(y)f_y(y,u)| \leqslant L_1,\ y\in\Omega,\ u\in m_k(\Omega),\ \ L(\varepsilon)L_1<1, \tag{13}$$

то $||Pu_1-Pu_2|| \leqslant \frac{N-1+L_2\varepsilon}{N}||u_1-u_2|| \leqslant N_1||u_1-u_2||$, $N_1<1$. З теореми Банаха одержуємо такий висновок.

Теорема 1. *Нехай функція f неперервна, виконуються умови (7) та (12), $f'_v(x,v) \geqslant 0\,(x \in \Omega,\ v \in m_k(\Omega))$ та задовольняє (13), $g \in m_k(\Omega)$. Існує єдиний розв'язок $u \in m_k(\Omega)$ інтегрального рівняння*

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y,u(y))dy + g(x) = 0. \tag{14}$$

Якщо виконана умова (12') замість (12) та $g \in m_{k,C'''}(\Omega)$, то існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (14) $\quad u \in m_{k,C}(\Omega)$ при $C > C'' + C'''$.

Зауваження 3. Якщо

$$|f(x,u)| \leqslant A + B|u|^q,\ A \geqslant 0,\ B > 0,\ l \in N,\ k \geqslant n-l,\ 0 < q < \frac{1}{k+1}, \tag{12"}$$

то $\int\limits_{\Omega}(1 + \varrho^{k+l-n}(x))|f(x,u(x))|dx \leqslant A_0 + B_0||u||^{\alpha}$, причому $A_0 > 0$, $B_0 > 0$, $\alpha = qr = q_1 r_1 < 1$.

Справді, як у зауваженні 2, використаємо нерівність Гельдера $B|u|^q \leqslant \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{|u|^{qr}}{r}$, $r, r' > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ та позначимо $qr = \frac{1}{s}$. Тоді $\int\limits_{\Omega}(A + B|u|^q)dx \leqslant A + \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} \varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{\frac{1}{s}}\varrho^{-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_1 + \frac{1}{r}||u||^{\frac{1}{s}}(\int\limits_{\Omega}\varrho^{-\frac{k}{s-1}}(x)dx)^{\frac{s-1}{s}} \leqslant A_1 + B_1||u||^{\frac{1}{s}}$, якщо $(s-1)(s-k-1) > 0$; $\int\limits_{\Omega}\varrho^{k+l-n}(x)(A + \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{1}{r}|u|^{\frac{1}{s}})dx \leqslant A_2 + \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega}\varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{\frac{1}{s}}\varrho^{k+l-n-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_2 + \frac{1}{r}||u||^{\frac{1}{s}}(\int\limits_{\Omega}\varrho^{\frac{s(k+l-n)-k}{s-1}}(x)dx)^{\frac{s-1}{s}} \leqslant A_2 + B_2||u||^{\frac{1}{s}}$, якщо $(s-1)\big(s(k+l+1-n)-(k+1)\big) > 0$. При $k \geqslant n-l$ існує $s > k+1$, яке задовольняє обидві умови, так що $\int\limits_{\Omega}(1+\varrho^{k+l-n}(x))(A+B|u|^q)dx \leqslant (A_1+A_2)+(B_1+B_2)||u||^{\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{s} = qr$.

Оскільки додаткових умов на r немає, то такий самий результат одержуємо при наявності доданків вигляду $B_1||v||^{q_1}$ в оцінці функції f: вибираємо r_1 так, щоб $q_1 r_1 = qr$ і одержуємо

$$\int\limits_{\Omega}(1 + \varrho^{k+l-n}(x))(A + B|u|^q + B_1|v|^{q_1})dx \leqslant A_0 + B_0||u||^{\alpha} + B_{10}||v||^{\alpha},$$

$A, A_0 \geqslant 0$, $B, B_1, B_0, B_{10} > 0$, $l \in N$, $k \geqslant n-l$, $0 < q, q_1 < \frac{1}{k+1}$, $\alpha = qr = q_1 r_1 < 1$.

