ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.176–180*

VISNYK LVIV UNIV. *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.176–180*

УДК 519.21

МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО РІШЕННЯ В УМОВАХ РИЗИКУ

Андрій БОБИЛЯК, Ярослав ЄЛЕЙКО

Львівський національний університет імені Івана Франка

вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто моделі прийняття рішення оптимального за декількома критеріями. Введено низку означень і доведено можливість апроксимації нескінченної множини рішень скінченною з довільною точністю. Також розглянуто моделі, в яких задачу з декількома критеріями зводять до задачі з одним критерієм.

Ключові слова: моделі багатокритеріального рішення.

Предметом теорії рішень за умов ризику є дослідження законів перетворення апріорної та апостеріорної інформації про стан об'єкта та середовища в кількісні складові інформації керування, що притаманні різним суб'єктам керування та різним керованим економічним суб'єктам (органам).

У багатьох випадках, коли різних рішень занадто багато, які суттєво ускладнюють обчислення або критерій, за яким було б раціонально відбирати рішення, є не один, або перше і друге, то було б доцільним шукати не тільки розв'язки, в яких досягається екстремум за певною ознакою (як в більшості стандартних критеріїв Байєса, мінімаксний, Джейнса, Лапласа, Вальда, Севіджа та інші [1]), а й вимагати досягнення певного рівня за одним або декількома критеріями.

Побудуємо модель прийняття рішення. Ситуацію прийняття рішення характеризуватимемо множиною $\{X, \theta, G, K\}$. Де X – скінченна або нескінченна множина рішень суб'єкта керувань такого вигляду $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \{x_\alpha\}$, де $I \subset \Re^m$. Зауважимо, що інколи зручно довизначити скінченну множину рішень до нескінченної. Наприклад, $X = \{x_{(p_1,\dots,p_m)} : (p_1, \dots, p_m) \in [0; 100]^m\}$, де рішення $x_{(p_1,\dots,p_m)}$ відповідає купівлі p_1 одиниць першого виду акцій,..., p_m одиниць m-го виду акцій.

Нехай $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ – множина станів природи (економічного середовища), яке може перебувати в одному і тільки одному стані (цей істинний стан невідомий у момент прийняття рішення). Задано також функціонал $G : \theta \times X \to \Re$, який оцінює корисність (грошовий приріст, втрати тощо) суб'єкта керування при настанні стану $\theta \in \Theta$ та прийнятті рішення $x \in X$. Нехай K – скінченна множина критеріїв, за якими доцільно відбирати рішення. Нехай також відомий апріорний розподіл $p = (p_1, \dots, p_n)$ перебування середовища у відповідному стані, тобто $p_i = P(\theta_i)$, де $i = \overline{1, n}$.

Кожен критерій $k_j \in K, j = \overline{1, s}$ повинен бути заданим, враховуючи сенс розв'язуваної задачі. За критерій можуть бути вибрані різноманітні технічні, економічні показники та інші характеристики, тобто критерій розглядають як функціонал перелічених вище множин. Розглянемо цей функціонал як функцію корисності на множині X. Тобто

$$\forall x, y \in X \quad (I_k(x) \succeq_k I_k(y)) \Longleftrightarrow (x \geqslant y). \tag{1}$$

Випадок зменшення корисності при зростанні значень функціонала розглядають аналогічно. Природно вважати, що функціонали G та I_k є обмеженими на $\Theta \times X$ та X відповідно.

Означення 1. Нехай X – простір рішень, тоді величину

$$\gamma_k = \frac{I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)}{\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)} * 100\%$$

назвемо показником оптимальності рішення $x \in X$ за критерієм K, де I_k – функціонал, який породжується критерієм K.

Теорема 1. *Нехай X – множина рішень суб'єкта керування, K – скінченний простір критеріїв і довільному критерію $k \in K$ відповідає обмежений функціонал I_k на X. Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists X_\varepsilon \subset X : (\mathrm{card}(X_\varepsilon) < \mathrm{card}(N)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x \in X \exists x' \in X_\varepsilon : \forall k \in K \;\; | \gamma_k(x) - \gamma_k(x') | < \varepsilon.$$

Інтерпретація. *Для знаходження рішення з цим показником оптимальності та з заданою наперед точністю достатньо розглядати скінченну підмножину рішень.*

Доведення. Для кожного критерію $k \in K$ введемо функцію $\varrho_k : X \times X \to \Re$, отже,

$$\forall x, y \in X \quad \varrho_k = | I_k(x) - I_k(y) |, \tag{2}$$

де I_k функціонал, який відповідає критерію K. Зауважимо, що для функції ϱ_k виконуються такі співвідношення:

1. $\forall x, y \in X \quad \varrho_k(x,y) = \varrho_k(y,x);$
2. $\forall x, y, z \in X \quad \varrho_k(x,y) \leqslant \varrho_k(x,z) + \varrho_k(y,z).$

Для того щоб стверджувати, що ϱ_k є метрикою на X, треба ще виконати умови: $\forall x, y \in X \;\; \varrho_k(x,y) = 0 \iff x = y$. Тому введемо відношення $\sim$ стандартно: $x \sim y \iff I_k(x) = I_k(y)$. Очевидно, що це буде відношення еквівалентності. Тому розглянемо фактор-множину $X/\sim \equiv \tilde{X}$. Зрозуміло, що ϱ_k буде метрикою на $\tilde{X}$.

