ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2001. Вип. 59. С. 148–157 *Ser. Mech-Math. 2001. Vol. 59. P. 148–157*

УДК 517.95

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Наталія ПРОЦАХ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

У цій праці в обмеженій циліндричній області $Q = \Omega \times (0, T)$ досліджено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часовою змінною, яке містить доданки вигляду $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. Методом Гальоркіна доведено таке: якщо коефіцієнти рівняння обмежені, права частина рівняння належить до простору $L^2(Q)$, то розв'язок мішаної задачі існує і належить до узагальненого простору Соболєва $W^{1,p(x)}(\Omega)$ за просторовими змінними. Єдиність узагальненого розв'язку отримано за додаткової умови на коефіцієнти рівняння і для деякого проміжку зміни функції $p(x)$.

Задачі для нелінійних рівнянь і систем параболічного типу досліджувало багато авторів. Зокрема, у працях [1 – 5] доведено розв'язність мішаних задач для певного класу нелінійних параболічних рівнянь вищого порядку з першою похідною за часом та досліджено певні властивості їхніх розв'язків. У працях [6, 7] виділено класи єдиності розв'язку мішаних задач, які залежать від геометрії області, необмеженої за просторовими змінними.

Порівняно невелика кількість праць присвячена вивченню задач для нелінійних еволюційних рівнянь і систем високих порядків з другою похідною за часом. Згадаємо тут лише праці [8 – 11].

У праці [12] запроваджено простори функцій, всі узагальнені похідні яких до порядку k включно, інтегровні за Лебегом зі степенем $p(x)$ в області Ω, де $p \in L^\infty(\Omega)$. Такі простори названо узагальненими просторами Соболєва і позначено через $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Зокрема, $W^{0,p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ є узагальненим простором Лебега. Це дало змогу узагальнити нелінійні диференціальні рівняння. У працях [13 – 15] досліджено задачі для нелінійних параболічних рівнянь з першою похідною за часом в узагальнених просторах Соболєва.

У цій праці досліджено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного параболічного диференціального рівняння з другою похідною за часовою змінною, яке містить доданки вигляду $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. Розв'язність задачі в узагальнених просторах Соболєва доведено для певних проміжків зміни функції $p(x)$. Зауважимо, що для випадку сталого показника p існування розв'язку розглянутої мішаної задачі доведено у праці [11].

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^2$; $Q = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t_1 t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, $Q_\tau = Q_{0\tau}$; $p \in L^\infty(\overline{\Omega})$.

$S = \partial\Omega\times(0,T)$, $2 < p_1 = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} p(x) \leqslant \operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega} p(x) = p_2$; $1/p(x)+1/p'(x) = 1$, $x \in \overline{\Omega}$.
Розглянемо простори $L^{p(x)}(\Omega)$ та $W^{k,2}(\Omega)$ з нормами

$$\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} |v|^{p(x)}/\lambda^{p(x)}dx < 1\right\},$$

$$\|v; W^{k,2}(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^{\alpha}u|^2\right)dx\right)^{1/2}, \ k = 1,2$$

відповідно, де через D^{α} позначено оператор диференціювання $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega)$ замикання множини $C_0^{\infty}(\Omega)$ стосовно норм простору $W^{k,2}(\Omega)$, $k = 1,2$. Для функцій $v \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)$ виконується оцінка Фрідріхса [16, с.44]

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=j}|D^{\alpha}v|^2\,dx \leqslant \gamma_{2,j}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}v|^2\,dx, \quad j = 0,1,$$

де стала $\gamma_{2,j}$ залежить лише від n і Ω. Позначимо через $\Gamma_2 = \gamma_{2,0} + \gamma_{2,1} + 1$.

В області Q розглянемо мішану задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u) - \sum_{i=1}^{n}(k_i(x,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i} +$$
$$+c(x,t)u_t - \sum_{i,s=1}^{n}(b_{is}(x,t)u_{x_it})_{x_s} + \sum_{|\alpha|\leqslant 2}d_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u = f(x,t), \tag{1}$$

$$D^{\alpha}u|_S = 0, \ |\alpha| \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3}$$

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta t} \in L^{\infty}(Q)$, $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$, $(x,t) \in Q$;
$$a_0\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}u|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}uD^{\beta}u\,dx \leqslant$$
$$\leqslant a^0\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}u|^2\,dx \text{ для майже всіх } t \in (0,T), \ \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega),$$
$a_0 = \text{const} > 0$, $a^0 = \text{const}$;

