ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.181–190 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.181–190*

УДК 539.3

РІВНЯННЯ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З МАТЕРІАЛУ МУНІ

Андрій ГЛОД, Петро ДОМАНСЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

У праці побудовано математичну модель рівнянь руху циліндричних тіл з матеріалу Муні. Метод побудовано на розкладені базових параметрів у ряд за тензорною базою. Розглянуто часткові випадки одержаних рівнянь.
Ключові слова: рівняння руху циліндричних тіл.

Побудову рівнянь руху (рівноваги) циліндричних тіл із нестисливих матеріалів у рамках нелінійної теорії пружності в різних аспектах розглядало багато авторів. Наприклад, у монографії [1] з використанням узагальненої геометричної гіпотези Кірхгофа (гіпотези плоских перерізів) виведено рівняння руху тонких стержнів, які записано в зусиллях і моментах.

У цій праці запропоновано методику побудови рівнянь руху циліндричних тіл із нестисливого матеріалу, який характеризується потенціалом Муні [1], без апріорних припущень геометричного, статичного та інерційного характеру, засновану на використанні рівняння балансу енергії і розвинення визначальних параметрів в ряд за тензорною базою. Система рівнянь руху записана стосовно коефіцієнтів розвинення визначальних параметрів, які залежать від осьової координати і часу. Використовували підхід і позначення, які прийняті в праці [2].

1. За основу приймаємо виведене в праці [3] рівняння руху циліндричних тіл в інтегральній формі

$$\int\limits_D \left(\vec{\partial}_0^3 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \vec{\partial}_0^\alpha \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + \\ + \hat{F}^{(i)} = 0 \ (i = \overline{1,N}), \tag{1}$$

яке одержано за умови, що вектор переміщення $\vec{u}$ з відлікової конфігурації в актуальну конфігурацію подано у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$, які залежать від планарних координат

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{2}$$

Густина потенціальної енергії деформації матеріалу Муні $U_0 = c_1[I_1(\hat{G}) - 3] + c_2[I_2(\hat{G}) - 3]$, задається функцією інваріантів міри деформації Коші - Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [1] де c_1, c_2 – сталі, числове значення яких залежить від властивостей матеріалу. Якщо скористатися умовою нестисливості

$$I_3(\hat{G}) = 1, \tag{3}$$

а також формулами для похідних від інваріантів міри деформації Коші - Гріна $\hat{G}$ за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$ [4]

$$I_1(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r}} = 2\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_2(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r}} = 2[I_1(\hat{G})\hat{I} - \hat{G}] \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r},$$
$$I_3(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r}} = 2I_3(\hat{G})\vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^{\,T},$$

то можна одержати

$$\hat{P} = \frac{dU_0}{d\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = \{-p\hat{G}^{-1} + 2[(c_1 + c_2 I_1(\hat{G}))\hat{I} - c_2\hat{G}]\} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}. \tag{4}$$

Тут p – множник Лагранжа, тобто скалярна функція, яка залежить від матеріальних координат і часу, що визначається з рівнянь руху (рівноваги), за умови нестисливості.

Зауважимо, що

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \quad \hat{G} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T,$$
$$I_1(\hat{G}) = 3 + 2\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \tag{5}$$

і з точністю до членів другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$\hat{G}^{-1} = \hat{I} - \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} - \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T + \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} + \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} + \vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T. \tag{6}$$

Якщо підставити (5), (6) в (4) і залишити члени не вище другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, то отримаємо

$$\hat{P} = (2c_1+4c_2-p)\hat{I} + 2(c_1+c_2)\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} + (p-2c_2)\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}^T + 4c_2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}\hat{I} + 2c_2(2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u} +$$
$$+\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T\hat{I} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T) - \tag{7}$$
$$-p\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T.$$

Подамо множник Лагранжа p у вигляді розвинення

$$p = \sum_{i=1}^{N_1} \vec{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{p}^{(i-1)}(\vec{r}_{30};\tau). \tag{8}$$