Оскільки функціонал I_k є обмеженим на X (отже, і на $\tilde{X}$), то $\tilde{X}$ обмежений в $(\tilde{X}, \varrho_k)$. Тоді $\tilde{X}$ міститиме скінченну ε-сітку. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tilde{A}_k \subset \tilde{X} \; (\tilde{A}_k - \textit{скінченна}) : \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \; \exists \tilde{a} \in \tilde{A}_k : \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon.$$

Якщо замість класу еквівалентності $\tilde{a} \in \tilde{A}_k$ взяти його довільний представник $a \in X$, то отримаємо відповідну скінченну множину $A_k \subset X$ і $\forall x \in X \; (x \in \tilde{x} \in \tilde{X} \; \exists \tilde{a} \in \tilde{A} : \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon) \; \exists a \in A_k \; (a \in \tilde{a}) : \varrho_k(x, a) = \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon$. Тобто, A_k буде скінченною ε-сіткою в X. Нехай $K = \{k_1, \dots, k_l\}$, тоді $X_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_{k_i}$ – скінченна і така, що $\forall x \in X \; \exists x' \in X_\varepsilon \; \forall k \in K : | \gamma_k(x) - \gamma_k(x') | = \dfrac{| I_k(x) - I_k(x') |}{\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)} \leqslant \dfrac{\varrho_k(x, x')}{M} < \dfrac{\varepsilon}{M}$, де $M = \min\limits_{k \in K}(\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x))$. Твердження доведено.

Означення 2. Якщо для цього рішення $x' \in X$ існує $x'' \in X$ таке, що $G(\theta_i, x') \leqslant G(\theta_i, x'')$ $\forall i \in \overline{1,n}$ і $\exists \theta \in \Theta : G(\theta, x') < G(\theta, x'')$, то говоритимемо, що рішення x'' домінує над рішенням x' або x' домінується рішенням x''.

Означення 3. Рішення, яке домінується якимось іншим, називатимемо недопустимим, в протилежному випадку допустимим.

Природно незалежно від використовуваних критеріїв відбирати рішення серед допустимих. Якщо кожному рішенню $x \in X$ поставити у відповідність точку $g(\theta_1, x), \dots, g(\theta_n, x)) \in \Re^n$, то одержимо множину $D \subset \Re^n$. Неважко переконатись з означення допустимого рішення про таке, якщо воно існує, то відповідна йому точка буде з множини точок межі для D (надалі вважатимемо, що існує, бо в протилежному випадку X легко доозначується за неперервністю допустимими рішеннями).

1. Геометрична інтерпретація критерія Байєса

Нагадаємо, що рішення $x_0 \in X$ називається оптимальним за критерієм Байєса, якщо

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} p_i * g(\theta_i, x) = \sum_{i=1}^{n} p_i * g(\theta_i, x_0) \tag{1.1}$$

(max, бо G-функціонал, що відповідає за корисність). Якщо позначити $g(\theta_i, x) \equiv x_{(i)}$, то рішенню x буде відповідати точка $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \in \Re^n$, а тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i * x_{(i)} = \text{const}$ задаватиме гіперплощину в n-вимірному просторі. Оскільки $(\forall i\ p_i \geqslant 0) \wedge \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$, то вектор нормалі цієї гіперплощини буде утворювати гострий кут з довільною віссю координат. Отже, крайні положення цієї гіперплощини є такі, коли вектор нормалі є перпендикулярним до $(n-1)$-ї осі. Зрозуміло, що геометрично оптимальний розв'язок за критерієм Байєса шукаємо за рахунок зсуву гіперплощини вздовж своєї нормалі $(p_1/p, \dots, p_n/p)$, де $p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{1/2}$, доти, доки гіперплощина не матиме тільки одну спільну точку з множиною D. Ця єдина спільна точка і буде відповідати оптимальному рішенню за критерієм Байєса.

Висновок 1. *Якщо суб'єкт керування користується критерієм Байєса для визначення оптимального рішення, то йому достатньо відбирати їх серед тих допустимих рішень, яким відповідають "верхні" точки множини D (тобто тих, для яких існує "дотична" в цій точці гіперплощина з вектором нормалі, яка утворює гострі кути з кожною віссю координат).*

2. Багатокритеріальний випадок

Для врахування декількох критеріїв суб'єкт керування повинен вирішити якому надати більший, а якому менший пріоритет. Тому раціонально ввести в загальному лінійному випадку (нелінійний випадок розглядають аналогічно) поняття вагових коефіцієнтів (β_{ij}), де β_{ij} – числове значення ваги i-го критерія при настанні j-ого економічного стану. Природно, щоб $\forall i \in \overline{1,n}; j \in \overline{1,l}\ \beta_{ij} > 0$, а тоді шляхом перепозначення завжди можна добитись того, що $\sum\limits_{j=1}^{l} \beta_{ij} = 1$. Тоді задачу знаходження оптимального рішення можна звести до варіаційної задачі

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} p_i * \beta_{ij} * \gamma_{k_j}(x_\alpha) \ \to \max, \ \alpha \in I \subset \Re^n. \tag{2.1}$$

У разі потреби можна додати обмеження – нерівності на показники оптимальності вигляду $\sum\limits_{j=1}^{l} c_j * \gamma_j(x_\alpha) \geqslant c$, де $c, c_1, \dots, c_l$ – сталі.

