

УДК 539. 3

В'ЯЗКОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ВНУТРІШНЬОМУ НАРОЩУВАННІ

Андрій СЯСЄВ

*Дніпропетровський національний університет
пров. Науковий, 13 49050 Дніпропетровськ, Україна*

Розглянуто задачу про в'язко-пружне деформування порожнистого циліндра при внутрішньому нарощуванні тиску. Процес неперервного нарощування є таким, що внутрішній радіус і тиск змінюються за заданими законами. Досліджено задачу у випадку лінійного закону, а також одержано числові результати для тимчасової залежності від тиску і руху для різних точок циліндра.

Ключові слова: в'язко-пружні деформації.

Процес розвитку нових технологій у виробництві оболонок, труб і інших деталей обертання шляхом нарощування, вимагає розвитку методів розрахунку, які повніше відображають властивості матеріалу, з якого виготовлено деталі. Відомо, що полімери, а останнім часом і деякі метали, які широко використовують для виготовлення труб методом відцентрового лиття [1], мають виражені властивості повзучості. Ця обставина призводить до перерозподілу напружень у деталі (трубі) у процесі нарощування, зміни форми і розмірів після виготовлення і під час навантаження.

Використання теорії в'язкопружності дає змогу теоретично оцінити ці чинники і побудувати технології відповідно до вимог, які ставлять до готової продукції.

Розглянемо порожнистий однорідний в'язкопружний круговий циліндр з внутрішнім радіусом a_0 і зовнішнім b_0 . Починаючи з моменту часу $t = 0$, до циліндра зсередини прикладається внутрішній тиск $P(t)$, $P(0) = P_0$ і починають його безупинне нарощування однорідним в'язкопружним матеріалом, так що внутрішній радіус циліндра монотонно спадає за законом $a(t)$, $a(0) = a_0$. У момент часу $t = T$ внутрішній радіус циліндра досягає значення a_1 і процес нарощування припиняється, тобто $a(t) = a_1$ при $t \geq T$.

Вважається, що функції $a(t)$ і $P(t)$ неперервно диференційовані на інтервалі $0 < t < T$. Потрібно визначити НДС у циліндрі для усіх $t \geq 0$.

У задачі [2] про нарощування циліндра зосереджено увагу на оцінці релаксації залишкових напруг. Мета статті – дослідити вплив часу нарощування на розподіл напружень у в'язкопружному порожнистому циліндрі. Відповідні співвідношення одержимо, використовуючи підхід викладений у [2].

Уведемо полярні координати r , θ , z і розглянемо плоску деформацію циліндра ($u_z = 0$), зберігаючи звичні позначення для переміщень, компонент тензора напружень і деформацій.

Запишемо основні рівняння задачі:
умову нестисливості

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \quad (1)$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \quad (2)$$

співвідношення Коші для швидкостей деформацій і переміщень

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}. \quad (3)$$

Крапкою позначена частинна похідна за часом.

Оскільки усі компоненти деформації, крім ε_r і ε_θ , дорівнюють нулю, то з урахуванням (1), $\varepsilon_u = (2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2} = 2|\varepsilon_r| = 2|\varepsilon_\theta|$. Звідси і з визначальних рівнянь нелінійної теорії повзучості для неоднорідно-старіючих тіл [3] через умову $\varepsilon_\theta > 0$ рівняння стану запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = 2G_1(t - \tau^*)(\varepsilon_r(t, r) - \varepsilon_\theta(t, r))\varepsilon_\theta^{m-1}(t, r) - \\ - \int_{\tau^*}^t R_1(t - \tau^*, \tau - \tau^*)(\varepsilon_r(\tau, r) - \varepsilon_\theta(\tau, r))\varepsilon_\theta^{m-1}(\tau, r) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут позначено $G_1 = G \cdot 2^{m-1}$, $R_1 = R \cdot 2^{m-1}$.

Функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a_0 \leq r \leq b_0$ і збігається з функцією, оберненою до функції $a(t)$, при $a_1 \leq r \leq a_0$.