Знайдемо вектори напружень $\vec{P}_j = \vec{\mathfrak{I}}_j^0 \cdot \hat{P}$. Для цього підставимо (2), (8) у вираз (7) для тензора напружень $\hat{P}$ і домножимо одержаний результат зліва на вектор $\vec{\mathfrak{I}}_j^0$. Після перетворень одержимо

$$\vec{P}_j = 2(c_1 + 2c_2)\vec{\mathfrak{I}}_j^0 + \sum_{r=1}^{N} \left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \right) + \sum_{r=1}^{N_1} \hat{K}_j^{(r)} \overset{r-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} +$$
$$+ \sum_{r,k=1}^{N} \left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$
$$\left. + \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} \right) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{N_1} \left(\hat{D}_{j1}^{(k+r)} \overset{r+k-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$
$$\left. + \hat{D}_{j2}^{(k+r)} \overset{r+k-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} \right) - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{r,k=1}^{N} \left(\hat{C}_{j1}^{(k+r+m)} \overset{k+r+m-1}{\cdot} \hat{p}^{(m-1)} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$

$$+\hat{C}_{j2}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\cdot\hat{p}^{(m-1)}\otimes\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{C}_{j3}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\cdot\hat{p}^{(m-1)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+$$

$$+\hat{C}_{j4}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\cdot\hat{p}^{(m-1)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}\Bigg). \quad (9)$$

Тут

$$\hat{A}_{j1}^{(r+1)}=2[(c_1+c_2)\delta_j^\alpha\hat{I}+2c_2\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha-c_2\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},$$

$$\hat{A}_{j2}^{(r+1)}=2[(c_1+c_2)\delta_j^3\hat{I}+2c_2\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^3-c_2\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{K}_j^{(r)}=-\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)}=2c_2[\left(\delta^{\alpha\beta}\vec{\mathcal{Э}}_j^0-\delta_j^\alpha\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta\right)\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_s^0+\hat{I}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes(2\delta_j^\beta\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha-$$

$$-\delta_j^\alpha\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta-\delta^{\alpha\beta}\vec{\mathcal{Э}}_j^0)]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\quad \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)}=2c_2[\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes(2\delta_j^3\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha-\delta_j^\alpha\vec{\mathcal{Э}}_0^3)- \quad (10)$$

$$-\delta_j^\alpha\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_s^0]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\hat{B}_{j3}^{(k+r+1)}=2c_2\left[\hat{I}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes(2\delta_j^\beta\vec{\mathcal{Э}}_0^3-\delta_j^3\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta)-\right.$$

$$\left.-\delta_j^3\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_s^0\right]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\hat{B}_{j4}^{(k+r+1)}=2c_2\left[(\vec{\mathcal{Э}}_j^0-\delta_j^3\vec{\mathcal{Э}}_0^3)\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_s^0+\right.$$

$$\left.+\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes(\delta_j^3\vec{\mathcal{Э}}_0^3-\vec{\mathcal{Э}}_j^0)\right]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{D}_{j1}^{(k+r)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{D}_{j2}^{(k+r)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\hat{C}_{j1}^{(k+r+m)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j2}^{(k+r+m)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^\alpha\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j3}^{(k+r+m)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes$$

$$\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^\beta\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j4}^{(k+r+m)}=\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes\vec{\mathcal{Э}}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^3\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}\otimes\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)};$$

δ^{kn},δ_k^n – символи Кронекера.

Якщо внести вирази (9) з коефіцієнтами (10) для векторів $\vec{P}_j$ у систему рівнянь руху (1), згрупувати подібні члени і виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Муні в локальній формі

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{A}_1^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{A}_2^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{A}_3^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}\right)+\sum_{k=1}^{N_1}\Bigg(\hat{K}_1^{(ik-1)}\overset{k-1}{\cdot}\hat{p}^{(k-1)}+$$

$$+\hat{K}_2^{(ik-1)}\overset{k-1}{\cdot}\frac{\partial\hat{p}^{(k-1)}}{\partial\xi^3}\Bigg)+\sum_{r,k=1}^{N}\Bigg[\hat{B}_1^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_2^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+$$

$$+\hat{B}_3^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{B}_4^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_5^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+$$