Функція f, яка задовольняє умову (12") при $l = 3$ або для якої $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C'$, також задовольняє умови (12') та (12) при $k \geqslant n-3$.

Зауваження 4. Якщо $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C_1$ та існує таке $r > \frac{n}{2}$, що $\int\limits_{\Omega}|f|^r \leqslant C_2$ для $u \in m_{k,C}(\Omega)$, то $-\int\limits_{\Omega}\varrho^k(x)G(x,y)dx|)|f(y,u(y))|dy \leqslant C_1$ для $x \in \Omega$, $u \in m_{k,C}(\Omega)$.

Справді, $\int\limits_{\Omega}|x-y|^{2-n}|f(y,u)|dy \leqslant \int\limits_{\Omega}[\frac{|x-y|^{(2-n)r'}}{r'} + \frac{|f|^r}{r}]dy \leqslant C'$ при $r'(2-n) > -n$, тобто $r > \frac{n}{2}$.

Наслідок 1. *Якщо функція f задовольняє (12") або існують такі додатні сталі C'_1, C'_2 та $r \in \left(1, 1 + \frac{n}{k+1-n}\right)$, що $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C'_1$, $\int\limits_{\Omega}|f|^r \leqslant C'_2$ для довільної*

$u \in m_{k,C}(\Omega)$; виконуються умови (7),(13), $f_u \geqslant 0$, $g \in m_{k,C_3'}(\Omega)$, то існує єдиний розв'язок рівняння (14) у класі $m_{k,C}(\Omega)$.

Нехай тепер $g(x) =< B_yG(x,y), F >$. За властивостями функції Гріна $g \in C^\infty(\Omega)$. Узагальнена функція F має скінченний порядок сингулярності на S, тому існують такі число $p \in N$ та функції $f_\alpha \in L_1(S)$, що $< \varphi, F >= \sum\limits_{|\alpha|\leqslant p} \int\limits_S D^\alpha \varphi f_\alpha dS$ для довільної $\varphi \in D(S)$. Тоді $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)g(x)dx =$ $= \int\limits_\Omega \varrho^k(x) < B_yG(x,y), F > dx =< \int\limits_\Omega \varrho^k(x)B_yG(x,y)dx, F >=$ $= \sum\limits_{|\alpha|\leqslant p} \int\limits_S D_y^\alpha \big(\int\limits_\Omega \varrho^k(x)\hat{B}_yG(x,y)dx\big) f_\alpha(y)dS_y$. За лемою 3 $D_y^\alpha \int\limits_\Omega \varrho^k(x)\hat{B}_yG(x,y)dx \leqslant \tilde{C}$, якщо $k+2-n \geqslant |\alpha|$ при $|\alpha| \leqslant p$. Тому $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)g(x)dx \leqslant \tilde{C}' \int\limits_S \sum\limits_{|\alpha|\leqslant p} |f_\alpha(y)|dS \leqslant \tilde{C}" < \infty$ при $k \geqslant p-2+n$. Отож, при $s(F) \leqslant p$, $k \geqslant p-2+n$ існує така стала $C"'$, що $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx \leqslant C"'$. В умовах теореми 1 одержуємо розв'язність інтегрального рівняння (14) у $m_{p-2+n}(\Omega)$ чи $m_{p-2+n,C}(\Omega)$ для $g(x) =< B_yG(x,y), F >$ при $s(F) \leqslant p$.