Граничні умови мають вигляд

$$\sigma_r|_{r=b_0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=a(t), 0 \leq t < T} = -P(t), \quad \sigma_\alpha|_{r=a_1, t \geq T} = 0, \quad \alpha = r, \theta. \quad (5)$$

Продиференціювавши (1) за часом і підставивши в отримане рівняння співвідношення (3), прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0.$$

Звідси

$$\dot{u}_r = \frac{c(t)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{c(t)}{r^2}, \quad (6)$$

де $c(t)$ – деяка функція, яку потрібно визначити.

З (6) із урахуванням початкової умови $u_r(\tau^*(r), r) = \varepsilon_\theta(\tau^*(r), r) = 0$ випливає, що

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad (7)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r^2}, \quad \text{якщо } a(t) \leq r < a_0; \quad (8)$$

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad (9)$$

$$-\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2, \quad \text{якщо } a_0 \leq r \leq b_0; \quad (10)$$

$$A(t) = - \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Інтегрування в (11) містить точку $t = 0$. Отже, якщо сингулярну складову функції $c(t)$ позначити через $c_0 \delta(t)$, то границя функції $A(t)$ у точці $t = 0$ праворуч дорівнює c_0 .

Виразимо напруження σ_r через функцію $A(t)$ для вихідного циліндра й області нарощування.

A^0 . Область $a_0 \leq r \leq b_0$.

Підставляючи в (4) вирази для компонент деформації (10), отримаємо

$$\sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = -\frac{2}{r^{2m}} \left[2G_1(t) A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau) A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (12)$$

Зінтегрувавши рівняння (2) у межах від r до b_0 (з урахуванням граничної умови (5)), і підставивши в результат інтегрування (12), одержимо

$$\sigma_r(t, r) = - \int_r^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}} \left[2G_1(t) A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau) A^m(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

B^0 . Область $a(t) \leq r < a_0$.

Підставляючи в (4) вирази для компонент деформації (8), матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = & -\frac{2}{r^{2m}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau]. \end{aligned} \quad (14)$$

Зінтегрувавши (2) у межах від $a(t)$ до r (з урахуванням граничної умови (5)), і підставивши результат інтегрування в (14), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) + \int_{a(t)}^r \frac{2dr}{r^{2m+1}} [2G_1(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \\ & - \int_{\tau^*(r)}^t R_1(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m d\tau]. \end{aligned} \quad (15)$$

Після заміни змінної $r = a(s)$ ($s = \tau^*(r)$) у рівнянні (15) і зміни порядку інтегрування, одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_r(t, r) = & -P(t) - \left[\int_{\tau^*(r)}^t \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau) (A(t) - A(\tau))^m d\tau - \right. \\ & \left. - \int_{\tau^*(r)}^t d\tau \int_{\tau^*(r)}^{\tau} ds R_1(t - s, \tau - s) \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} (A(\tau) - A(s))^m \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Рівняння для визначення $A(t)$ отримуємо з умови неперервності напружень $\sigma_r(t, r)$ на межі розділу двох розглянутих областей, тобто при $r = a_0$. Підставляючи в (13) і (16) значення $r = a_0$ і прирівнюючи праві частини, прийдемо до

нелінійного інтегрального рівняння для визначення функції $A(t)$

$$H_1 \left(2G_1(t) A^m(t) - \int_0^t R_1(t, \tau) A^m(\tau) d\tau \right) + \int_0^t H_2(t, \tau) (A(t) - A(\tau))^m d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^\tau H_3(t, \tau, s) (A(\tau) - A(s))^m ds d\tau = P(t). \quad (17)$$

Тут

$$H_1 = \int_{a_0}^{b_0} \frac{2dr}{r^{2m+1}}, \quad H_2(t, \tau) = \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)} 2G_1(t - \tau), \\ H_3(t, \tau, s) = \frac{2\dot{a}(s)}{a^{2m+1}(s)} R_1(t - s, \tau - s).$$

Визначивши з рівняння (17) функцію $A(t)$, знаходимо переміщення u_r і компоненти деформацій ε_r і ε_θ за формулами (7) - (10), а напруження σ_r і σ_θ за формулами (12), (13), (14), (16). Для напруження σ_z з умови $\varepsilon_z = 0$ і рівняння стану, згаданого в [3, 4], маємо $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$.