$$+\hat{B}_6^{(ikr)\ kr} \overset{\cdot}{\ } \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)}] + \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N_1}[\hat{D}_1^{(ikr-1)\ kr-1} \overset{\cdot}{\ } \frac{\partial \hat{p}^{(r-1)}}{\partial \xi^3} \odot \hat{u}^{(k)} +$$

$$+\hat{D}_2^{(ikr-1)\ kr-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(r-1)} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{D}_3^{(ikr-1)\ kr-1} \overset{\cdot}{\ } \left(\frac{\partial \hat{p}^{(r-1)}}{\partial \xi^3} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(r-1)} \odot \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) +$$

$$+\hat{D}_4^{(ikr-1)\ kr-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(r-1)} \odot \hat{u}^{(k)}\Big] + \sum_{m=1}^{N_1}\sum_{k,r=1}^{N}\Big[\hat{C}_1^{(ikrm-1)\ krm-1} \overset{\cdot}{\ } \frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \odot \hat{u}^{(r)} \odot \hat{u}^{(k)} +$$

$$+\hat{C}_2^{(ikrm-1)\ krm-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(m-1)} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \odot \hat{u}^{(k)} + \hat{C}_3^{(ikrm-1)\ krm-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(m-1)} \odot \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} +$$

$$+\hat{C}_4^{(ikrm-1)\ krm-1} \overset{\cdot}{\ } \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(r)} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(m-1)} \odot \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) +$$

$$+\hat{C}_5^{(ikrm-1)\ krm-1} \overset{\cdot}{\ } \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \odot \hat{u}^{(k)} + \hat{p}^{(m-1)} \odot \frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \otimes \hat{u}^{(k)}\right) +$$

$$+\hat{C}_6^{(ikrm-1)\,krm-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{C}_7^{(ikrm-1)\,krm-1} \overset{\cdot}{\ } \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} +\right.$$

$$\left.+\hat{p}^{(m-1)} \odot \frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(m-1)} \odot \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \odot \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) + \hat{C}_8^{(ikrm-1)\,krm-1} \overset{\cdot}{\ } \hat{p}^{(m-1)} \odot \hat{u}^{(r)} \otimes$$

$$\otimes \hat{u}^{(k)}\Big] + \hat{S}^{(i)} + \hat{F}^{(i)} = \rho_0 \sum_{k=1}^{N} \hat{M}^{(ik)\ k} \overset{\cdot}{\ } \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{\partial \tau^2} \qquad (i = \overline{1,N}). \tag{11}$$

Тут

$$\hat{A}_1^{(ik)} = 2\int_D \vec{\partial}_0^t \odot \hat{\Phi}^{(i-1)} \odot [(c_1+c_2)\vec{\partial}_t^0 + c_2\delta_t^3\vec{\partial}_3^0] \odot \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}_2^{(ik)} = 2c_2 \int_D \vec{\partial}_0^t \otimes$$

$$\otimes[\hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes (2\delta_t^3\vec{\partial}_0^\alpha - \delta_t^\alpha\vec{\partial}_0^3) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \odot (\delta_t^3\vec{\partial}_0^\gamma - 2\delta_t^\gamma\vec{\partial}_0^3) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)}] d\Sigma_0,$$

$$\hat{A}_3^{(ik)} = -2\int_D \vec{\partial}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes [(c_1+c_2)\delta^{\alpha\gamma}\vec{\partial}_t^0 + 2c_2\delta_t^\gamma\vec{\partial}_0^\alpha - c_2\delta_t^\alpha\vec{\partial}_0^\gamma] \odot \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{K}_1^{(ik-1)} = \int_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{K}_2^{(ik-1)} = -\int_D \vec{\partial}_3^0 \odot \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_1^{(ikr)} = -2c_2 \int_D \vec{\partial}_0^t \odot \hat{\Phi}^{(i-1)} \left(\vec{\partial}_t^0 \odot \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \odot \vec{\partial}_0^\beta + \delta_t^\beta \vec{\partial}_0^s \odot \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \odot \vec{\partial}_s^0\right) \odot \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_2^{(ikr)} = 4c_2 \int_D \vec{\partial}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \odot \vec{\partial}_t^0 \odot \hat{\Phi}^{(k-1)} \odot \vec{\partial}_0^\alpha \odot \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_3^{(ikr)} = \hat{B}_1^{(ikr)} + \hat{B}_2^{(ikr)} -$$

