

УДК 539.33

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙСНЕРА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ ТРІЩИН

Роман СЕЛІВЕРСТОВ

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Досліджено задачу згину нескінченної ізотропної пластини постійної товщини з періодичною системою паралельних тріщин за теорією Рейснера. Вважається, що до берегів тріщин прикладені самозрівноважені згинальні моменти. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень. У часткових випадках отримано результати з наукової літератури.

Ключові слова: ізотропна пластина, періодичні паралельні тріщини.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину сталої товщини h , яка містить періодичну систему прямолінійних паралельних тріщин завдовжки $2l$ (рис. 1), до берегів яких прикладені самозрівноважені згинальні моменти. Контакт берегів тріщин під час деформування пластини нехтуємо.

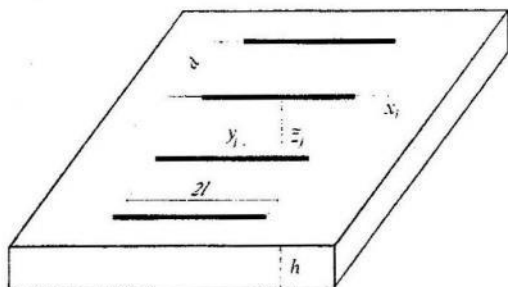


Рис. 1. Схема задачі.

У серединній площині пластини з кожною тріщиною пов'яжемо локальну декартову систему координат $O_j x_j y_j z_j$ з початком в її центрі, спрямувавши вісь $O_j x_j$ вздовж лінії розташування тріщини. Тут і надалі індекс j набуває значення від $-\infty$ до $+\infty$. Відстань між тріщинами позначимо через d . Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

Подамо граничні умови задачі у вигляді

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad |x_j| < l; \quad (1)$$

$$M_y^+ + M_y^- = q(x_j), \quad Q_y^+ + Q_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = 0, \quad |x_j| < l. \quad (2)$$

Значки '+' і '-' відповідають граничним значенням згинного моменту M_y , крутного моменту H_{xy} та поперечної сили Q_y при $y \rightarrow \pm 0$; $q(x_j)$ - задана функція навантаження.

Ввівши до розгляду комплексні потенціали $\Phi_j(z_j)$, $\Psi_j(z_j)$ та функцію $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ [1] в локальних системах координат $O_j x_j y_j$, запишемо такі співвідношення:

$$M_y + iH_{xy} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ m \left[\Phi_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} \right] + n \left[z_j \overline{\Phi_j'(z_j)} + \overline{\Psi_j(z_j)} \right] + \right. \\ \left. + \rho \left[2\overline{\Phi_j''(z_j)} + i \frac{\partial^2 \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(2\Phi_j'(z_j) - i \frac{\partial \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j} \right), \quad (4)$$

де $m = -D(1 + \nu)$, $n = D(1 - \nu)$, $\rho = 4d/k^2$, $k = \sqrt{10}/h$, $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$, $z_j = x_j + iy_j$, $i = \sqrt{-1}$, $\partial/\partial z_j = 0.5(\partial/\partial x_j - i\partial/\partial y_j)$, E , ν - відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Вибіримо функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ у вигляді

$$\Phi_j(z_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)dt}{t - z_j}; \quad \Omega_j(z_j, \bar{z}_j) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-l}^l \frac{w_j K_1(w_j) f(t)dt}{t - z_j}, \quad (5)$$

де $w_j = k\sqrt{(t - x_j)^2 + y_j^2}$; $f(t)$ - невідома дійсна функція; $K_i(x)$ - функція Макдональда i -го порядку.

Розглядаючи функцію

$$V_j(z_j) = q\overline{\Phi_j(z_j)} + z_j\overline{\Phi_j'(z_j)} + \overline{\Psi_j(z_j)}, \quad q = -(1 + \nu)/(1 - \nu), \quad (6)$$

та враховуючи (5), формули (3) і (4) подамо так:

$$Q_x - iQ_y = -\frac{2D}{\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-l}^l \left[\frac{w_j^2 \tilde{K}_1'(w_j)}{(t - z_j)^2} + \frac{k^4(t - \bar{z}_j)K_0(w_j)}{w_j^2} (t - x_j) \right] f(t)dt, \quad (7)$$

$$M_y + iH_{xy} = n \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[q\Phi_j(z_j) + V_j(\bar{z}_j) + (z_j - \bar{z}_j)\overline{\Phi_j'(z_j)} + i\rho_1\overline{\Omega_{9j}(z_j, \bar{z}_j)} \right], \quad (8)$$