(B) $b_{is} \in L^{\infty}(Q)$, $i,s = \overline{1,n}$, $\int\limits_{Q}\sum\limits_{i,s=1}^{n}b_{is}(x,t)u_{x_i}u_{x_s}dxdt \geqslant b_0\int\limits_{Q}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dt$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, $b_0 = \text{const} > 0$;

(K) $k_i \in L^{\infty}(Q)$, $0 < k_0 \leqslant k_i(x,t) \leqslant k^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $i = \overline{1,n}$, $k_0 = \text{const}$, $k^0 = \text{const}$;

(C) $c \in L^{\infty}(Q)$, $c(x,t) \geqslant c_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $c_0 = \text{const}$;

(D) $d_\alpha \in L^\infty(Q)$, $d_0 < d_\alpha(x,t) < d^0$, $|\alpha| \leqslant 2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $d_0 = \mathrm{const}$, $d^0 = \mathrm{const}$;

(F) $f \in L^2(Q)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$, $u_0 \in W^{2,2}(\Omega_0)$.

Нехай $d_2 = \max\limits_{|\alpha|\leqslant 2} \sup\limits_{\Omega} |d_\alpha(x,0)|^2$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію* $u \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega))$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_Q \Bigg[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ c(x,t) u_t v + \sum_{i,s=1}^{n} b_{is}(x,t) u_{x_i} v_{x_s} + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u v\Bigg]\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,t) v\, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_0} u_1 v\, dx \tag{4}$$

для довільної функції $v \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega))$, $v(x,T) = 0$ *та початкову умову* (3_1).

Твердження 1. *Для функцій* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *виконуються нерівності*

1) $\int\limits_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \leqslant \|f; L^{p(x)}(\Omega)\|^s$, *де* $s = \begin{cases} p_1, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ p_2, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$

2) $\|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^{p(x)}\, dx\right)^{1/s}$, *де* $s = \begin{cases} p_2, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ p_1, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$

Твердження 2. *Для функцій* $u \in L^{q(x)s(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$ *виконується нерівність* $\||u|^{q(x)}; L^{s(x)}(\Omega)\| \leqslant \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\|^{s_1}$, *де* $s_1 = \frac{s_3}{s_2}$;

$$s_2 = \begin{cases} \min\limits_\Omega s(x), & \text{якщо } \|u; L^{s(x)}(\Omega)\| \geqslant 1, \\ \max\limits_\Omega s(x), & \text{якщо } \|u; L^{s(x)}(\Omega)\| < 1. \end{cases}$$

$$s_3 = \begin{cases} \min\limits_\Omega q(x)s(x), & \text{якщо } \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ \max\limits_\Omega q(x)s(x), & \text{якщо } \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$$

Доведення тверджень випливає з означення узагальнених просторів Лебега [12].

2. Існування та єдиність розв'язку

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A)-(F)$ *і, крім того,* $p_2 \leqslant np_1/(n-p_1)$, *якщо* $n > p_1$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).*

Доведення. Доведемо існування розв'язку задачі (1)-(3) методом Гальоркіна. Нехай $\{\varphi^j\}$ – база простору $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)$. $u^j(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{j} c_{kj}(t)\varphi^k(x)$, де коефіцієнти $c_{kj}(t)$ є розв'язками систем наближень Гальоркіна

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^j_{tt}\varphi^l+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha\varphi^l+\sum_{i=1}^{n}k_i(x,t)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i}\varphi^l_{x_i}+ \tag{5}$$

$$+c(x,t)u^j_t\varphi^l+\sum_{i,s=1}^{n}b_{is}(x,t)u^j_{x_it}\varphi^l_{x_s}+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}d_\alpha(x,t)D^\alpha u^j\varphi^l\Big]\,dx=\int\limits_{\Omega}f(x,t)\varphi^l\,dx,$$

$$c_{kl}(0)=u^j_{0l},\ c'_{kl}(0)=u^j_{1l},\ 1\leqslant l\leqslant j, \tag{6}$$

$$u^j_0(x)=\sum_{l=1}^{j}u^j_{0l}\varphi^l(x),\ u^j_1(x)=\sum_{l=1}^{j}u^j_{1l}\varphi^l(x),$$
$$\lim_{j\to\infty}\|u_0-u^j_0\|_{W^{2,2}(\Omega)}=0,\ \lim_{j\to\infty}\|u_1-u^j_1\|_{L^2(\Omega)}=0.$$