$$-2c_2 \int_D \vec{\partial}_0^t \odot \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \odot (\delta_t^\gamma \vec{\partial}_0^s \odot \hat{\Phi}^{(k-1)} \odot \vec{\partial}_s^0 - \vec{\partial}_t^0 \odot \hat{\Phi}^{(k-1)} \odot \vec{\partial}_0^\gamma) \odot \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_4^{(ikr)} = \hat{B}_7^{(ikr)} - 4c_2 \int\limits_D \delta^{\gamma\beta} \vec{\partial}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\partial}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_5^{(ikr)} = \hat{B}_7^{(ikr)} + 2c_2 \int\limits_D \delta^{\gamma\alpha} \vec{\partial}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes (\vec{\partial}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 + \delta_t^3 \vec{\partial}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\partial}_s^0) \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \ \hat{B}_6^{(ikr)} = -2c_2 \int\limits_D \vec{\partial}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \Big[(\delta^{\alpha\beta} \delta_t^\gamma - \delta^{\alpha\gamma} \delta_t^\beta) \vec{\partial}_0^S \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_S^0 +$$

$$+ \vec{\partial}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes (2\delta^{\gamma\beta} \vec{\partial}_0^\alpha - \delta^{\alpha\gamma} \vec{\partial}_0^\beta - \delta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_0^\gamma) \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \ \hat{B}_7^{(ikr)} =$$

$$= 2c_2 \int\limits_D \delta^{\alpha\beta} \vec{\partial}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \left(\delta_t^3 \vec{\partial}_0^S \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_S^0 - \vec{\partial}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_3^0 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \tag{12}$$

$$\hat{D}_1^{(ikr-1)} = \int\limits_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \hat{D}_2^{(ikr-1)} = \hat{D}_1^{(ikr-1)} + \hat{D}_4^{(ikr-1)},$$

$$\hat{D}_3^{(ikr-1)} = \int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \ \hat{D}_4^{(ikr-1)} = -\int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes$$

$$\otimes \vec{\partial}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \ \hat{C}_1^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_0^\beta \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_2^{(ikrm-1)} = \hat{C}_1^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\partial}_0^\gamma \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes$$

$$\otimes \vec{\partial}_0^\beta \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_3^{(ikrm-1)} = \hat{C}_1^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\partial}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes$$

$$\otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_4^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_5^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_0^\beta \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_6^{(ikrm-1)} = \hat{C}_4^{(ikrm-1)} + \hat{C}_5^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\partial}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes$$

$$\otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_7^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\partial}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_8^{(ikrm-1)} = \int\limits_D \vec{\partial}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\partial}_0^\gamma \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\partial}_0^\beta \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)}d\Sigma_0, \hat{S}^{(i)} = -2(c_1+2c_2)\int\limits_D \vec{\mathcal{Э}}_0^{\gamma}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\gamma}}d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(ik)} = \int\limits_D \vec{\mathcal{Э}}_0^{t}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_t^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}d\Sigma_0.$$

Зауваження. З метою скорочення записів у формулах (11), (12), на відміну від позначень праці [2], індекси "(ik)", "$(ik-1)$", "(ikr)", "$(ikr-1)$", "$(ikrm-1)$" означають відповідно такі ранги тензорних функцій: $i+k$, $i+k-1$, $i+k+r$, $i+k+r-1$, $i+k+r+m-1$, а символами "$\overset{kr}{\cdot}$", "$\overset{kr-1}{\cdot}$", "$\overset{krm-1}{\cdot}$" позначено $k+r$, $k+r-1$, $k+r+m-1$ – кратні внутрішні добутки тензорів.