З'ясуємо, коли цей розв'язок належить $C^2(\Omega)$. Нехай $\varepsilon > 0$, $h(x) = \begin{cases} 1, \ d(x) \leqslant \varepsilon \\ 0, \ d(x) > 2\varepsilon \end{cases}$, $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Маємо $(1-h(x))u(x) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (1-h(x))G(x,y)f\big(y,u(y)\big)dy$ $+ \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} (1-h(x))G(x,y)f\big(y,u(y)\big)dy + (1-h(x))g(x)$, де $g(\cdot) =< B_yG(\cdot,y), F >\in C^\infty(\Omega)$. Функція $G_1(x,y) = (1-h(x))G(x,y) \neq 0$ при $x \in \Omega_\varepsilon, y \in \Omega$, тому $G_1 \in C^\infty(\Omega_\varepsilon \times \Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$, $G_1 \mid_{y\in S} = 0$, а отже, $G_1(x,\cdot) \in D_0(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega_\varepsilon$. У припущенні (6) $A_y^*G_1(x,y) = 0$ і тому $G_1(x,\cdot) \in D_0(\overline{\Omega})$ для довільних $x \in \Omega_\varepsilon$ та k. За умовою (5) $w_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} G_1(x,y)f\big(y,u(y)\big)dy < \infty$ при $u \in m_k(\Omega)$ і $w_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. За доведеним вище $g \in C^\infty(\Omega)$. Тому функція u задовольняє рівняння

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (1-h(x))G(x,y)f\big(y,u(y)\big)dy + g_1(x,u(x)),\ x \in \Omega_\varepsilon,$$

де $g_1(\cdot,u) = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} G_1(\cdot,y)f\big(y,u(y)\big)dy + g(\cdot) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ для довільної $u \in m_k(\Omega)$.

Тепер з (5), властивостей функції G_1 та об'ємного потенціалу випливає, що $u \in C(\Omega_\varepsilon)$ при неперервній f, а якщо f неперервно диференційовна, то $u \in C^2(\Omega_\varepsilon)$ для довільного $\varepsilon > 0$. Отже, теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $F \in D'(S)$, $s(F) \leqslant p$, $p \geqslant 0$, функція f неперервно диференційовна, виконана умова (7). Якщо*

$$\int\limits_\Omega |f(y,u(y))|dy < \infty,\ u \in m_{p-2+n}(\Omega), \qquad (12"')$$

$f_v'(x,v) \geqslant 0$, $x \in \Omega$, $v \in m_{p-2+n}(\Omega)$ та задовольняє умову (13), то існує єдиний розв'язок $u \in M_{p-2+n}(\Omega)$ узагальненої задачі Діріхле. Якщо замість (12"') маємо

$$\int\limits_\Omega |f(y,u(y))|dy \leqslant C',\ u \in m_{p-2+n,C}(\Omega),$$

(13) виконується для довільної $u \in m_{p-2+n,C}(\Omega)$, *то існує єдиний розв'язок узагальненої задачі Діріхле* $u \in M_{p-2+n,C}(\Omega)$ *при досить великому* $C > 0$.

Наслідок 2. *Нехай* $F \in D'(S)$, $s(F) \leqslant p$, $p \geqslant 0$, *функція* f *неперервно диференційовна, виконана умова (7) та умови наслідку 1 при* $k = p + n - 2$. *Існує єдиний розв'язок* $u \in M_{p-2+n,C}(\Omega)$ *узагальненої задачі Діріхле (1)-(2).*

Приклад 1. Перевіримо виконання умов теореми 2 для задачі

$$\Delta u = \mu |u|^q \operatorname{sign} u \text{ в } \Omega,\ \mu q > 0 \tag{15}$$

$$u_{|S} = F. \tag{16}$$

Для оператора Лапласа умова (7) виконується; $f_u = \mu q |u|^{q-1} \operatorname{sign}^2 u \geqslant 0$ при $\mu q > 0$; якщо існують такі додатні сталі C, C', L, що $\int\limits_\Omega |u|^q dy \leqslant C'$ та $|\varrho^{2-p-n}(y) f_u(y,u)| \leqslant L$ для $u \in m_{p-2+n,C}(\Omega)$, то за теоремою 2 існує єдиний розв'язок задачі (15)-(16) у класі $m_{p-2+n,C}(\Omega)$.

