ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 59

Львівський національний університет імені Івана Франка
2001

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 59

Видається з 1965 року

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2001

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2001. – Випуск 59. – 214 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2001. – Vol. 59. – 214 p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний
факультет
вул. Університетська, 1
79602 Львів
тел. (0322) 74-11-07, 79-45-93
E-mail: diffeq@uli2.franko.lviv.ua

Editorial address:
Ivan Franko National University
of Lviv
Mechanical and Mathematical
department
Universytets'ka st. 1
UA-79602 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07, 79-45-93

Відповідальний за випуск *С. Лавренюк*

Редактор *Н. Плиса*

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Львівського національного університету імені Івана Франка

ЗМІСТ

CONTENTS

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.5-7

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.5-7

СЛОВО ПРО ВЧИТЕЛЯ (ДО 80-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ПРОФЕСОРА В.Е.ЛЯНЦЕ)

Тарас КУДРИК, Ярослав ПРИТУЛА, Олег СТОРОЖ, Галина ЧУЙКО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Наведено деякі сторінки біографії та основні наукові здобутки відомого вченого-математика професора Лянце Владислава Елійовича.

Ключові слова: біографія вченого-математика.

19 листопада 2000 р. минуло 80 років від дня народження відомого вченого-математика, керівника сучасної Львівської школи функціонального аналізу, доктора фізико-математичних наук професора Лянце Владислава Елійовича.

Владислав Елійович Лянце народився у Варшаві. Починаючи зі шкільного віку, майже все його життя пов'язане зі Львовом. Саме на шкільні роки припадає його перше захоплення математикою. Він пробує самостійно вивчати математичний аналіз за підручником С. Банаха з диференціального та інтегрального числення.

У січні 1940 р. В.Е. Лянце зарахували на перший курс фізико-математичного факультету Львівського університету, знаного на той час математичного центру світового значення. Кумиром львівських (і не тільки львівських) математиків був всесвітньо відомий вчений Стефан Банах. Участь у роботі його семінарів брав і В.Е. Лянце. "Мені і досі не віриться – пише він у своїх спогадах – що сам Банах вітався зі мною, потискаючи руку. Так він ставився до всіх математиків-початківців і, думаю, що це була не проста західна ввічливість". С. Банах, засновник першої Львівської школи функціонального аналізу, прагнув виховати нове покоління учених, які б продовжили її традиції.

Воєнні лихоліття відірвали Владислава Елійовича від студентської лави. На початку війни його мобілізували у будівельний батальйон, згодом працював на будівництві та в нафтовій промисловості Башкирії, учителював.

У 1945 -1948 рр. В.Е. Лянце знову студент Львівського університету. Саме в цей період вийшла в світ перша праця.

З 1948 р. В.Е. Лянце працює у Львівському політехнічному інституті, навчаючись в аспірантурі Інституту математики АН УРСР під керівництвом Ярослава Борисовича Лопатинського – одного з корифеїв вітчизняної математики, людини, з чиїм іменем справедливо асоціюється становлення і розквіт Львівської школи диференціальних рівнянь. У творчий доробок цієї школи помітний внесок зробив і В.Е. Лянце.

Результати, які він одержав, викладені в кандидатській дисертації "О корректности постановки некоторых краевых задач математической физики", яку захистив у квітні 1951 р.

У наступні роки наукова діяльність Владислава Елійовича пов'язана з функціональним аналізом. В.Е. Лянце розробив теорію узагальнених спектральних операторів. Ця теорія, а також її застосування до дослідження несамоспряжених операторів Штурма-Ліувілля на півосі стали основою докторської дисертації В.Е.Лянце "Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве", яку успішно захистив у квітні 1964 р. Захист відбувався в Московському державному університеті.

У цьому ж році повернувся до своєї альма-матер, на рідний механіко-математичний факультет Львівського університету, де працював на посаді доцента, а згодом (1965-1971) – професора кафедри геометрії (вчене звання професора надали у січні 1967р.). У цей період починає працювати Львівський міський семінар зі спектральної теорії лінійних операторів, який організував професор Лянце. Забігаючи наперед зауважимо, що назва виявилась умовною. На семінарі виступали з доповідями математики Києва і Одеси, Москви і Санкт-Петербурга, Баку і Кишинева, Чернівців і Дрогобича, багатьох інших міст.