Розглянемо випадок нарощування за лінійного закону повзучості. Випадок лінійного закону повзучості можна досліджувати, прийнявши у визначених співвідношеннях $m = 1$. Наведемо зведення відповідних формул з (9), (10), (12), (4) матимемо

$$u_r(t, r) = A(t)/r, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = A(t)/r^2, \\ \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = -\frac{2}{r^2} \left(2G(t) A(t) - \int_0^t R(t, \tau) A(\tau) d\tau \right),$$

якщо $a_0 \leq r \leq b_0$.

З (7), (8), (14), (16) одержимо

$$u_r(t, r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \quad -\varepsilon_r(t, r) = \varepsilon_\theta(t, r) = (A(t) - A(\tau^*(r)))/r^2, \\ \sigma_r(t, r) - \sigma_\theta(t, r) = -\frac{2}{r^2} \left[2G(t - \tau^*(r)) (A(t) - A(\tau^*(r))) - \right. \\ \left. - \int_{\tau^*(r)}^t R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) (A(\tau) - A(\tau^*(r))) d\tau \right], \quad (19)$$

якщо $a(t) \leq r < a_0$, і

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \\ D_1(t) A(t) - \int_0^t D_2(t, \tau) A(\tau) d\tau = P(t), \quad (20)$$

$$D_1(t) = \int_{a(t)}^{b_0} 2G(t - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3},$$

$$D_2(t, \tau) = \int_{a(\tau)}^{b_0} R(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3} +$$

$$+ \frac{2\dot{a}(\tau)}{a^3(\tau)} \left(2G(t - \tau) - \int_{\tau}^t R(t - \tau, s - \tau) ds \right).$$

Зауважимо, що рівняння (20) одержали з рівняння (17) і його розв'язок можна подати в квадратурах [2, 3].

Візьмемо ядро релаксації у формі [2]

$$R(t, \tau) = \frac{\partial \mu(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad \mu(t, \tau) = 2G(\tau) - \varphi(\tau) \left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right). \quad (21)$$

Рівняння (20), використовуючи співвідношення (21), можна записати у вигляді

$$A(t) \mu_1(t, t) - \int_0^t \frac{\partial \mu_1(t, \tau)}{\partial \tau} A(\tau) d\tau = P(t), \quad (22)$$

де

$$\mu_1(t, \tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \mu(t - \tau^*(r), \tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}. \quad (23)$$

Підставляючи (21) у (23), одержимо

$$\mu_1(t, \tau) = 2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau) \left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right),$$

$$G_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} G(\tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}, \quad \varphi_2(\tau) = \int_{a(t)}^{b_0} \varphi(\tau - \tau^*(r)) \frac{2dr}{r^3}. \quad (24)$$

Рівняння (22) можна звести до диференціального рівняння другого порядку щодо функції $A(t)$ [4, 5]. Справді, зінтегрувавши це рівняння вроздріб із урахуванням (23), (24), запишемо його у вигляді

$$\int_0^t \dot{A}(\tau) \left[2G_2(\tau) - \varphi_2(\tau) \left(1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right) \right] d\tau = P(t).$$

Диференціюючи останнє рівняння послідовно два рази за t , одержимо

$$2G_2(t) \dot{A}(t) - \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \dot{P}(t), \quad (25)$$

$$2G_2(t) \ddot{A}(t) + 2\dot{G}_2(t) \dot{A}(t) - \gamma \varphi_2(t) \dot{A}(t) +$$

$$+ \gamma^2 \int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \ddot{P}(t).$$