Нехай $\tilde{m}_{p-2+n}(\Omega) = \{u \in m_{p-2+n}(\Omega) : u(x) = O(\varrho^l(x)) \text{ біля } S\}$. $\int\limits_\Omega |u(y)|^q dy < \infty$ для $u \in \tilde{m}_{p-2+n}(\Omega)$, якщо $p - 2 + n + l > -1$ та $ql > -1$; $\varrho^{2-p-n}(y) f_u(y,u) = O(\varrho^{2-p-n+(q-1)l}(y))$ і обмежена при $2 - p - n + (q-1)l \geqslant 0$. Бачимо, що таке l існує при $q > 1$, $q \in (0, \frac{1}{p+n-1})$, $q < -\frac{1}{p+n-1}$ і при таких q існує єдиний розв'язок задачі (15)-(16) у класі $\tilde{m}_{p-2+n}(\Omega)$; $u \in C^2(\Omega) \cap \tilde{m}_{p-2+n}(\Omega) = \tilde{M}_{p-2+n}(\Omega)$ при $q > 1$.

Введемо нормовані функціональні простори $m^1(\Omega) = \{u : \text{існує таке } k \geqslant 0, \text{що} ||u||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)[|u(x)| + \sum\limits_{i=1}^n |u_{x_i}|]dx < \infty\}$ та відповідно $m^1_k(\Omega) = \{u : ||u||_k < \infty\}$, $M^1(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m^1(\Omega)$, $M^1_k(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m^1_k(\Omega)$, $m^1_{k,C} = \{u \in m^1_k(\Omega) : ||u||_k \leqslant C\}$, $m^1_{k,C}$ – обмежена замкнена випукла підмножина банахового простору $m^1_k(\Omega)$.

Нехай $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, функція $f = f(x, u, u_x)$ визначена для $x \in \Omega$, $u \in m^1(\Omega)$ та неперервно диференційовна. Розглянемо узагальнену задачу Діріхле для рівняння

$$Au(x) = f(x, u, u_x),\ x \in \Omega \tag{17}$$

у таких самих формулюваннях, як задачу (1),(2), замінивши умову $u \in M(\Omega)$ (у задачі (1),(2)) умовою $u \in M^1(\Omega)$. Існування розв'язку цієї задачі випливає з існування розв'язку інтегродиференціального рівняння

$$u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y) f(y, u, u_y) dy = - < \hat{B}_y G(x,y), F >,\ x \in \Omega \tag{18}$$

у просторі $M^1(\Omega)$.

Використаємо принцип Шаудера [9, с.291] та наслідок з теореми Шаудера-Тихонова [10]: якщо у топологічному просторі E замкнена випукла оболонка довільної компактної множини є компактна, оператор P – цілком неперервний і обмежену замкнену випуклу множину K відображає в обмежену замкнену випуклу множину $P(K) \subset E$, то в E існує нерухома точка оператора P.

Введемо оператор $Pu(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy + g(x)$ та оцінимо $||Pu||_k$:

$$||Pu||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|Pu(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|(Pu)_{x_j}|dx = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy+$$

$$+g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|(\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy)_{x_j} + g_{x_j}|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega (\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|G(x,y)|dx)|f(y,u,u_y)|dy + \int\limits_\Omega (\int\limits_\Omega \varrho^k(x)\sum_{j=1}^n |G_{x_j}(x,y)|dx)|f(y,u,u_y)|dy+$$

$$+\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g_{x_j}|dx \leqslant \tilde{C}\int\limits_{\Omega_\varrho} (\varrho^{k+2-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy+$$

$$+\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g_{x_j}|dx.$$

Бачимо, що при умовах

$$g \in m^1_{k,C}(\Omega),\ \int\limits_\Omega (\varrho^{k+2-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy \leqslant C_4,\ u \in m^1_{k,C}(\Omega) \tag{19}$$

попередні оцінки є правильними і оператор P діє з простору $m^1_k(\Omega)$ в себе, більше того, обмежену замкнену випуклу підмножину $m^1_{k,C}(\Omega)$ простору $m^1_k(\Omega)$ він відображає в обмежену замкнену випуклу підмножину $m^1_{k,C_1}(\Omega)$ цього простору.