Доведемо існування розв'язку задач (5) - (6). Запишемо (5) у вигляді

$$\sum_{k=1}^{j}c''_{jk}(t)\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx=-\sum_{k=1}^{j}c_{kj}(t)\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}\int\limits_{\Omega}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\varphi^k D^\alpha\varphi^l\,dx+$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int\limits_{\Omega}d_\alpha(x,t)D^\alpha\varphi^k\varphi^l\,dx\Big]-\sum_{k=1}^{j}c'_{jk}(t)\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i,s=1}^{n}b_{is}(x,t)\varphi^k_{x_i}\varphi^l_{x_s}+c(x,t)\varphi^l\Big]\,dx-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}k_i(x,t)\Big|\sum_{k=1}^{j}c_{kj}(t)\varphi^k_{x_i}(x)\Big|^{p(x)-2}\sum_{k=1}^{j}c_{kj}(t)\varphi^k_{x_i}(x)\varphi^l_{x_i}(x)\,dx+\int\limits_{\Omega}f(x,t)\varphi^l\,dx, \tag{7}$$

або $\vec{c}\,''_j(t)=\Big[\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx\Big]^{-1}\vec{G}_j(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}\,'_j(t))$, де через $G_{jl}(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}\,'_j(t))$ позначено праву частину попередньої рівності. Запишемо еквівалентну систему рівнянь

$$\vec{c}\,'_{1j}(t)=\vec{c}_{2j}(t),\qquad \vec{c}\,'_{2j}(t)=\Big[\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx\Big]^{-1}\vec{G}_j(t,\vec{c}_1(t),\vec{c}_2(t)).$$

На підставі умов теореми 1 функція $\vec{G}_j(t,\vec{y})$ є неперервною за $\vec{y}$ у просторі $\mathbb{R}^{2j+1}$ для майже всіх $t\in(0,T)$ і вимірною за t при кожному фіксованому $\vec{y}$. Крім того, $|\vec{G}_j(t,\vec{y})|\leqslant\mu(t)$, де $\mu\in L^1(0,T)$ для всіх $\vec{y}:\ |\vec{y}|\leqslant r_0$. Отже, згідно з теоремою Каратеодорі [17, с.54] існує неперервно диференційовна на $[0,t_1]$, $t_1\leqslant T$ функція, яка є розв'язком задачі (5)-(6).

Апріорні оцінки. Домножимо (5) на $c'_{lj}(t)$, підсумуємо за l, домножимо на $e^{-\nu t}$, зінтегруємо за t від 0 до τ, $0<\tau<t_1$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^j_{tt}u^j_t+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha u^j_t+\sum_{i=1}^{n}k_i(x,t)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i}u^j_{x_it}+c(x,t)|u^j_t|^2+$$

$$+\sum_{i,s=1}^{n}b_{is}(x,t)u^j_{x_it}u^j_{x_st}+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}d_\alpha(x,t)D^\alpha u^j u^j_t\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau}f(x,t)u^j_te^{-\nu t}\,dx\,dt \tag{8}$$

Перетворимо кожний доданок рівності (8). На підставі умов теореми матимемо такі оцінки:

$$\tau_1 = \int\limits_{Q_\tau} u^j_{tt} u^j_t e^{-\nu t} dx dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^j_t|^2 e^{-\nu\tau}\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u^j_1|^2\, dx + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^j_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_2 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^j D^\alpha u^j_t e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{1}{2}(\nu a_0 - a_1)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu\tau}\, dx - \frac{a^0}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j_0|^2\, dx;$$

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n k_i(x,t) |u^j_{x_i}|^{p(x)-2} u^j_{x_i} u^j_{x_i t} e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{k_0}{p_2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)} e^{-\nu\tau}\, dx -$$
$$- \frac{k^0}{p_1}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u^j_{0x_i}|^{p(x)}\, dx + \frac{\nu k_0 - k_1}{p_2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)} e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_\tau} c(x,t) |u^j_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^j_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_5 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t) u^j_{x_i t} u^j_{x_s t} e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant b_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u^j_{x_i t}|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_6 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u^j u^j_t e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{(d^0)^2}{2}\Gamma_2 \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 + \frac{|u^j_t|^2}{2}\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_7 = \int\limits_{Q_\tau} f(x,t) u^j_t e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{|f(x,t)|^2}{2} + \frac{1}{2}|u^j_t|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt,$$

де сталі a_1, k_1 залежать від функцій $a_{\alpha\beta t}$, k_{it}.