Уже з перших років роботи семінару у дослідженні важливих проблем брала активну участь талановита молодь. Активно працював і керівник семінару. Публікував статті, присвячені дослідженню спектральних властивостей різних класів диференціальних, різницевих та псевдодиференціальних операторів. Високу оцінку спеціалістів здобули праці, присвячені оберненій задачі теорії розсіяння для несамоспряжених операторів та спектральному аналізу несамоспряжених цілком регулярних збурень оператора множення на незалежну змінну на всій осі. Приборкання спектральних особливостей тривало .

У 1971 р. вчений очолив кафедру математичного аналізу, яка в 1973 р. була об'єднана з кафедрою теорії функцій та теорії ймовірностей, і став завідувачем кафедри теорії функцій і функціонального аналізу.

Однак коло наукових інтересів В. Е. Лянце щоразу далі виходить за межі спектральної теорії.

У 1980 р. як відомий учений, наукові досягнення якого набули широкого визнання у світі, з молодечим запалом почав вивчати, а згодом – викладати науковим працівникам і студентам нову математичну науку – *нестандартний аналіз.* Не претендуючи на детальну характеристику цієї науки зазначимо, що в ній поряд з об'єктами звичайної ("стандартної") математики, набувають права громадянства й деякі інші ("нестандартні") об'єкти, наприклад, нескінченно малі і нескінченно великі числа. Використовуючи один з основних принципів нестандартного аналізу – принцип перенесення, В.Е.Лянце показав, що будь-який лінійний оператор має повну систему кореневих елементів, але ці елементи загалом є нестандартними. Так було розв'язано задачу, яку в математичному фольклорі називали *задачею про пошук синього птаха.* Виявилось, що цей птах літає в нестандартному універсумі.

Про заслуги вченого свідчать – 130 наукових праць, три монографії, серед учнів – близько 20 докторів і кандидатів наук. Але це тільки перше наближення.

Не можна не згадати, що В.Е.Лянце переклав з польської мови на російську монографію К.Морена "Методы гильбертова пространства" (Москва: Мир, 1965), редагував книгу М.А.Наймарка "Линейные дифференциальные операторы" (Москва: Наука, 1969) і написав додаток до цієї книги. В. Е. Лянце багато років поспіль очолює редколегію Вісника Львівського університету (серія механіко-математична).

Хочемо згадати людські якості нашого вчителя – глибоке шанування людської гідності і невтрачання своєї.

Хто знає професора В.Е.Лянце тільки як непересічного вченого та блискучого педагога, той його майже не знає. Він любить мандрувати не лише нестандартним універсумом або гільбертовим простором, а й лісами Львівщини. Незамінним супутником йому стає дружина Ольга Олексіївна (чи не їй найперше завдячує ювіляр своєму науковому довголіттю!). Ці мандрівки нагадують йому дитинство, яке пройшло в мальовничій місцевості, оточеній лісами. Владислав Елійович дуже любить і розуміє класичну музику, тонко відчуває прекрасне в людині і в природі, в музиці і в математиці. Він ніколи не спочивав на лаврах і, з огляду на сьогодення, не збирається цього робити й тепер. Вважаємо, що в ювіляра є далекосяжні плани, які торкаються усіх сторін його багатогранної діяльності. Побажаємо, щоб ці плани здійснились.

THE WORD ABOUT ADVISOR

(on the occasion of prof. V. Lyantse eightieth birthday)

T. Kudryk, Ya. Prytula, O. Storozh, G. Chyiko

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Some pages of biography and principal scientifical results of eminent mathematician, professor Wladyslav Lyantse are given

Key words: biography of mathematician.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.2000
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.8–14

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.8–14

УДК 517.988.5

ПОЛІНОМІАЛЬНІ АНАЛОГИ ДЕЯКИХ КЛАСИЧНИХ ТЕОРЕМ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Андрій ЗАГОРОДНЮК
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача
ГСП, вул.Наукова, 3б 79601 Львів, Україна

У праці доведено аналоги теореми Гана-Банаха про продовження та теореми про замкнений графік для поліноміальних відображень на банахових просторах.

Ключові слова: поліноміальні відображення на банахових просторах, теорема про продовження, теорема про замкнений графік.