Якщо функція f задовольняє умову

$$\begin{gathered}|f(x,u,u_x)| \leqslant A + A_0|u|^{q_0} + \sum_{j=1}^n A_j|u_{x_j}|^{q_j},\\ h \geqslant 0,\ h_j > 0,\ q_j < \frac{1}{k+1},\ k \geqslant n-2,\ j = \overline{0,n},\end{gathered} \tag{19'}$$

то з попередніх зауважень випливає, що $||Pu||_k \leqslant H + B||u||^\alpha$, $H, B > 0$, $\alpha < 1$, так що така f задовольняє умову (19) і при $k \geqslant n-2$ оператор P діє з $m^1_{k,C}(\Omega)$ в $m^1_{k,C}(\Omega)$.

Оскільки $\varrho^k u$, $\varrho^k u_{x_i} \in L_1(\Omega)$ для $u \in m^1_k(\Omega)$, то за теоремою Ріса [9, с. 242] множина $K \subset m^1_k(\Omega)$ компактна тоді і тільки тоді, коли:

1') існує така стала C, що $||u||_k \leqslant C$ для довільної $u \in K$;

2') для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для таких $z \in \Omega$, що $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in K$

$$\int\limits_\Omega \left|\varrho^k(x+z)u(x+z) - \varrho^k(x)u(x)\right|dx+$$

$$\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \left|\varrho^k(x+z)u_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)u_{x_j}(x)\right|dx \leqslant \varepsilon.$$

Для довільних натурального n, $u_i \in m^1_k(\Omega)$, таких чисел $\alpha_i \geqslant 0$, що $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, також $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i u_i \in m^1_k(\Omega)$; якщо u_i задовольняють умови 1) та 2), то також $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i u_i$ задовольняє ці умови, так що замкнена випукла оболонка довільної компактної множини $K \subset m^1_k(\Omega)$ компактна.

Покажемо, що P – компактний оператор на $m_k^1(\Omega)$. Для цього за теоремою Ріса необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) існує така стала C_1, що $||Pu||_k \leqslant C_1$ для довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для таких $z \in \Omega$, що $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \left|\varrho^k(x+z)(Pu)(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)(x)\right|dx+$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left|\varrho^k(x+z)(Pu)_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)_{x_j}(x)\right|dx \leqslant \varepsilon.$$

З (19) випливає виконання умови 1. Доведемо 2. Розглянемо

$$\int\limits_{\Omega} |\int\limits_{\Omega} [\varrho^k(x+z)G(x+z,y) - \varrho^k(x)G(x,y)]f(y,u,u_y)dy|dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} |\int\limits_{\Omega} [\varrho^k(x+z)G_{x_j}(x+z,y) - \varrho^k(x)G_{x_j}(x,y)]f(y,u,u_y)dy|dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega} |\varrho^k(x+z)g(x+z) - \varrho^k(x)g(x)|dx + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} |\varrho^k(x+z)g_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)g_{x_j}(x)|dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |\int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{n}\int\limits_0^1 \tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)d\alpha\, z_l\, f(y,u,u_y)dy|dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega} |\int\limits_{\Omega} \sum_{l,j=1}^{n}\int\limits_0^1 \tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)G_{x_j}(x+\beta z,y)\big)d\alpha\, z_l\, f(y,u,u_y)dy|dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega} |\sum_{l=1}^{n}\int\limits_0^1 \tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)g(x+\alpha z)\big)d\alpha\, z_l\,|dx + \int\limits_{\Omega} |\sum_{l,j=1}^{n}\int\limits_0^1 \tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)g_{x_j}(x+$$

$$\beta z)\big)d\alpha\, z_l\,|dx \leqslant \sum_{l=1}^{n}\{\int\limits_{\Omega}[\int\limits_{\Omega}(\int\limits_0^1 |\tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)|d\alpha)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}(\int\limits_0^1 |\tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)G_{x_j}(x+\beta z,y)\big)|d\alpha)dx]|f(y,u,u_x)|dy+$$

$$+\int\limits_{\Omega}(\int\limits_0^1 |\tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)g(x+\alpha z)\big)|d\alpha)dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}(\int\limits_0^1 |\sum_{j=1}^{n}\tfrac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)g_{x_j}(x+\beta z)\big)|d\alpha)dx\}|z_l|,\ |z| \leqslant \delta.$$