У випадку незалежності вагових коефіцієнтів від стану середовища отримаємо

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^{l} \beta_j * \gamma_{k_j}(x_\alpha) \ \to \max, \ \alpha \in I \subset \Re^n. \tag{2.2}$$

Ця задача має геометричну інтерпретацію, якщо $\gamma_{k_j}(x_\alpha)$ $(\forall j \in \overline{1,l})$ і $f(\alpha)$ розглядати як поверхню в $\Re^n \times \Re$, а обмеження-нерівності відповідають тим точкам, які лежать вище відповідної гіперплощини. У випадку складнішої залежності критеріїв ніж лінійна зміни в рівнянні (2.1) очевидні. Тому для більшої наочності далі розглядатимемо лінійний випадок.

3. Зведення багатокритеріального випадку до однокритеріального
Розглянемо два підходи. Перший полягає в тому, що в задачі (2.1) зробимо заміну $\tilde{g}(\theta_i, x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_{ij} * \gamma_{k_j}(x)$. Тоді одержимо задачу

$$\sum_{i=1}^{n} p_i * \tilde{g}(\theta_i, x) \to \max. \tag{3.1}$$

Порівнюючи її з (1.1) бачимо, якщо x_0 є оптимальним рішенням нашої багатокритеріальної задачі $\{X, \theta, G, K\}$, то воно є оптимальним за критерієм Байєса для задачі $\{X, \theta, \tilde{G}\}$. Тобто, відповідно змінюємо функціонал оцінювання корисності (цінності) рішень і для нього розв'язуємо задачу на пошук оптимального рішення за критерієм Байєса серед підозрілих на оптильність рішень (див. Висновок 1).

Другий підхід збудуємо на підставі такої теореми.

Теорема 2. *Нехай задача прийняття рішення характеризується множиною $\{X, \theta, G \ , K\}$. Якщо замкнена множина D (побудована вище) опукла, то для довільного допустимого рішення $x \in X$ $\exists \tilde{p}_i, i = \overline{1,n}$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i = 1\right) \wedge \left(D \subset \left\{y \in \Re^n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * x_{(i)}\right\}\right).$$

Інтерпретація. *У випадку опуклості D множина допустимих рішень є підмножиною оптимальних рішень за критерієм Байєса для деякого апріорного розподілу $\tilde{p}(\theta)$.*

Для одержання опуклої множини замість множини D розглянемо $\tilde{D} = \operatorname{lin} D = \left\{y \in \Re^n : \exists \lambda_i \geqslant 0, \, i = \overline{1,n} \ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right) \wedge \left(y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i * y_i, \, y_i \in D, \, i = \overline{1,n}\right)\right\}$.

Під $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i * y_i$, де $y_i \in D$, розумітимемо таке "рішення", при якому з ймовірністю λ_i приймається рішення, що відповідає y_i.

Нехай множина $\tilde{D}$ породжує відповідний простір рішень $\tilde{X}$. Тоді з того, що оптимальний розв'язок x_0 для задачі $\{\tilde{X}, \theta, G, K\}$ є допустимим, випливає (за теоремою) те, що він буде оптимальним за критерієм Байєса для деякого розподілу $\tilde{p}(\theta)$, тобто

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * g(\theta_i, x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * g(\theta_i, x_0).$$

Оскільки результуюче рішення буде оптимальним за критерієм Байєса, то множину допустимих рішень, серед яких відбирається оптимальний розв'язок, можна звузити до відповідної вищепобудованої множини (див. Висновок 1). Іншими словами, багатокритеріальну задачу можна звести до однокритеріальної за допомогою або зміни апріорного розподілу $p(\theta)$, або зміни функціонала корисності G, у разі потреби нескінченну множину рішень наближають скінченною з довільною наперед заданою точністю.

1. *Вітлинський В.В., Наконечний С.І.* Ризик у менеджменті. – К., 1996.
2. *Ансофф И.* Стратегическое управление. – М., 1994.
3. *Вітлинський В.В.* Нечітка багатокритеріальна ієрархічна модель підтримки процесів прийняття рішень. – К., 1994.-33 с. Деп.- у КДЕУ 14.12.94, N 2439-Ук94.

MODELS OF A MULTICRITERIA SOLUTION IN CONDITIONS OF RISK

A. Bobilyak, Ya. Yeleyko

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The models of optimum by several criteria of a solution were considered. A several of definitions were defined ana a possibility of an infinite set approximating of solutions by final set with any exactitude was proved. There were also constructed models which reduce a problem with several criteria to a problem with one criterion.

Key words: models of multicriteria solution.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.2000

Прийнята до друку 03.07.2001