Теорія полілінійних і поліноміальних відображень на банахових просторах є одним з напрямів нелінійного функціонального аналізу, який активно розвивається в останні роки. Досліджуючи поліноміальні відображення, корисно знати, які результати лінійної теорії можна перенести на ці об'єкти. Добре відомо [1], що для полілінійних і поліноміальних відображень обмеженість на обмежених множинах еквівалентна неперервності. У [2] показано, що для поліноміальних функціоналів виконується теорема про замкнений графік. Крім того, у [2] доведено, що ядро розривного поліноміального функціонала на комплексному банаховому просторі є всюди щільною множиною. У [3] доведено теорему про борелівський графік (зокрема про замкнений графік) для поліноміальних відображень на сепарабельних банахових просторах. У [4] узагальнено ці результати на сепарабельні комутативні групи. Теорему про замкнений графік для полілінійних відображень доведено у [3,5]. Питання про поліноміальну теорему про замкнений графік у загальному випадку залишається відкритим. У третьому розділі цієї статті доведено дещо слабший варіант цієї теореми. Обернене відображення до неперервного бієктивного поліноміального оператора може бути розривним [6]. Проте з поліноміальної теореми про замкнений графік випливає наслідок, який можна трактувати як аналог теореми про обернене відображення. Теорема про відкрите відображення для полілінійних відображень не виконується, навіть у скінченновимірному випадку [7].

Проблему продовження поліноміального функціонала з підпростору на ширший простір (аналог теореми Гана-Банаха для поліномів) досліджувало багато авторів. У [8] показано, що такого продовження загалом може не існувати. Проте всякий поліном, заданий на X, може бути продовжений на X''. У [9] узагальнено ідею з [8] для побудови продовження поліномів з X у довільний ультрастепінь $X_{\mathcal{U}}$. У працях [10,11] досліджували класи поліномів на банахових просторах, які допускають продовження у будь-який надпростір. У [12,13,14] досліджується зв'язок між проблемою продовження поліномів та проблемою опису максимальних ідеалів алгебр, породжених поліноміальними функціоналами.

У другому розділі цієї статті визначено необхідні та достатні умови на підпростір X_0, банахового простору X, при яких всякий неперервний поліноміальний функціонал на X_0 може бути продовжений до неперервного поліноміального функціонала на X.

1. Попередні відомості

Нехай X, Y – банахові простори. Нагадаймо, що відображення $P : X \to Y$ називається однорідним поліноміальним відображенням (оператором) степеня n, якщо існує n-лінійне симетричне неперервне відображення на n-му декартовому степені простору X, $\bar{P} : X \times \cdots \times X \to Y$ таке, що $P(x) = \bar{P}(x, \ldots, x)$. Поліноміальним відображенням степеня m на X називається сума n-однорідних поліноміальних відображень при $n = 0, \ldots, m$. Ми використовуватимемо позначення $\mathcal{P}(^n X, Y)$, $\mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ для просторів однорідних неперервних поліноміальних операторів степеня n та просторів неперервних поліноміальних операторів степеня не більшого за n з X в Y відповідно. У випадку коли Y – поле скалярів, ми писатимемо $\mathcal{P}(^n X)$ та $\mathcal{P}(^{\leqslant n} X)$. Часто поліноміальні функціонали будуть називатись просто поліномами. Відомо, що для всякого відображення $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ існує афінний (лінійний, зсунутий на константу) оператор Φ_F, заданий на деякому просторі $E_n(X)$ в Y і "канонічне вкладення" $\delta : X \to E_n(X)$ такі, що $\Phi_F(\delta(x)) = F(x)$. Простір $E_n(X)$ є ізометрично ізоморфний прямій сумі проективних симетричних тензорних степенів $\odot^k_{s,\pi} X$, $k = 1, \ldots, n$ простору X, а $\delta : x \mapsto x + x \otimes x + \cdots + x \otimes \cdots \otimes x$. Норму на $E_n(X)$ ми вважаємо заданою так: $\|w\| = \sup\limits_{k=1\ldots n} \|w_k\|_k$, де $w_k \in \otimes^k_{s,\pi} X$ і $\|w_k\|_k$ – норма w_k у $\odot^k_{s,\pi} X$. Писатимемо E_n замість $E_n(X)$ у тих випадках, коли буде зрозуміло про який простір йдеться. Ми будемо казати, що поліном P продовжується з підпростору X_0 на простір $X \supset X_0$ якщо існує поліном $\tilde{P}$ на X такий, що звуження $\tilde{P}$ на X_0 збігається з P. Якщо $\|\tilde{P}\|_X = \|P\|_{X_0}$, то вважатимемо, що P продовжується зі збереженням норми. Детальнішу інформацію про поліноміальні відображення та тензорні добутки можна знайти в [15].