де

$$\Omega_{9j}(z_j, \bar{z}_j) = \int_{-l}^l \frac{w_j [2\tilde{K}_1(w_j) + w_j K_0(w_j)]}{\pi i(t - z_j)^3} f(t)dt + \frac{k^2}{2\pi} \operatorname{Re} \left[i \int_{-l}^l \frac{w_j K_1(w_j)}{t - z_j} f(t)dt \right] + \\ + \frac{k^6}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_j - t)y_j}{w_j^3} K_1(w_j)(\bar{z}_j - t)f(t)dt, \quad K_1(w_j) = \frac{1}{w_j} + \tilde{K}_1(w_j), \quad \rho_1 = \frac{2h^2}{5(1 - \nu)}.$$

Шукаючи функцію $V_j(z_j)$ у вигляді

$$V_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{g_1(t) + ig_2(t)}{t - z_j} dt, \quad (9)$$

на підставі граничних умов (1) та співвідношень (5), (7), (8) отримаємо

$$g_1(t) = 0, \quad g_2(t) = -\rho_2 f(t), \quad \rho_2 = (5 + \nu)/(1 - \nu). \quad (10)$$

Задовольнивши граничні умови (2), матимемо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції $f(t)$

$$\int_{-l}^l \left\{ \frac{\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(w)}{t-x} + 2(t-x) \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\rho_3}{r_s^2} - \frac{4s^2 d^2}{r_s^4} - \frac{\rho_4 k}{r_s^3} (s^2 d^2 K_1(w_s) - \frac{\tilde{K}_2(w_s)}{w_s} ((t-x)^2 - 3s^2 d^2)) \right] \right\} f(t) dt = -\frac{\pi}{n} q(x), \quad |x| < l, \quad (11)$$

де $\tilde{K}_2(w) = K_2(w) - 2/w^2$, $w = k|t-x|$, $r_s = \sqrt{(t-x)^2 + s^2 d^2}$, $w_s = kr_s$, $\rho_3 = 2(3 + \nu)/(1 - \nu)$, $\rho_4 = 8/(1 - \nu)$.

Рівняння (11) доповнимо додатковими умовами

$$\int_{-l}^l f(t) dt = 0, \quad (12)$$

які виражають однозначність кутів повороту [2] при обході контура тріщини.

Зауважимо, що при $d \rightarrow \infty$ (11), (12) перетворюються у відповідну систему рівнянь із праці [3].

Систему рівнянь (11), (12) подамо у вигляді

$$\int_{-1}^1 K(t, x) \tilde{f}(t) dt = -\frac{\pi}{n} \tilde{q}(x), \quad |x| < 1, \quad \int_{-1}^1 \tilde{f}(t) dt = 0, \quad (13)$$

де

$$K(t, x) = 2(t-x) \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\rho_3}{\tilde{r}_s^2} - \frac{4s^2 \tilde{d}^2}{\tilde{r}_s^4} - \frac{\rho_4}{\lambda \tilde{r}_s^3} (s^2 \tilde{d}^2 K_1(\tilde{w}_s) - \frac{\tilde{K}_2(\tilde{w}_s)}{\tilde{w}_s} ((t-x)^2 - 3s^2 \tilde{d}^2)) \right] +$$

$$+ (\rho_3 + \rho_4 \tilde{K}_2(\tilde{w})) / (t-x), \quad \lambda = h/(l\sqrt{10}), \quad \tilde{d} = d/l, \quad \tilde{w} = |t-x|/\lambda, \quad \tilde{r}_s = \sqrt{(t-x)^2 + s^2 \tilde{d}^2},$$

$$\tilde{w}_s = \tilde{r}_s/\lambda, \quad \tilde{f}(t) = f(lt), \quad \tilde{q}(x) = q(lx).$$

Систему (13) розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур [4]. Розв'язок шукали у вигляді

$$\tilde{f}(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}},$$

а для знаходження значень невідомої функції $u(t)$ в нулях полінома Чебишова першого роду отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N K(t_m, x_r) u(t_m) = -\frac{\tilde{q}(x_r)}{n}, \quad r = \overline{1, N-1}, \quad \sum_{m=1}^N u(t_m) = 0,$$

де $t_m = \cos \frac{2m-1}{2N} \pi$, $x_r = \cos \frac{\pi r}{N}$.