Виключивши з цих співвідношень інтеграл $\int_0^t \dot{A}(\tau) \varphi_2(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$, отримаємо диференціальне рівняння для $A(t)$

$$2G_2(t) \ddot{A}(t) + \dot{A}(t) [2\dot{G}_2(t) - \gamma\varphi_2(t) + \gamma 2G_2(t)] = \ddot{P}(t) + \gamma \dot{P}(t), \quad (26)$$

з початковими умовами, що впливають безпосередньо з (22) і (25) з урахуванням (23), (24)

$$A(0) = \frac{P(0)}{2G_2(0)}, \quad \dot{A}(0) = \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}. \quad (27)$$

Розв'язавши рівняння (26) з початковими умовами (27), остаточно одержимо розв'язок для функції $A(t)$

$$A(t) = \frac{P_0}{2G_2(0)} + \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)} \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-\eta(\tau)} d\tau \int_0^\tau \frac{\ddot{P}(x) + \gamma \dot{P}(x)}{2G_2(x)} e^{\eta(x)} dx, \quad (28)$$

$$\text{де } \eta(\tau) = \int_0^\tau \left[\gamma + \left(2\dot{G}_2(z) - \gamma\varphi_2(z) \right) 2G_2^{-1}(z) \right] dz.$$

Визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (28), знаходимо переміщення u_r , компоненти деформацій ε_r , ε_θ а також напруження за формулами (18), (19).

Розглянемо лінійний випадок. Функцію $\mu(t, \tau)$ візьмемо у вигляді (21), за умови, що

$$G = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = 2G(C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}). \quad (29)$$

Закон зміни внутрішнього радіуса циліндра $a(t)$ задовольняє співвідношення

$$\frac{1}{a^2(t)} = \frac{1}{a_0^2} + \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2} \right) \frac{t}{T}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (30)$$

За допомогою співвідношень (26) і (27) ядро рівняння (22), а також ядра інтегральних операторів у (18), (19) виражаються елементарними функціями. Нехай внутрішній тиск рівномірно спадає на проміжку $[0, T]$ до значення удвічі меншого, ніж початкове, і в момент закінчення нарощування $t = T$ стає нульовим.

На рис. 1, 2 і 3, 4 зображені часові залежності максимального дотичного напруження і переміщень u_r для таких точок циліндра: 1- $r = b_0$; 2- $r = a_0 - 0 = 0,9b_0 - 0$; 3- $r = 0,79b_0$. Під час обчислень параметри C_0, A_0, β, γ і розміри a_0, a_1 були фіксовані і становили: $C_0 = 0.05$; $A_0 = 0.75$; $\beta = 0.02 \text{ год}^{-1}$; $\gamma = 0,1 \text{ год}^{-1}$; $a_0 = 0,9b_0$; $a_1 = 0,5b_0$. Тому що напруження не залежать від величини миттєвого модуля пружності G , а переміщення і деформації обернено пропорційні йому, в обчисленнях можна вважати, що $G = 1$.

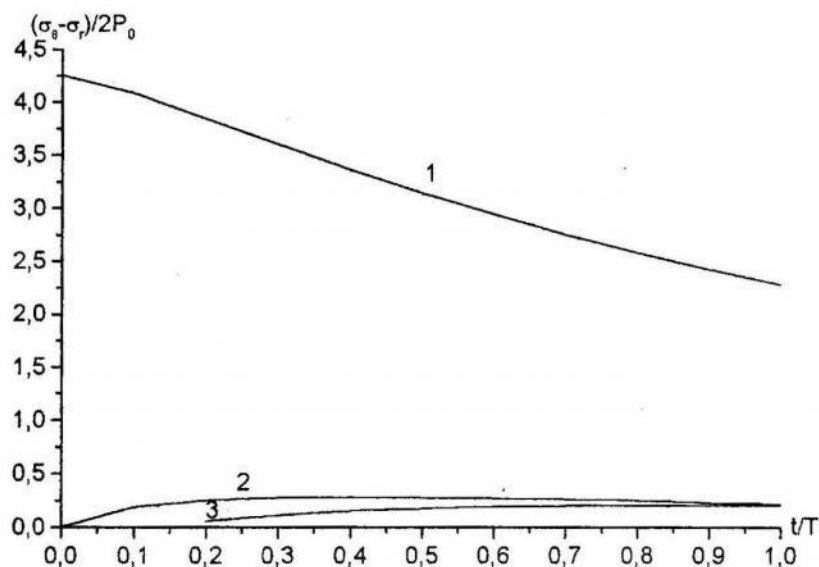


Рис. 1. Розподіл максимального дотичного напруження за часом нарощування при $T = 10$, $P = 1 - t/2T$.