На підставі цих оцінок з (8) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(\frac{|u^j_t|^2}{2} + \frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 + \frac{k_0}{p_2}\sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)}\right) e^{-\nu\tau}\, dx + b_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u^j_{x_i t}|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(-\frac{\nu}{2} - c_0 + 1\right)|u^j_t|^2 + \left(\frac{a_1 - \nu a_0}{2} + \frac{(d^0)^2\Gamma_2}{2}\right)\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 -\right.$$
$$\left. - \frac{\nu k_0 - k_1}{p_2}\sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)}\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2}|u^j_1|^2 + \frac{a^0}{2}\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j_0|^2 + \frac{k^0}{p_1}\sum_{i=1}^n |u^j_{0x_i}|^{p(x)}\right) dx. \tag{9}$$

Вибравши $\nu = \max\{2(-c^0+1), \sup\limits_{[0,\tau]}\{(a_1/a_0 + (d^0)^2\Gamma_2/a_0); k_1/k_0\}$ з (9) легко одержати оцінку

$$\int_{\Omega_\tau}\Big(|u_t^j|^2+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u^j|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}\Big)\,dx+\int_{Q_\tau}\Big(|u_t^j|^2+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u^j|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}+\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^j|^2\Big)\,dx\,dt\leqslant M_1\int_Q|f(x,t)|^2\,dx\,dt+\int_{\Omega_0}\Big(|u_1^j|^2+$$
$$+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_0^j|^2+\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^j|^{p(x)}\Big)\,dx<M, \tag{10}$$

в якій стала M не залежить від j. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^j(x,t)\}$ (збережемо за нею те саме позначення) така, що

$$\begin{aligned}
&u_t^j\to u_t \quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega));\\
&D^\alpha u^j\to D^\alpha u \quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\quad |\alpha|\leqslant 2;\\
&u_t^j\to u_t \text{ слабко в } L^2(0,T;\ W^{1,2}(\Omega));\\
&u_{x_i}^j\to u_{x_i} \quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^{p(x)}(\Omega)),\quad i=\overline{1,n},
\end{aligned}\tag{11}$$

при $j\to\infty$ і розв'язок задачі (5), (6) можна продовжити на весь інтервал $[0,T]$.

Згідно з теоремою 5.1 [8, с.70] можемо вважати, що $u_{x_i}^j\to u_{x_i}$, $i=\overline{1,n}$ сильно в $L^2(Q)$ і майже всюди на Q. Тому за лемою 1.3 [8, с.25] $|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j\to|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}$, $i=\overline{1,n}$ слабко в $L^{p'(x)}(Q)$.

Покажемо, що u – розв'язок задачі (1)-(3). З (5) можна отримати рівність

$$-\int_{\Omega_0}u_1^jv^{j_0}\,dx+\int_Q\Big[-u_t^jv_t^{j_0}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^jD^\alpha v^{j_0}+$$
$$+\sum_{i=1}^nk_i(x,t)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^jv_{x_i}^{j_0}+c(x,t)u_t^jv^{j_0}+\sum_{i,s=1}^nb_{is}(x,t)u_{x_it}^jv_{x_s}^{j_0}+$$
$$+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}d_\alpha(x,t)D^\alpha u^jv^{j_0}\Big]\,dx\,dt=\int_Q f(x,t)v^{j_0}\,dx\,dt,$$

яка виконується для всіх $v^{j_0}=\sum\limits_{k=0}^{j_0}z_{kj_0}(t)\varphi^k(x)$, $z_{kj_0}\in C([0,T])$, $z_{kj_0}(T)=0$.