Був проведений числовий аналіз задачі при $q(x) = b - ax^2$. При різних геометричних і механічних параметрах задачі досліджено поведінку приведених

коефіцієнтів інтенсивності моментів $K_M^* = K_M/(a\sqrt{l})$, які в нашому випадку обчислюють за формулами

$$K_M^{*\pm} = \mp 2qu(\pm 1),$$

$$u(-1) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^{N+m} u(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4N} \pi,$$

$$u(1) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} u(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4N} \pi.$$

При $a = 0$, тобто, коли до берегів тріщин прикладені постійні згинальні моменти, результати збігаються з наведеними в довіднику [5]. На рис. 2 зображено графічні залежності приведенного коефіцієнта інтенсивності моментів K_M^* при $a = b$ від параметра λ (рис. 2, а) при $\nu = 0.3$ та від параметра $\tilde{d}$ (рис. 2, б) при $\lambda = 0.5$.

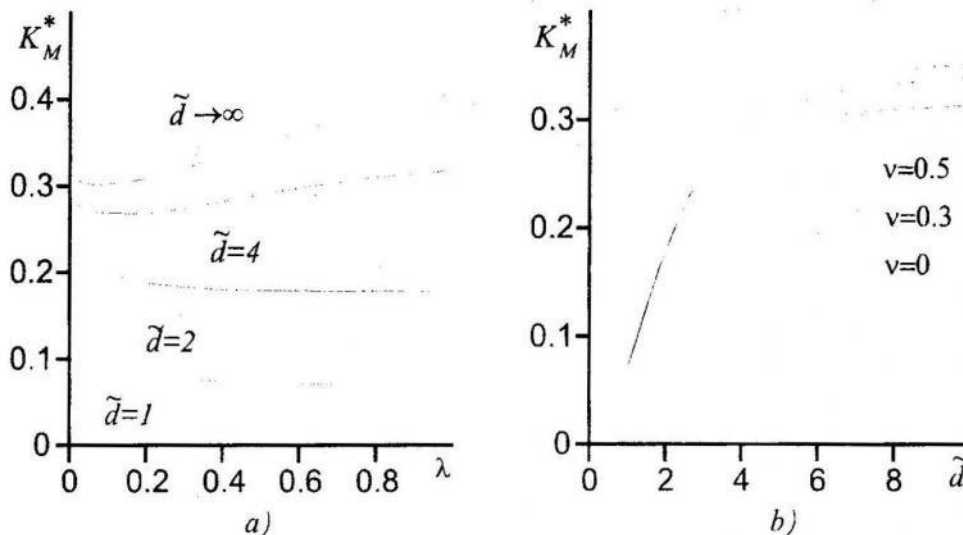


Рис. 2. Залежність приведенного коефіцієнта інтенсивності моментів K_M^* від параметрів $\lambda = h/(l\sqrt{10})$ і $\tilde{d} = d/l$.

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. – М., 1966.
3. Опанасович В. К., Делявський М. В., Подторецькі А. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейснера / Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. В 3-х т. За заг. ред. Панасюка В. В. Т. 2. Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – Львів, 1999. – С. 186-189.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х т. /Под. ред. Ю. Мураками. – М., 1990.

**THE BENDING OF REISSNER PLATE WITH
PERIODIC PARALLEL CRACKS****R. Seliverstov***Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper the problem about bending of constant thickness isotropic plate containing infinite row of parallel cracks is considered. It is assumed that the selfequilibrium bending moments are applied to the faces of the cracks. Using the methods of the theory of functions of complex variable solution of this problem is reduced to singular integral equation which is numerically solved by mechanical quadratures method. Numeric analysis of stress intensity factors is realized. In particular cases results from the scientific literature are obtained.

Key words: isotropic plate, periodic parallel cracks.

Стаття надійшла до редколегії 13.03.2001

Прийнята до друку 03.07.2001