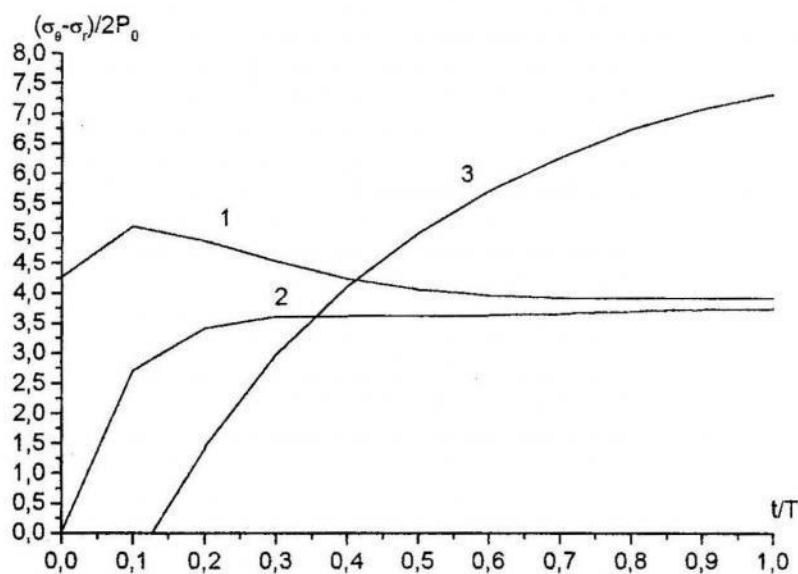


Рис. 2. Розподіл максимального дотичного напруження за часом нарощування при $T = 50$, $P = 1 - t/2T$.

Як видно з рис. 1, 2, 3, 4 тривалість процесу нарощування впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. Характер кривих змінюється незначно, проте значно змінюються величини самих напружень і переміщень. Наприклад, із рис. 1, 2 очевидно, що при десятих годинах нарощування напруження в точці 1 монотонно спадають, а в точці 2 зростають незначно і до кінця процесу нарощування навіть дещо спадають, при п'ятидесятих годинах наро-

шування картина зовсім інша – напруження в другій точці починають значно збільшуватися згодом і за своїми значеннями наближаються до значень у точці 1, а напруження в точці 3 зростають настільки, що перевищують напруження в точках 1 і 2 удвічі.

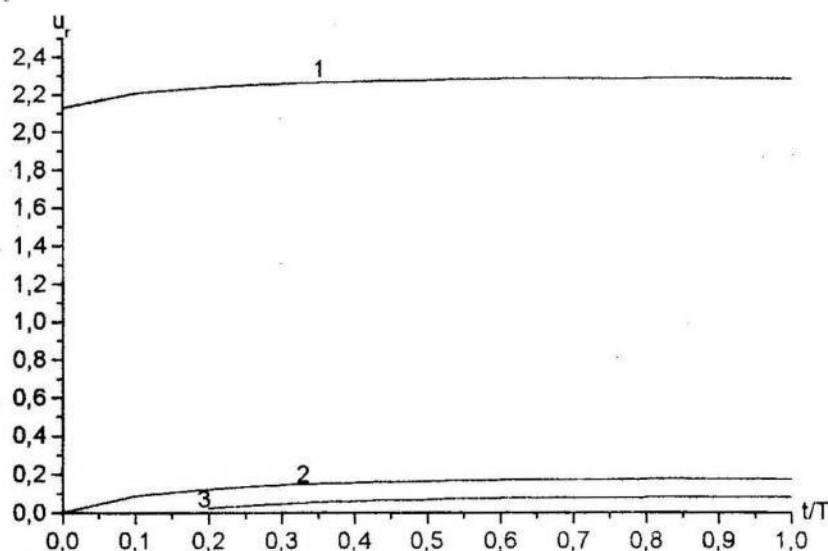


Рис. 3. Розподіл переміщень за часом нарощування при $T = 10$, $P = 1 - t/2T$.