За лемою 3 $\int\limits_{\Omega} |\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)|dx \leqslant C_l'(\varrho^{k+2-n}(y+\alpha z)+1)$,

$\int\limits_{\Omega} |\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G_{x_j}(x+\alpha z,y)\big)|dx \leqslant C_{lj}'(\varrho^{k+1-n}(y+\alpha z)+1)$.

Якщо $g \in m_{k-1}^1(\Omega)$, $g_{x_j} \in m_k^1(\Omega)$ та існує така стала C', що

$$\int\limits_{\Omega}(\varrho^{k+1-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy \leqslant C',\ u \in m_{k,C}^1(\Omega), \tag{20}$$

одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \frac{\varepsilon}{C''}$ (C'' – певна додатна стала, яка виражається через $C, C', C_1', C_{1j}', sup|\varrho_{x_j}|$), що для $z \in \Omega$, $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$ маємо

$\int\limits_{\Omega} \left|\varrho^k(x+z)(Pu)(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)(x)\right|dx+$

$+\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left|\varrho^k(x+z)(Pu)_{x_j}(x+z)-\varrho^k(x)(Pu)_{x_j}(x)\right|dx\leqslant C"\delta=\varepsilon,$

тобто виконується 2). Зауважимо, що друга з умов (19) випливає з (20).

Ми показали, що при умовах (20) та $g\in m^1_{k-1,c_1}(\Omega)$, $g_{x_j}\in m^1_{k,c_2}(\Omega)$ оператор P є компактний. З'ясуємо, коли він є неперервним.

Нехай $u_1,u_2\in m^1_k(\Omega)$. Розглянемо

$\int\limits_{\Omega}\varrho^k(x)\big[\big|\int\limits_{\Omega}G(x,y)\big(f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})\big)dy\big|+$

$+\sum\limits_{j=1}^{n}\big[\big|\int\limits_{\Omega}G_{x_j}(x,y)\big(f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})\big)dy\big|\big]dx\leqslant$

$\leqslant\int\limits_{\Omega}\big[\int\limits_{\Omega}\varrho^k(x)|G(x,y)|dx+\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\varrho^k(x)|G_{x_j}(x,y)|dx\big]|f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})|dy.$

Припускаючи, що f задовольняє умову Гельдера за $u,u_{x_1},\dots,u_{x_1}$ з показником $\alpha<\frac{1}{k+1}$ або умову

$$|f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})|\leqslant L\big[|u_1-u_2|^{\alpha_0}+\sum_{j=1}^{n}|u_{1y_j}-u_{2y_j}|^{\alpha_j}\big]$$
$$y\in\Omega,\ u_1,u_2\in m^1_{k,C}(\Omega)\ \alpha_j\in\left(0,\frac{1}{k+1}\right) \qquad (21)$$

та враховуючи зауваження 3, одержуємо

$||Pu_1-Pu_2||_k\leqslant C_6||u_1-u_2||^{\alpha}_k$, $u_1,u_2\in m^1_{k,C}(\Omega)$, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$, при $k\geqslant n-1$,

тобто оператор P є неперервним в $m^1_{k,C}(\Omega)$ при $k\geqslant n-1$.