2. Продовження поліномів

Твердження 1. *Нехай $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$. Для будь-якої точки $x_0 \in X$ такої, що $x_0 \notin \ker F$ існує поліном $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X)$ такий, що $\ker P \supset \ker F$ і $P(x_0) = \|F(x_0)\|$.*

Доведення. Нехай $F(x_0) = y_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Гана-Банаха існує лінійний функціонал $\phi \in Y'$ такий, що $\phi(y_0) = \|y_0\|$. Приймемо $P(x) := \phi(F(x))$. Тоді $P(x_0) = \phi(y_0) = \|F(x_0)\|$.

Наслідок 1. *Множина M є ядром деякого поліноміального оператора $F \in \mathcal{P}(^{\leqslant n} X, Y)$ для деякого банахового простору Y тоді і тільки тоді, коли M є перетином ядер поліноміальних функціоналів степеня не більшого за n.*

Доведення. Припустимо, що $M = \cap_{i \in I} P_i$, де I – деяка множина індексів. Нехай Φ_i – асоційовані з P_i функціонали на E_n. Розглянемо лінійний простір $V = \cap_{i \in I} \ker \Phi_i$ і фактор-відображення $\pi : E_n \to E_n/V$. Приймемо $F(x) = \pi(\delta(x))$, де δ – канонічне вкладення X в E_n. Тоді $M = \ker F$.

Лема 1. *Нехай V_r – куля радіуса $r \leqslant 1$ з центром в нулі в просторі E_n. Тоді $V_r \cap \delta(X) = B_r$, де B_r куля радіуса r з центром в нулі в просторі X, а $\delta(X)$ – образ простору X при відображенні δ.*

Доведення. Нехай $x \in B_r$. Тоді $\|\delta(x)\| < r$ і, отже, $\delta(x) \in V_r$. Якщо $\|x\| \geqslant r$, то $\|\delta(x)\| \geqslant r$ і $\delta(x) \notin V_r$.

Скажемо, що M є *n-алгебраїчною* множиною, якщо M є ядром деякого поліноміального відображення на X. Множину всіх n-алгебраїчних підмножин простору X позначатимемо $A_n(X)$.

Лема 2. *Нехай $M \in A_n(X)$ і M має порожній перетин з замкненою одиничною кулею $\bar{B}$ простору X. Тоді існує поліноміальний функціонал P степеня на X і куля B_r з центром в нулі, радіуса $r \leqslant 1$ такі, що $\ker P \supset M$ і $\ker P \cap B_r = \emptyset$.*

Доведення. Оскільки $M \in A_n(X)$, то $M = \ker F$ для деякого поліноміального оператора F на X. Позначимо $W := \ker \Phi_F \subset E_n$. Очевидно, що $0 \notin \ker \Phi_F$ тому, внаслідок замкненості ядра існує окіл нуля V в E_n такий, що V не перетинається з $\ker \Phi_F$. За теоремою Гана-Банаха знайдеться лінійний функціонал Φ_P на E_n такий, що $\ker \Phi_P \supset \ker \Phi_F$ і $\ker \Phi_P$ не перетинає окіл V. Окіл V перетинає множину $\delta(X)$ по підмножині, яка є кулею B_r деякого радіуса r (за лемою 1). Позначимо P – поліноміальний функціонал, який відповідає Φ_P. Тоді $\ker P \supset M$ і $\ker P \cap B_r = \emptyset$.