Система (11) складається з N тензорних диференціальних рівнянь у частинних похідних стосовно $N+N_1$ коефіцієнтів $\hat{u}^{(k)}$, $\hat{p}^{(i-1)}$ $(k=\overline{1,N},\ i=\overline{1,N_1})$ розвинень (2), (8) вектора переміщення $\vec{u}$ і множника Лагранжа p. Для того щоб одержати необхідні ще N_1 рівнянь, скористаємося умовою нестисливості матеріалу (3). Можна переконатися, що в прийнятому наближенні

$$I_3(\hat{G}) = 1+2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}+2(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u})^2-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\cdot\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},$$

тобто умову нестисливості матеріалу можна записати у вигляді

$$\Psi = 2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}+2(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u})^2-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\cdot\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}=0. \tag{13}$$

Підставимо (2) в (13). В результаті отримаємо

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N} 2\left(\vec{\mathcal{Э}}_0^{\alpha}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}+\vec{\mathcal{Э}}_0^{3}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}\right)+\sum_{i,k=1}^{N}\left[\left(2\vec{\mathcal{Э}}_0^{\beta}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^{\alpha}-\right.\right.$$

$$\left.-\vec{\mathcal{Э}}_0^{\alpha}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^{\beta}\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{i+k}{\cdot}\hat{u}^{(i)}\otimes\hat{u}^{(k)}+(2\vec{\mathcal{Э}}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^{\alpha}-\vec{\mathcal{Э}}_0^{\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_3^{0})\otimes$$

$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{i+k}{\cdot}\hat{u}^{(i)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}+\left(2\vec{\mathcal{Э}}_0^{\beta}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_3^{0}-\vec{\mathcal{Э}}_3^{0}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_0^{\beta}\right)\otimes$$

$$\left.\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i+k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(i)}}{\partial\xi^{3}}\otimes\hat{u}^{(k)}+\vec{\mathcal{Э}}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\mathcal{Э}}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i+k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(i)}}{\partial\xi^{3}}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}\right].$$

Якщо тепер функцію Ψ подати у вигляді розвинення

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N_1}\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i-1}{\cdot}\hat{\Psi}^{(i-1)}(\{\hat{u}^{(k)}\}),$$

то з умови, що $\Psi=0$, одержимо необхідних N_1 рівнянь

$$\hat{\Psi}^{(i-1)}(\{\hat{u}^{(k)}\})=0\quad(i=\overline{1,N_1}), \tag{14}$$

які спільно з рівняннями системи (11) становлять повну систему рівнянь для визначення шуканих функцій.

З системи рівнянь (11), (14), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Трелоара [4]. Для цього достатньо у формулах (12) прийняти, що $c_2=0$.

2. Запишемо систему рівнянь (11) для випадку, коли у розвиненнях (2), (8) зберігається лише по два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}_0^n\}$, тобто

приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$, $p = \hat{p}^{(0)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{p}^{(1)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{Э}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k}\vec{Э}_0^\alpha \otimes \vec{Э}_0^k$, $\hat{p}^{(1)} = p_k \vec{Э}_0^k$. Система (11) складається з векторного ($i = 1$) та тензорного ($i = 2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх у координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Відомо, що вектор статичних моментів першого порядку та відцентровий момент інерції області D дорівнюють нулю. Якщо обчислити коефіцієнти за формулами (12), підставити їх в (11) і виконати відповідні згортки, то отримаємо

$$2(c_1+c_2)\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} - 2c_2\Big[\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3} + u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\Big(\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big) + \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3}\Big(\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}+u_{\beta3}\Big) + u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial^2 u_s}{(\partial\xi^3)^2} +$$

$$+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - 2\Big(u^\beta_\beta \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3})\Big] + \hat{p}^{(0)}\Big[\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\Big(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) - u_{\beta3}\frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3} -$$

$$-u_{\alpha3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\Big] + \frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}\Big[u_{\alpha3}\Big(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) - u_{\beta3}u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\Big] - \sum_{\beta=1}^{2} \frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\Big[u_{\alpha3}\Big(\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3} + p_\beta\frac{\partial^2 u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\Big)$$

$$+p_\beta \frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big] + \frac{F_\alpha}{s_0} = \rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\tau^2} \quad (\alpha=1,2),$$

