

УДК 539.3

ДО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРИ ЕКСПОНЕНЦІЙНОМУ ЗАКОНІ ДЕФОРМУВАННЯ ШОРСТКОСТІ

Наталія ДЯЧЕНКО, Світлана ШИШКАНОВА*Запорізький державний університет**вул. Жуковського, 66 69063 Запоріжжя, Україна*

Розглянуто задачу контакту плоского кругового в плані штамп з пружним півпростором із шорсткістю при деформуванні шорсткості за експоненціальним законом. Цей закон відповідає зміні фактичної площі контакту, яку виявили Г.М.Бартенев і В.В.Лаврентьев. Залежно від коефіцієнтів шорсткості (два випадки: великих і малих їхніх значень) ця задача потребує різних методів розв'язку. Для кожного з цих випадків інтегральне рівняння задачі зводиться до нескінченної системи нелінійних рівнянь, до якої застосовують метод послідовних наближень і метод редукції. У праці проведено аналіз залежності функції тиснення і поглиблення штамп від коефіцієнтів шорсткості і від діючої сили.

Ключові слова: контакт плоского кругового штамп.

У своєму первісному варіанті дискретна модель не враховує вплив мікроступів, тобто напружено-деформівний стан матеріалу в області плями контакту повністю визначається навантаженням, яке сприймає цей контакт. Ця гіпотеза забезпечує гарну відповідність між теорією й експериментом при малій щільності плям контакту. Однак у тих випадках, коли ця вимога не виконується, це припущення призводить до помилкових результатів. Наочним прикладом обмеженості такої моделі є насичення площі контакту, яку експериментально виявили Г.М.Бартенев і В.В.Лаврентьев [1, 2, 3] на полімерних матеріалах і гумах. Експериментально одержана залежність фактичної площі контакту від тиску для багатьох полімерів і гум має вигляд [2, с.118]

$$\Lambda = 1 - \exp(-\chi p/E),$$

де Λ – відносна величина фактичної площі контакту; χ – параметр, що залежить від шорсткості поверхонь; p – номінальне навантаження; E – модуль пружності.

Внаслідок дії сили Q , яка притискає штамп до півпростору перпендикулярно до площини $z = 0$, і лінія дії якої проходить через початок координат, плоский штамп переміститься на глибину δ . Переміщення точки півпростору складаються з пружних переміщень півпростору в цій точці W_2 і додаткового переміщення точки за рахунок зім'яття мікроступів W_1 , тобто ([2, с.70], [3]) $W_1 + W_2 = \delta$.

Враховуючи вищезгадане, розглянемо два види нелінійної залежності зім'яття мікроступів від нормального тиснення ([2, с.70], [3])

$$W_1' = B[p(\rho, \theta)]^k, \quad (1)$$

де B і k – показники шорсткості,

$$W_1'' = h [1 - \exp(-\beta p(\rho, \theta)/E)], \quad (2)$$

β , h – параметри, які залежать від шорсткості поверхонь.

Відмітимо, що для $k = 1$ при невеликих навантаженнях, коли $\beta p(\rho, \theta)/E$ – мале, виконується $W_1' \approx W_1''$, при цьому

$$B = h\beta/E.$$

Випадок $k = 1$ з деформуванням шорсткості за законом (1) розглянули автори в [4].

Інтегральне рівняння розподілу нормального тиснення під круговим в плані плоским штампом, який вдавлюється вертикальною силою Q у пружний півпростір з шорсткою поверхнею при деформуванні шорсткості за законом (2), характеризується функцією $p(\rho)$, яка задовольняє інтегральне рівняння:

$$h_1 [1 - \exp(-\alpha p_1(\rho))] + \frac{1}{a} \iint_{\Omega} \frac{p_1(\rho')}{r(\rho, \rho')} ds = \delta_1. \quad (3)$$

Тут Ω – круг радіуса a , (ρ, θ) – полярні координати точок півпростору, $(\rho, \theta) \in \Omega$, $ds = \rho' d\rho' d\theta'$, $r(\rho, \rho') = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}$, $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, $h_1 = \frac{h}{a}$, $p_1(\rho) = c^{-1}p(\rho)$, $c = \frac{\pi E}{1-\nu^2}$, $\alpha = \frac{\beta \pi}{1-\nu^2}$, δ – поглиблення штампа при вдавненні, ν – коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо оператор A на просторі неперервних функцій, що має вигляд [5]

$$(Ap_1)(\rho) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega} \frac{p_1(\rho')}{r(\rho, \rho')} ds.$$

для якого $\|A\| \leq 1$.