Теорема 1. *Нехай X - комплексний банахів простір і X_0 - його замкнений підпростір. Довільний поліном $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X_0)$ продовжується до деякого полінома $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$ тоді і тільки тоді, коли з того, що $M \in A_n(X_0)$ випливає, що $M \in A_n(X)$.*

Доведення. Без втрати загальності, ми можемо вважати, що $P(0) = 0$ і P – радикальний поліном, тобто P містить свої незвідні співмножники у першому степені. Припустимо, що $\ker P \in A_n(X)$. Тоді ядро полінома P, визначеного на X_0, збігається з ядром деякого поліноміального оператора G, визначеного на X. Згідно з лемою 2 існує продовження множини $\ker G = \ker P$ до множини, яка є ядром деякого полінома Q. Нехай $W = \ker \Phi_Q$ і x_0 – деяка точка з X_0 така, що $P(x_0) \neq 0$. Оскільки W має корозмірність 1 в E_n і $\delta(x_0) \notin W$, то ми можемо визначити лінійний функціонал Ψ так, що $\ker \Psi = W$, $\Psi(\delta(x_0)) = P(x_0)$ і продовжити його за лінійністю на весь простір E_n. Приймемо $\tilde{P}(x) := \Psi(\delta(x))$. За лемою 2 ядро полінома $\tilde{P}$ (яке збігається з ядром полінома Q) не є щільним у X, тому $\tilde{P}$ є неперервним [2]. Припустимо, що звуження $\tilde{P}$ на X_0 не збігається з P. Позначимо це звуження P'. Оскільки $\ker P = \ker P'$ і P – радикальний поліном, то з теореми про нулі [16] випливає, що $P = cP'$ для деякої константи c. З іншого боку, $P(x_0) = P'(x_0)$. Тому $c = 1$.

Нехай M – деяка n-алгебраїчна підмножина в X_0. Тоді M є перетином ядер деякої сім'ї поліномів P_i, $i \in I$, заданих на X_0. За умовою ми можемо продовжити кожен поліном P_i до полінома $\tilde{P}_i$. Тоді $M = X_0 \cap \left(\cap_{i\in I} \ker \tilde{P}_i\right)$. Оскільки $X_0 \in A_n(X)$, то й $M \in A_n(X)$.

У випадку, коли X – дійсний банахів простір, поліном P на X_0 може мати нульове ядро. Точка 0 є, звичайно, алгебраїчною множиною простору X_0, проте, як буде показано нижче у прикладі, поліном з таким ядром може не мати продовження на X. Розглянемо комплексифікацію $X^c = X \oplus iX$ дійсного простору X. Комплексифікація X_0^c підпростору X_0 буде підпростором в X^c, а поліном P на X_0 може бути продовженим до комплексного полінома P^c на X_0^c. З теореми

1 випливає таке: якщо $\ker P^c \in A_n(X^c)$ то існує продовження $\tilde{P}^c$ полінома P^c на X^c. Тоді звуження полінома $\tilde{P}^c$ на $X \subset X^c$ буде продовженням P.

Теорема 2. *Для банахового простору X і підпростору $X_0 \subset X$ такі умови еквівалентні:*
(1) всякий поліном продовжується з X_0 в X зі збереженням норми;
(2) простір $E_n(X_0)$ є замкненим підпростором простору $E_n(X)$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). З (1) випливає, що всякий лінійний неперервний функціонал на $E_n(X_0)$ продовжується до лінійного неперервного функціонала на $E_n(X)$ з тією ж нормою. Тому для всякого $w \in E_n(X_0)$

$$\sup_{\Phi \in E'_n(X_0)} |\Phi(w)| = \sup_{\Phi \in E'_n(X)} |\Phi(w)|.$$

Тобто, норма на $E_n(X_0)$ збігається зі звуженням норми з $E_n(X)$. Отже, $E_n(X_0)$ є замкненим підпростором простору $E_n(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай $\mathcal{P}(^{\leqslant n}X_0)$ тоді $\Phi_P \in E'_n(X_0)$. За теоремою Гана-Банаха ми можемо продовжити Φ_P до деякого функціонала $\Phi_{\tilde{P}}$ на $E_n(X)$. Тоді поліном $\tilde{P}$, який відповідає цьому функціоналу, є шуканим продовженням.

Приклад. Розглянемо простір ℓ_∞ і його замкнений підпростір ℓ_2. Поліном $P(\sum_i a_i e_i) = \sum_i a_i^2$, визначений на ℓ_2 не може бути продовженим до неперервного полінома на ℓ_∞. Згідно з теоремами 1, 2 ядро $\ker P$ не є алгебраїчною множиною в комплексному просторі ℓ_∞ і $E_2(\ell_2)$ не є замкненим підпростором в $E_2(\ell_\infty)$ у дійсному і комплексному випадках.