$$2(c_1+2c_2)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + 2c_2\Big[2\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3} - u^{\beta\cdot}_{\cdot3}\Big(\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2} + 2\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big) - \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3} + 2\Big(u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + u^\alpha_\alpha\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\Big)\Big] + \hat{p}^{(0)}\Big[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\Big(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) - u_{\beta3}\frac{\partial^2 u^\beta}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta}{\partial\xi^3} -$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial^2 u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big] - \frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}\Big[1+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}u^{\beta3} - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\Big(\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big)^2\Big] -$$

$$-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\Big[p_\beta(u_{\gamma3}\frac{\partial^2 u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_{\gamma3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial^2 u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\Big(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) + 2\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}) +$$

$$+\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\Big(u_{\gamma3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Big(2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-1\Big)\Big)\Big] + \frac{F_3}{s_0} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1+c_2)\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} - c_1 u_{\alpha\alpha} - c_2\Big[2(1+u_{\alpha\alpha})\Big(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\beta_\beta\Big) + \frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3} - \Big(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\Big)^2 - u_{\alpha3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}$$

$$+u^{\cdot s}_{\beta\cdot}u^{\beta\cdot}_{\cdot s} - u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}u_{\alpha s} - u_{\beta\alpha}(u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot} + u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}) + \frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\Big(u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial^2 u_{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2} - 2\Big(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} +$$

$$+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\Big) + \frac{\partial u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\Big) + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\Big(\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3} - \Big(\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\Big)^2\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\hat{p}^{(0)}}{2}\Big[1 - u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}u_{\beta\alpha} - \frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\Big(u_{\alpha3}\frac{\partial^2 u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2} + \Big(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\Big)^2\Big)\Big] +$$

$$+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\Big[-\frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}u_{\alpha3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3} + p_\alpha\Big(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\Big(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big) - u_{\beta3}\frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3} - u_{\alpha3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\Big) +$$

$$+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(u_{\alpha3}\biggl(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\beta3}u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\biggr)\biggr]+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{2s_0}p_\beta u_{\alpha3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}-c_1-2c_2+\frac{F_{\alpha\alpha}}{2s_0}=$$

$$=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1+c_2)\frac{\partial^2u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-(c_1+c_2)u_{\alpha\beta}+c_2\biggl[u_{\beta\alpha}+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+u_{\alpha3}\biggr)+u_{\alpha s}u_{\beta\cdot}^{\cdot s}-2u_{\alpha\beta}\biggl(u_\gamma^\gamma+$$

$$+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)+u_{\gamma\beta}\biggl(u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}+u_{\cdot\alpha}^{\gamma\cdot}\biggr)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\biggl(2u_{\cdot\gamma}^{\gamma\cdot}\frac{\partial^2u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-u_{\gamma\beta}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}}{(\partial\xi^3)^2}-u_{\beta\cdot}^{\cdot s}\frac{\partial^2u_{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}+2\frac{\partial u_\gamma^\gamma}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}-\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial\xi^3}\biggr)+\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{J^{\gamma\gamma}}{s_0}\frac{\partial u_{\gamma\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial\xi^3}\biggr]+\frac{\hat p^{(0)}}{2}\biggl[-u_{\beta\alpha}+u_{\beta3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}u_{\gamma\alpha}-$$

$$-\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\biggl(u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggr)\biggr]+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\biggl[-\frac{\partial\hat p^{(0)}}{\partial\xi^3}u_{\beta3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}+p_\alpha\biggl(\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\biggl(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-$$

$$-u_{\gamma3}\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}-u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\frac{\partial u_{\gamma3}}{\partial\xi^3}-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}\biggr)+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(u_{\beta3}\biggl(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\gamma3}u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\biggr)\biggr]+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{J^{\gamma\gamma}}{2s_0}p_\gamma u_{\beta3}\frac{\partial u_{\gamma\alpha}}{\partial\xi^3}+\frac{F_{\beta\alpha}}{2s_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha,\beta=1,2;\ \ \alpha\neq\beta),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1+2c_2)\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}-(c_1+c_2)u_{\alpha3}+c_2\biggl[\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(1+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\alpha3}\biggl(2u_\beta^\beta+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)+$$