1. Випадок перший: h_1 – велике

Нехай

$$\psi(\rho) = -[1 - \exp(-\alpha p_1(\rho))] + \frac{\delta_1}{h_1},$$

тоді

$$p_1(\rho) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1} \right],$$

а рівняння (3) перепишемо у вигляді

$$\psi = G\psi, \quad (4)$$

$$(G\psi)(\rho) = -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} A \ln \left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1} \right] = \frac{2\pi}{h_1} [Ap_1](\rho).$$

Це рівняння Гамерштейна. Рівняння (4) має єдиний розв'язок у класі неперервних функцій, який можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$h_1 > \frac{2\pi}{\alpha} \exp \frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}, \quad (5)$$

де $Q_1 = Qc^{-1}$, а Q – вертикальна сила, діюча на штамп по осі симетрії.

Співвідношення (5) свідчить про те, що рівняння (4) можна розв'язати методом послідовних наближень з допомогою такої заміни при великих h_1 .

2. Метод розв'язування рівняння (4)

Представимо невідому функцію у вигляді

$$\psi(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i},$$

тоді

$$p_1(\rho) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right] = -\frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j}, \quad (6)$$

де

$$\xi_0 = \gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{h_1}, \quad \xi_j = \gamma_j, \quad \beta_0 = \sigma_0 = \ln \xi_0, \quad \beta_j = \frac{\xi_j}{\xi_0} \quad (j \in \mathbb{N});$$

$$a_{j,m} = \sum_{i=1}^j a_{j-i,m-i+1} \beta_i, \quad a_{j,j} = \beta_j \quad (m = 1, \dots, j; \quad j \in \mathbb{N});$$

$$p_j = \frac{(-1)^j}{j}; \quad \sigma_j = \sum_{m=1}^j p_{j-m+1} a_{j,m} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Нехай

$$h_{i,j} = \left[\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \right]^2 \frac{1}{2j-2i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, 2, \dots).$$

Підставивши (6) і вирази $A \left(\left[\frac{\rho}{a} \right]^{2j} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{j,i} \left[\frac{\rho}{a} \right]^{2i}$ ([6]) в (4), прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\frac{\rho}{a}$, одержимо нескінченну систему нелінійних рівнянь

$$\gamma_i = -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j h_{j,i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Якщо на штамп діє вертикальна сила Q , спрямована по осі симетрії, то з умови рівноваги

$$Q = \iint_{\Omega} p(\rho') ds$$

маємо

$$\delta_1 = h_1 \left(1 + \gamma_0 - \exp \left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{j+1} \right] \right), \quad (8)$$

де

$$\sigma_i = \sigma_i(\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_1).$$

3. Про можливість використання методу редукції для розв'язку системи нелінійних рівнянь (7), (8)

Розглянемо відображення $P_N : C[0, a] \rightarrow R_N[0, a]$, де $R_N[0, a]$ – простір поліномів N -го степеня, визначених на $[0, a]$. Результат дії цього відображення на f позначимо $\bar{f}_N$ (тобто $\bar{f}_N = P_N f$).

Для спрощення записів індекс N опускатимемо (замість P_N і $\bar{f}_N$ писати P і $\bar{f}$ відповідно).