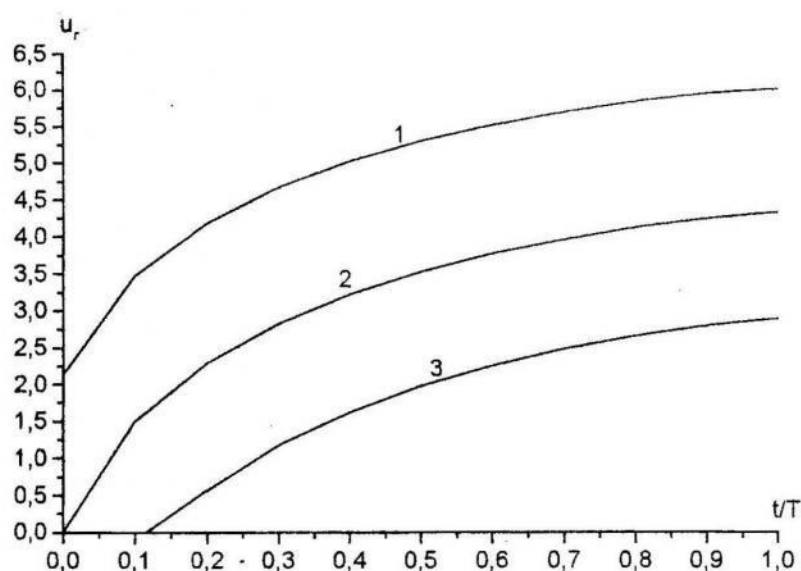


Рис. 4. Розподіл переміщень за часом нарощування при $T = 50$, $P = 1 - t/2T$.

Такий розподіл напружень можна пояснити так: по-перше, точки 2 і 3 увесь час перебувають ближче до лінії дії навантаження порівняно з точкою 1, по-друге, за швидшого процесу нарощування матеріал не встигає до кінця виявити свої в'язкопружні властивості, що підтверджують і криві для переміщень, зображені на рис.3, 4. Варто зауважити, що на всіх графіках характерна кутова

точка у момент часу $t/T = 0.1$ є наслідком недостатньо малого кроку розбиття за часом.

Отже, викладений метод обчислення дає змогу оцінити вплив часу нарощування на розподіл напружень і переміщень у в'язкопружному порожнистому круговому циліндрі, який виготовляють з однорідного в'язкопружного матеріалу.

1. Юдин С.Б. Центробежное литье. – М., 1972.
2. Сясев А.В., Бинкевич Е.В. Нарращивание вязкоупругого полого цилиндра при действии внутреннего давления // Вісн. Дніпропетров. держ. ун-ту. – 1999. – Т. 2. – Вип. 2. – С.153-160.
3. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. – М., 1983.
4. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. – М., 1987.
4. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М., – 1967.

VISCO-ELASTIC DEFORMATION OF A CIRCULAR CYLINDER ON THE INNER JOINTING

A. Syasev

National University of Dnipropetrovsk

13 Naukovyi Side Str. 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine

The task of the stress deformed condition of a visco-elastic hollow cylinder, which is jointed under the activity of internal pressure. The process of a continuous jointing is taking place on inner radius by such way that the radius and pressure change according to the given law. The special case of a linear law of creepage is considered, also the numerical results in the forms of the graphs of temporary dependence of stresses and moving for various points of cylinder are presented.

Key words: visco-elastic deformation.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.2001

Прийнята до друку 03.07.2001