Сукупність таких функцій v^{j_0} є всюди щільна в просторі $L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)\cap W^{1,p(x)}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$. У попередній тотожності перейдемо до границі за вибраною вище послідовністю. Одержимо, що u задовольняє (4). За лемою 1.2 [8, с.20] $u\in C(0,T;L^2(\Omega))$. Отже, початкова умова (3_1) також буде виконуватися. Тому функція u є узагальненим розв'язком задачі (1) - (3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A) – (F),* $a_0-2\sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}}>0$, $d_{\alpha t}$, c_t, $b_{ist}\in L^\infty(Q)$, $i,s\in\overline{1,n}$, $|\alpha|\leqslant 2$. *Якщо* $2<p(x)<\frac{2n-2}{n-2}$ *при* $n>2$ *і* $2<p(x)<+\infty$ *при* $n\leqslant 2$, *то узагальнений розв'язок задачі (1)-(3) єдиний.*

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(3) має два узагальнені розв'язки $u^1(x,t)$,

$u^2(x,t)$. За означенням функція $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^n k_i(x,t)(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2}u^1_{x_i} - |u^2_{x_i}|^{p(x)-2}u^2_{x_i})v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t) u_{x_i t} v_{x_s} + c(x,t)u_t v + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u v\Big] e^{-\nu t}\,dx\,dt = 0 \tag{12}$$

для довільної функції $v \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)\cap W^{1,p(x)}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$, $v(x,T) = 0$ і умову $u(x,0) = 0$.

Виберемо функцію $v(x,t)$ у вигляді

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x,\theta)d\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Оцінимо кожний доданок рівності (12)

$$\tau_1 = -\int\limits_{Q_\tau} u_t v_t\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} u_t u\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\,dx;$$

$$\tau_2 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u \int\limits_t^\tau D^\alpha u\,d\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) \int\limits_0^\tau D^\beta u\,d\theta \times$$

$$\times \int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}(x,t) \int\limits_t^\tau D^\beta u\,d\theta \int\limits_t^\tau D^\alpha u\,d\theta\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2}\Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\Big|^2 dx - \tau a_1 \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2}\Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\Big|^2 dx -$$

$$- a_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2}\Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\Big|^2 dxdt.$$

Нехай

$$M_2 = \sup_{[0,T]}\Big(\int\limits_{\Omega_t} (|u^1_{x_i}|^{p(x)-2} + |u^2_{x_i}|^{p(x)-2})^{q_4}\,dx\Big)^{1/q_4}.$$

За теоремою 2.8 [12], твердженнями 1,2 та теоремами вкладення при $1/q_3 + 1/q_4 = 1/2$ та $p_2 = (2n-2)/(n-2)$ для $n > 2$, далі матимемо

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n k_i(x,t)(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2}u^1_{x_i} - |u^2_{x_i}|^{p(x)-2}u^2_{x_i}) \int\limits_t^\tau u_{x_i}\,d\theta\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant k^0(p_2-1)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|\big|(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2} + |u^2_{x_i}|^{p(x)-2})\big|\Big|\int\limits_t^\tau u_{x_i}\,d\theta\Big|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant k^0(p_2-1)r_p \int_0^\tau \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n ||u^1_{x_i}|^{p(x)-2}+|u^2_{x_i}|^{p(x)-2}|^{q_4}\,dx\right)^{1/q_4} \times$$

$$\times \left(\int_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n \left|\int_t^\tau u_{x_i}(x,\theta)\,d\theta\right|^{q_3}\right)^{1/q_3} dt \leqslant \frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2.1}\tau}{\delta}\times$$

$$\times \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx\,dt + \frac{2k^0(p_2-1)r_p\gamma_{2,1}M_2}{\delta} \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx\,dt +$$

$$+ \delta k^0(p_2-1)r_pM_2 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt\Bigg];$$

$$\tau_4 = \int_{Q_\tau} c(x,t)u_t \int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt \geqslant (c_0-c^1)\int_{Q_\tau} u^2\,dx\,dt -$$

$$- 2\tau c^1\gamma_{2,0} \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx + 2\gamma_{2,0}c^1 \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx;$$

$$\tau_5 = \int_{Q_\tau} \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)u_{x_it} \int_t^\tau u_{x_s}d\theta\,dxdt \geqslant b_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt - \int_{Q_\tau}\Bigg[b_1\delta_1 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 +$$

$$+ \frac{\gamma_{2,1}}{\delta_1}\left|\int_0^t \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|\,d\theta\right|^2\Bigg] dx\,dt - \frac{\tau b_1}{\delta_1} \int_{\Omega_0}\left|\int_0^\tau \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|\,d\theta\right|^2 dx;$$

$$\tau_6 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t)D^\alpha u \int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt = \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) \int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta \int_0^\tau u\,d\theta\,dx\,dt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_{\alpha t}(x,t) \int_t^\tau D^\alpha u\,d\theta \int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt - \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) \int_t^\tau D^\alpha u\,d\theta u\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}} \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx + \tau\sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2.0}} \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx +$$

$$+ \sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}} \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx + \delta_2 d^0\tau\Gamma_2 \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx +$$

$$+ \delta_2 d^0\Gamma_2 \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx\,dt + \frac{1}{\delta_2}\int_{Q_\tau} |u|^2\,dx\,dt,$$

де сталі b_1, c_1, d_1 залежать відповідно від функцій b_{ijt}, c_t, $d_{\alpha t}$.