У припущенні диференційовності f за $u,u_{x_1},\dots,u_{x_1}$ матимемо

$f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})=$

$=\int\limits_0^1 f'_u(y,u_2+\alpha(u_1-u_2),u_{2y}+\alpha(u_{1y}-u_{2y}))d\alpha(u_1-u_2)+$

$+\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_0^1 f'_{u_{y_j}}(y,u_2+\alpha(u_1-u_2),u_{2y}+\alpha(u_{1y}-u_{2y}))d\alpha(u_{1\,y_j}-u_{2\,y_j}),$

тому якщо існує така стала $L_1>0$, що

$$\big(\varrho^{-k}(y)+\varrho^{1-n}(y)\big)|f_u|\leqslant L_1,\ \big(\varrho^{-k}(y)+\varrho^{1-n}(y)\big)|f_{u_{y_j}}|\leqslant L_1,$$
$$u\in m^1_k(\Omega),\ j=\overline{1,n}, \qquad (22)$$

то з попередніх нерівностей: $||Pu_1-Pu_2||_k\leqslant C_7||u_1-u_2||_k$, $u_1,u_2\in m^1_k(\Omega)$, тобто оператор P є неперервним в $m^1_k(\Omega)$.

Ми показали, що для $g\in m^1_{k-1,c_1}(\Omega)$, $g_{x_j}\in m^1_{k,c_2}(\Omega)$, $k\geqslant n-1$, при умові (21) за теоремою Шаудера існує розв'язок рівняння (18) у просторі $m^1_{k,C}(\Omega)$ (C – досить велике число), а при умовах (20) та (22) за наслідком теореми Шаудера-Тихонова існує розв'язок рівняння (18) у просторі $m^1_k(\Omega)$.

З попередніх зауважень при $g(x)=\langle B_yG(x,y),F\rangle$ випливає теорема.

Теорема 3. *Нехай $F\in D'(S)$, $s(F)\leqslant p$, $p\geqslant 0$, функція f неперервно диференційовна, існує така стала C', що $\int\limits_{\Omega}|f(y,u,u_y)|dy\leqslant C'$ при $u\in m^1_{p+n,C}(\Omega)$. Крім того, якщо f задовольняє умову (21) при $k=p+n$, то існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (17), (2) у класі $M^1_{p+n,C}(\Omega)$ при досить великих C, якщо виконуються умови (22) при $k=p+n$, то існує розв'язок узагальненої задачі*

Діріхле (17), (2) у класі $M^1_{p+n}(\Omega)$. *Зокрема, якщо* $f = f(x,u)$, *задовольняє умову Гельдера за* u *з показником* $\alpha < \frac{1}{p+n}$, *то при досить великих* C *існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (17), (2) у класі* $M_{p-1+n,C}(\Omega)$; *якщо існують такі сталі* $C_1, L > 0$, *що*

$$\int\limits_{\Omega} |f(y,u)|dy \leqslant C_1, \ \left(\varrho^{1-p-n}(y) + \varrho^{2-n}(y)\right)|f'_u| \leqslant L, \ y \in \Omega, \ u \in m_{p-1+n,C}(\Omega),$$

то існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (1), (2) у класі $M_{p-1+n}(\Omega)$.

---

1. *Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений// Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148. – N 4. – С.745-748.
2. *Крейн С.Г., Симонов А.С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения//Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167. – N 6. – С.1226-1229.
3. *Veron L.* The boundary traces of positive solutions of some nonlinear elliptic equations// Book of Abstr. of Int. conf. "Nonlinear partial diff. equat." – Donetsk. – 1997. – P.169.
4. *Лопушанська Г.П.* Задача Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння у просторів розподілів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип.34. – С.26-31.
5. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1969. – Вип.4. – С.59-41.
6. *Кошляков Н.С. и др.* Уравнения в частных производных математической физики. – М., 1970.
7. *Красовский Ю.П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач// Изв. АН СССР. – 1969. – Т.33. – N 1. – С.109-137.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ (Теория и приложения). – М., 1969.

A GENERALIZED BOUNDARY TRACES OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION

U. Zhydyk, H. Lopushanska

Ukrainian Academiy of Printing, 19 Pidgolosko Str. 79020 Lviv, Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The conditions at which regular interior to the domain solution of second order quasilinear elliptic equation $A(x,D)u = f(x,u,u_x)$ reaches generalized values $F \in (C^\infty(S))'$ onto boundary S are obtained.

Key words: quasilinear elliptic equation.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2000
Прийнята до друку 03.07.2001