Наближене рівняння набуде вигляду

$$\bar{\psi} = \overline{G\psi}, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} (\overline{G\psi})(\rho) &= -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^N \sigma_j h_{j,i} \right) \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2i} = -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} [PA P \phi(\bar{\psi})](\rho), \\ \phi(\psi(\rho)) &= \ln \left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1} \right]. \end{aligned}$$

1. Правильні такі співвідношення:

а) умова близькості відображень

$$\begin{aligned} \|PG\bar{\psi}_1 - \overline{G\psi}_1 - (PG\bar{\psi}_2 - \overline{G\psi}_2)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \|PA\| \|I - P\| \|\phi(\bar{\psi}_1) - \phi(\bar{\psi}_2)\| \leq \\ &\leq u(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1 \|\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2\| = \eta \|\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2\|, \end{aligned}$$

де

$$u = \frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \exp \frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}, \quad \varepsilon_1 = \|I - P\|, \quad \eta = u(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_1$$

(вираз для ε_1 залежить від P , в позначенні якого опущений індекс N , тому матимемо на увазі залежність ε_1 від N);

б) умова доброї апроксимації елементів вигляду $G\psi$ елементами з $R_N[0, a]$ для будь-яких елементів ψ_1 і ψ_2 із $C[0, a]$ розглянемо елементи з $R_N[0, a]$ вигляду

$$y_m = -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} [PA \phi(\psi_m)](\rho) \quad (m = 1, 2),$$

тоді

$$\begin{aligned} \|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_2 - y_2)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \|A\| \|I - P\| \|\phi(\psi_1) - \phi(\psi_2)\| \leq \\ &\leq u\varepsilon_1 \|\psi_1 - \psi_2\| = \eta_1 \|\psi_1 - \psi_2\|, \quad \eta_1 = u\varepsilon_1. \end{aligned}$$

2. Про можливість розв'язку наближеного рівняння (9).

Відображення $H\psi = \psi - G\psi$ на класі неперервних функцій за умов (9) має обернене H^{-1} , неперервність якого впливає з нерівностей

$$\|H\psi_1 - H\psi_2\| \geq (1 - u)\|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{1}{\eta_3} \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Величина

$$\lambda = (\eta + \|I - P\|\eta_1)\eta_3 = \frac{u(1 + 2\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1 - u}$$

на класі неперервних на $[0, a]$ функцій при $u < 1$ і достатньо малих ε_1 (тобто для великих N) менша за 1.

Оскільки виконані умови а. б, то з [7, с.524] $\bar{H}$ має неперервне обернене і для будь-яких y_1 і y_2 з $R_N[0, a]$

$$\|\bar{H}^{-1}y_1 - \bar{H}^{-1}y_2\| \leq \frac{\eta_3}{1 - \lambda} \|y_1 - y_2\|.$$

3. Збіжність послідовності $\bar{\psi}_N^*$ наближених розв'язків до точного розв'язку. Пригадаємо спочатку, що в позначеннях опускали індекс N у P і $\bar{f}$. З визначення η , η_1 випливає, що вони залежать від $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N)$, тому $\eta = \eta(N)$, $\eta_1 = \eta_1(N)$, а також

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \eta(N) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \eta_1(N) \|P_N\| = 0.$$

На підставі 2 та з [7, с.527] ми дійшли висновку: при достатньо великих N наближене рівняння має розв'язок і послідовність наближених розв'язків $\bar{\psi}_N^*$ збігається до точного ψ^* , тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi^* - \bar{\psi}_N^*\| = 0.$$

4. Випадок другий: h_1 — мале

Рівняння (1) після заміни

$$\mu = 1 - \frac{h_1}{2\pi}, \quad \psi(\rho) = -[1 - \exp(-\alpha p_1(\rho))] + \frac{\delta_1}{2\pi}$$

перепишемо у вигляді

$$\psi(\rho) = \mu \left[\psi(\rho) - \frac{\delta_1}{2\pi} \right] - \frac{1}{a} A \ln \left[1 + \psi(\rho) - \frac{\delta_1}{2\pi} \right]. \quad (10)$$

Рівняння (10) має єдиний розв'язок у класі неперервних функцій, який можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$\frac{1}{\alpha} \exp \frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} < 1 \quad \text{і} \quad h_1 < 2\pi. \quad (11)$$

Аналогічно до першого випадку здобудемо нескінченну систему нелінійних рівнянь

$$\gamma_i = \mu \gamma_i - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j h_{j,i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

де

$$\gamma_0 = \mu \gamma_0 - \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j h_{j,0}. \quad (12)$$

$$\delta_1 = 2\pi \left(1 + \gamma_0 - \exp \left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{j+1} \right] \right), \quad \sigma_i = \sigma_i(\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_1)$$

за такими самими позначеннями коефіцієнтів, що і вище, крім $\xi_0 = \gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{2\pi}$.