$$+u_{\alpha\cdot}^{\cdot s}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}+u_{\beta3}\biggl(u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}+u_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}\biggr)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\biggl(2\biggl(u_\beta^\beta\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_\beta^\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-$$

$$-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}\biggr)+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\biggr]+\frac{\hat p^{(0)}}{2}\biggl[\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-1\biggr)+u_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}+$$

$$+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\biggl(\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\biggl(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}-2\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggr)+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\biggr]+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial\hat p^{(0)}}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggl(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\beta3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}\biggr)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\biggl[p_\alpha\biggl(\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}$$

$$\times\biggl(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u^\beta}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta}{\partial\xi^3}\biggr)-\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(1+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-1\biggr)+u_{\cdot3}^{\beta\cdot}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\biggr)\biggr]+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{2s_0}p_\beta\biggl[\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}-\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\biggl(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\biggr)+u_{\gamma\alpha}\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}\biggr]-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha\beta\beta}}{2s_0}\biggl[2\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}$$

$$+2p_\beta\biggl(\frac{\partial^2u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\biggr)+2p_\alpha\frac{\partial^2u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\biggr)^2\biggr]+$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha\alpha\alpha}}{s_0}\biggl[\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\biggl(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggr)^2+2p_\alpha\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\biggr]+\frac{F_{3\alpha}}{2s_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2).\quad(15)$$

У рівняннях (15) використано позначення: $u_{\alpha k} = u_{\alpha\cdot}^{\cdot k} = u_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = u^{\alpha k}$ $u_k = u^k$; $F_i = \vec{\mathcal{E}}_i^0 \cdot \hat{F}^{(1)}$; $F_{kn} = \vec{\mathcal{E}}_n^0 \otimes \vec{\mathcal{E}}_k^0 \cdot \cdot \hat{F}^{(2)}$; s_0 -площа області D;

$$J^{\alpha\alpha} = \int\limits_D (\xi^\alpha)^2 d\Sigma_0, \quad J^{\alpha\alpha\beta\beta} = \int\limits_D (\xi^\alpha)^2 (\xi^\beta)^2 d\Sigma_0 \quad -$$

моменти інерції другого та четвертого порядків області D стосовно осей координат. Нагадаємо, що за індексами α, β, γ, які один раз повторюються зверху і знизу, проводиться підсумовування від 1 до 2, а за всіма іншими індексами – від 1 до 3.

Можна переконатися, що рівняння (14) в прийнятому наближенні мають вигляд

$$\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\left(2 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) + 2u_\beta^\beta(1 + u_\beta^\beta) + 4u_\beta^\beta \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} - u_{\beta\alpha}u^{\alpha\beta} - 2u_{\beta 3}\frac{\partial u^\beta}{\partial \xi^3} = 0,$$

$$\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\left(1 + 2u_\beta^\beta + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) - u_{\beta 3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \tag{16}$$

Нелінійні диференціальні рівняння (15), (16) становлять повну систему для визначення коефіцієнтів u_k, $u_{\alpha k}$, $\hat{p}^{(0)}$, p_α ($\alpha = 1, 2;\ k = \overline{1, 3}$), якими визначаються вектор переміщення і множник Лагранжа.

1. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Л., 1986.
2. *Доманський П. П.* Побудова і аналіз рівнянь руху циліндричних тіл із матеріалу Мурнагана // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. - Вип. 53. - С.107-118.
3. *Доманський П. П.* Математичні моделі нелінійної динамічної теорії пружності циліндричних тіл. – Львів, 1995. – 43 с. (Препринт / НАН України. ІППММ: 16-95).
4. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. - М., 1980.

MOTION EQUETIONS FOR CYLINDRICAL SOLIDS OF MOONEY MATERIAL

Hlod A., Domans'kyj P.

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A model of motion equations for cylindrical solids of Mooney material is derived. The derivation method is relied on expanding base parameters in series by tensor basis. The spesial cases of obtained equations are considered.

Key words: motion equations for cylindrical solids.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.2000

Прийнята до друку 03.07.2001