З оцінок інтегралів $\tau_1 - \tau_6$ матимемо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\,dx + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}\tau}{\delta} - \tau a_1 - 2\tau c^1\gamma_{2,0} - \frac{\tau b_1}{\delta_1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}} - \tau\sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}} - \delta_2\Gamma_2\tau d^0\right)\int\limits_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau}\left[\left(|a_1| + \frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}}{\delta} + 2\gamma_{2,0}c^1 + \frac{\gamma_{2.1}}{\delta_1} + \delta_2\Gamma_2 d^0 + \sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 + \left(c^1 - c_0 + \frac{d^0}{\delta_2}\right)|u|^2\right] dx\,dt -$$

$$-\left(b_0 - b_1\delta_1 - \delta k^0(p_2-1)r_pM_2\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt. \tag{13}$$

Виберемо τ та δ з умов $a_0/2-(2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}\tau)/\delta-\tau a_1-2\tau c^1\gamma_{2,0}-\tau b_1/\delta_1-\sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}}-\tau\sqrt{d_1\Gamma_2\tau_{2,0}}-\delta_2\Gamma_2\tau d^0 \geqslant 0$; $b_0-b_1\delta_1-\delta k^0(p_2-1)r_pM_2>0$.

Тоді з нерівності (13), застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\,dx + \int\limits_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Тому $u=0$ майже всюди в Q_τ. Аналогічно можна довести, що $u=0$ майже всюди в $Q_{\tau T}$.

---

1. *Лаптев Г.Г.* Априорные оценки сильных решений полулинейных параболических уравнений// Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – N 4. – С.564-572.
2. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных параболических уравнениях высшего порядка с гельдеровыми решениями //Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т.29. – N 3. – С.501-514.
3. *Скрыпник И.В., Наумова М.А.* Нелинейные параболические задачи в областях с тонкими полостями. //Доп. НАН України. Матем.,природозн., тех. науки – 1998. – N 4. – С.59-63.
4. *Скрыпник И.В.* Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – N 3. – С.72-86.
5. *Шишков А.Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Український матем. журн. – 1995. – Т.47. – N 2. – С.277-290.
6. *Шишков А.Е.* Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т.26. – N 9. – С.1627-1634.
7. *Акулов В.Ф., Шишков А.Е.* О единственности решений смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограничен-

ными коэффициентами. // Український матем. журн.. – 1992. – Т.44. – N 2. – С.149-155.

8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
9. *Masayoshi Tsutsumi and Riichi Iino* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equation // Proc. of the Japan Academy. – 1969. – Vol.45. – N 6. – P.466-469.
10. *Хлуднев А.М.* О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14. – N 11. – С.2026-2037.
11. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного нелінійного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.15-26.
12. *Kováčik O. and J. Rákosnik* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol.41. – N 4. – P. 592-618.
13. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32. – N 5. – С.643-651.
14. *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С.85-98.
15. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.33-43.
16. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.
17. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М., 1958.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR ONE PARABOLIC NONLINEAR EQUATION

N. Protsakh

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In this work is investigated the existence and the uniqueness of the weak solution of the mixed problem for one nonlinear differential parabolic equation with the second time derivative which contains a nonlinear terms $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. The equation is considered in a bounded cylindrical domain $Q = \Omega\times(0,T)$. It is proved by the Galerkin method that if the coefficients of the equation are bounded, the right-hand side of the equation belongs to the space $L^2(Q)$, then the solution of the mixed problem exists and belongs to the generalized Sobolev space $W^{1,p(x)}(\Omega)$ on the space variables. The uniqueness of the weak solution is obtained under the additional condition about coefficients of the equation and for some variation interval of function $p(x)$.

Key words: higher order nonlinear parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2001
Прийнята до друку 03.07.2001