За умов (11) на класі неперервних функцій доведення можливості використання методу редукції проводять аналогічно до випадку великих h_1 .

5. Числові результати.

Метод послідовних наближень при виконанні описаних умов (5) або (11) застосовують для розв'язування відповідних скінчених систем, які утворилися з нескінчених (7), (8) або (12).

Як нульове наближення в методі послідовних наближень використовуємо

$$\delta_1^{(0)} = h_1 \left(1 - \exp \left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} \right] \right) + \frac{\pi Q_1}{2a^2},$$

$$\gamma_0^{(0)} = C\delta_1^{(0)} - \left(1 - \exp\left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}\right]\right) + \frac{\pi Q_1}{2a^2}, \quad (C = \max\{2\pi, h_1\}),$$

$$\gamma_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Точність наближених значень функції тиснення дорівнює сумі ε_1 і точності методу послідовних наближень, яку задавали значенням 10^{-6} . Алгоритм реалізовано на мові програмування FORTRAN 77. Результати зображено на рисунках. Якщо графіки розташовані один на одному (малий на великому), то малому відповідає тиск $Q_1 = 0,008625$, а великому здебільшого $Q_1 = 0,5$.

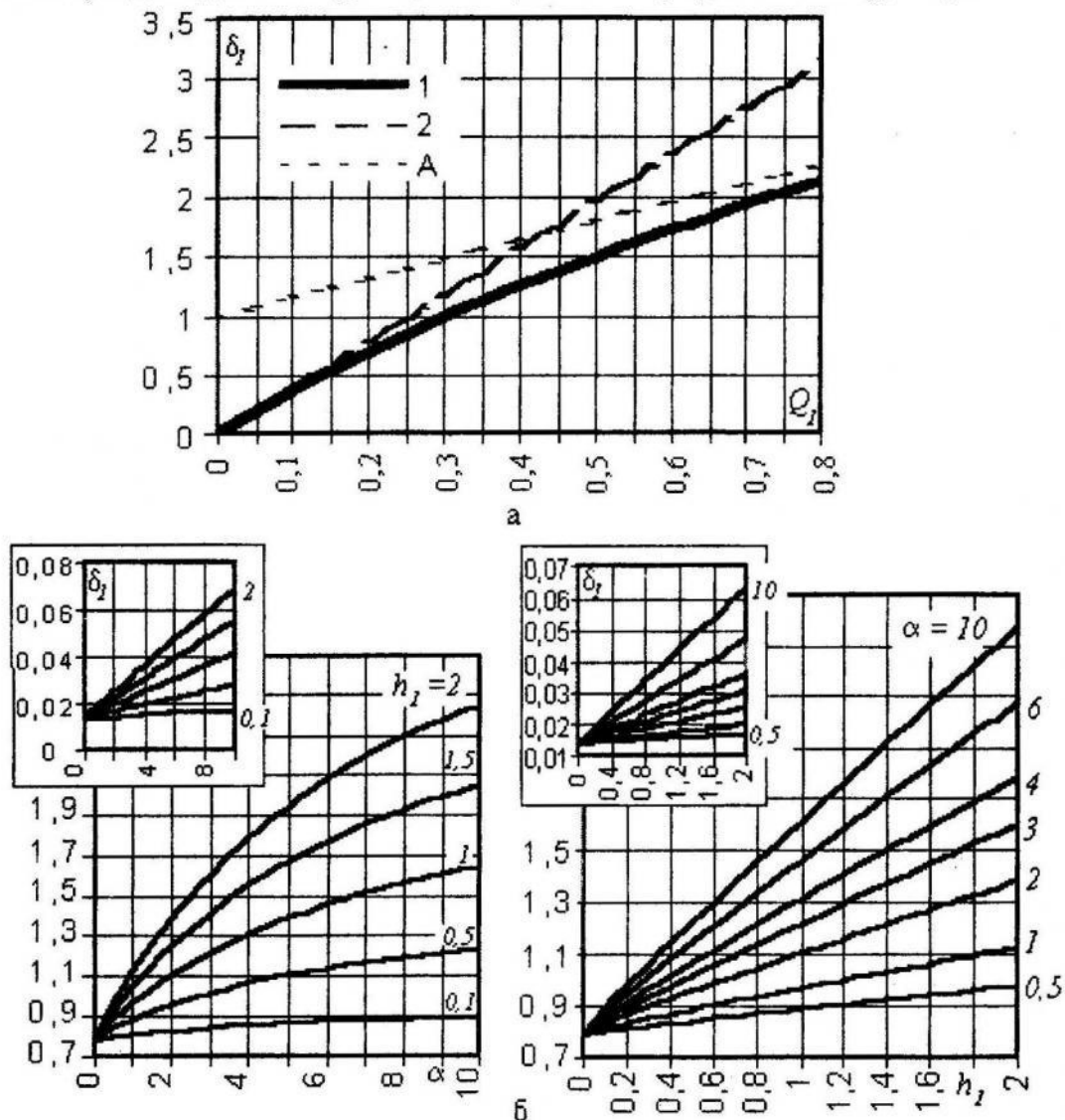


Рис.1. Поглиблення плоского кругового в плані штампу в шорсткий півпростір.

На рис. 1,а зображено графіки поглиблень штампу в пружний півпростір з шорсткістю і залежністю від тиску Q_1 , що відповідають поглибленню при дії експоненційного закону за фіксованих $\alpha = 7$ і $h_1 = 1$ (лінія 1) і степеневому закону для $k = 1$ і $B_1 = \alpha h_1 = 7$ (лінія 2). З графіка видно, що ці лінії для малих значень Q_1 дотикаються. Для великих Q_1 графік поглиблень за експоненційним законом наближається до лінії А, значення ординат якої мають вигляд $h_1 + Q_1 \frac{\pi}{2}$.

На рис. 1,б зображено графіки поглиблень штапу в пружний півпростір з шорсткістю й залежністю від кожного з коефіцієнтів шорсткості.

На рис. 2,а зображено графіки значень функції тиснення в центрі і на межі площадки контакту для фіксованих $\alpha = 7$, $h_1 = 1$ при дії експоненційного закону і $k = 1$, $B_1 = \alpha h_1 = 7$ при степеневому законі залежно від тиску Q_1 . З рис 2, а, 2, б видно, що зі збільшенням значення функції $p_1(\rho)$ у всіх точках збільшується. Для малих значень Q_1 за обома законами значення збігаються.

На рис. 2,в побудовано графіки $p_1(\rho)$ для фіксованих $\alpha = 7$ і різних h_1 . На рис. 2,г – графіки $p_1(\rho)$ при фіксованому $h_1 = 1$ і різних α .

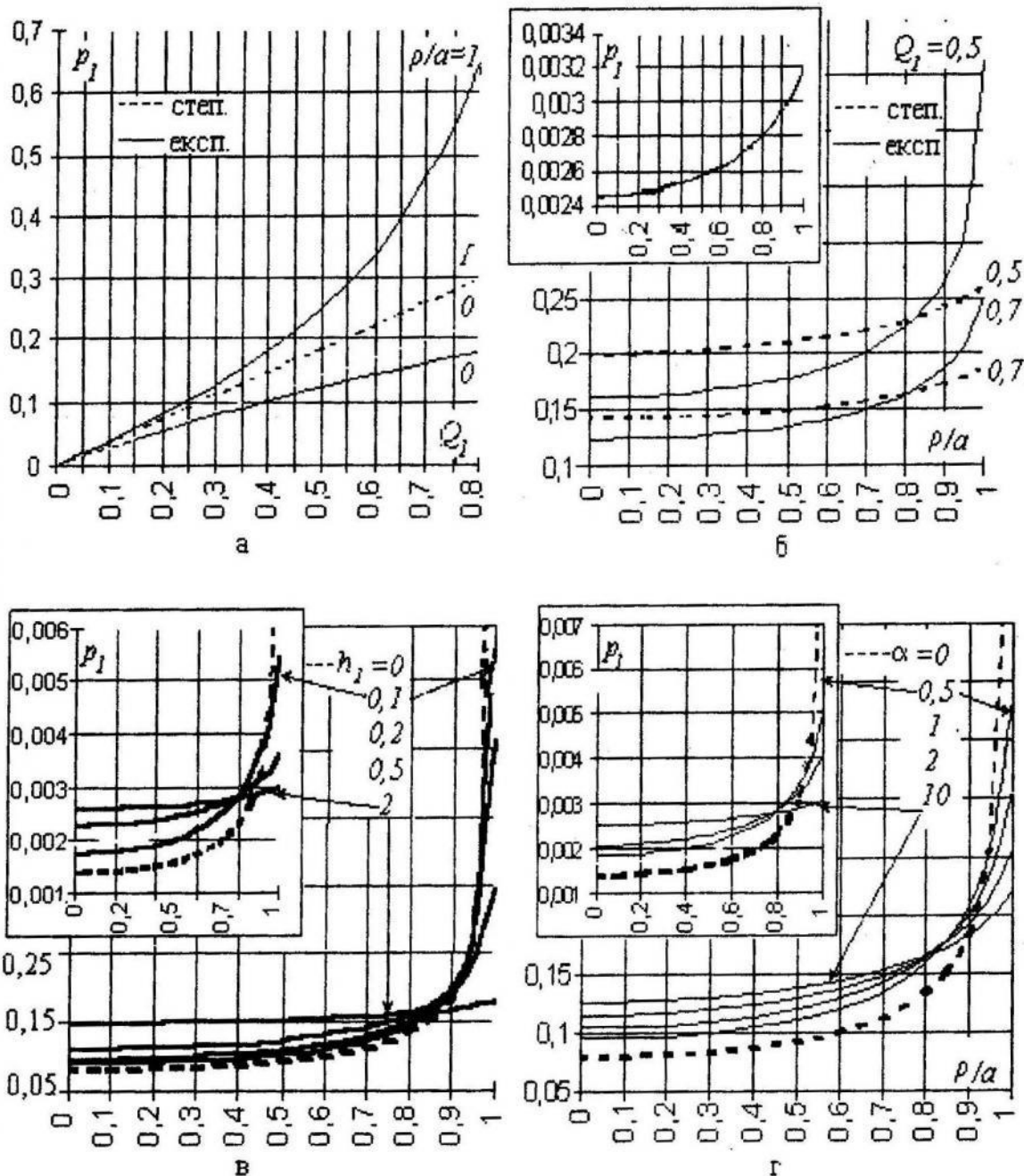


Рис.2. Тиск плоского кругового в плані штапу на шорсткий півпростір.

1. Барте́ев Г.М., Лавре́нтьев В.В. Трение и износ полимеров. - М., 1972.
2. Горя́чева И.Г., Добы́чин М.Н. Контактные задачи в трибологии. - М., 1988.
3. Крагельский И.В., Добы́чин М.Н., Комба́лов В.С. Основы расчётов на трение и износ. - М., 1977.
4. Д'яченко Н.М., Шишканова С.Ф. Зв'язок розв'язків задачі вдавнення плоского штампа від показників шорсткості пружного півпростору//Вісник ЗДУ. - 1999. - 2.-С.47-52.
5. Милли́н С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М., 1962.
6. Дубо́шин Г.Н. Теория притяжения. - М., 1961.
7. Канто́рович Л.В., Аки́лов Г.П. Функциональный анализ.- М., 1984.

**TO THE SOLUTION OF ONE CONTACT PROBLEM
AT THE EXPONENTIAL LAW OF A DEFORMATION
OF A ROUGHNESS**

N. Dyachenko, S. Shishkanova

State University of Zaporizhzhya, 66 Zhukovski Str. 69063 Zaporizhzhya, Ukraine

The problem of contact of circular in the plan flat a punch with an elastic rough half-space by deforming of a roughness on the exponential law is considered. This law corresponds to change of a real contact area, which is output G.M.Bartenev and V.V.Lavrentiev. Deferent methods of the solution of the problem are required a depending on the roughness coefficients (two cases: large and small values). For each of these cases the integral equation of a problem is reduced to infinite system of the nonlinear equations, which is solved by a method of successive approximations and method of reduction. The analysis of dependence of function of pressure and deepening of a punch from roughness of coefficients and working force is investigated in work.

Key words: contact of circular in the plan flat.

Стаття надійшла до редколегії 28.09.2000

Прийнята до друку 03.07.2001