Зауважимо, що на відміну від лінійного випадку, з умови продовжуваності всякого полінома з підпростору не випливає продовжуваність із збереженням норми, навіть у скінченновимірних просторах. Детальніше див. [15, с.72, 452].

3. Принцип замкненості графіка

Під wp_n-топологією простору X розумітимемо найслабшу топологію, в якій всі поліноми з $\mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$ є неперервними.

Лема 3. *Нехай M – ядро деякого (не обов'язково неперервного) поліноміального оператора на банаховому просторі X. Якщо M – замкнена множина у wp_n-топології, то $M \in A_n(X)$.*

Доведення. Позначимо через $[M]$ перетин ядер поліномів на X, які обертаються в нуль на M. Якщо $M \notin A_n(X)$ то $[M] \neq M$. З іншого боку, з того, що M – замкнена множина у wp_n-топології випливає, що M є перетином всіх wp_n-замкнених множин, які містять M. Будь-яка wp_n-замкнена множина породжується прообразами замкнених множин при поліноміальних функціоналах, зокрема множинами вигляду $V_P = \{x \in X : |P(x)| \leqslant \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, $P \in \mathcal{P}(^{\leqslant n}X)$. Нехай $M \in V_P$, тобто поліном P є обмеженим на множині M. Тоді відповідний лінійний функціонал Φ_P є обмеженим на лінійному підпросторі в $W \subset E_n$

$$W = \{w \in E_n : w = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta(x_i), \quad (a_i) \in \ell_1, \ x_i \in M\}.$$

Справді,

$$\left|\Phi_P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta(x_i)\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_P(\delta(x_i))\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i P(x_i)\right| \leqslant \|(a_i)\|\epsilon.$$

А це означає, що Φ_P тотожно дорівнює деякій константі c на W. Тому $P(x) = c$ для будь-якого $x \in M$. Отже, з того, що $M \subset V_P$ випливає, що $M \subset \ker(P - c)$. Тому

$$M = \bigcap_{V_P \supset M} V_P = \bigcap_{V_P \supset M} \ker(P - c) = [M].$$

Теорема 3. *Якщо графік Γ_R поліноміального відображення R степеня n з банахового простору X в банахів простір Y є замкненою множиною в wp_n-топології простору $X \times Y$, то R є неперервним.*

Доведення. Вважатимемо, що $R(0) = 0$. Розглянемо поліноміальний оператор $F : X \times Y \to Y$, $F(x, y) = R(x) - y$. Очевидно, що $\ker F = \Gamma_R$. Позначимо через Z лінійний підпростір в $E_n(X \times Y)$, який є перетином ядер всіх лінійних неперервних функціоналів Φ_P на $E_n(X \times Y)$ таких, що $\ker P \supset \ker F$. Розглянемо фактор-відображення $\pi_Z : E_n(X \times Y) \to E_n(X \times Y)/Z$. Оператор π_Z є лінійним і неперервним. Тому існує неперервний поліноміальний оператор G, заданий на $X \times Y$ такий, що $G(x, y) = \pi_Z(\delta(x, y))$. З wp_n-замкненості множини $\ker F$ та леми 3 випливає, що $\ker F$ є перетином ядер поліномів P і тому $\ker F = \ker G$. Оскільки множина

$$\{(0, 0) + (0, y) \otimes (0, y) + \cdots + (0, y) \otimes \cdots \otimes (0, y),\ y \in Y\} \subset E_n(X \times Y)$$

належить ядру π_Z (тому що тільки лінійна компонента F залежить від $y \in Y$), то звуження відображення G на Y є лінійним оператором і $G(0, y) = \pi_Z(\delta(0, y)) = y$. Тобто, G можна подати у вигляді $G = \sum_{k=1}^{n} G_k$, де G_k – k-однорідні компоненти і G_k не залежать від $y \in Y$ при $k > 1$, а $G_1(x, y) = G_1'(x) + y$. Іншими словами, множина пар (x, y) таких, що $y = -G_1'(x) - \sum_{k=2}^{n} G_k(x)$ є розв'язком рівняння $G(x, y) = 0$. Тобто, графік поліноміального оператора R збігається з графіком поліноміального неперервного оператора $-G_1' - \sum_{k=2}^{n} G_k$. Тому $R = -G_1' - \sum_{k=2}^{n} G_k$ і R – неперервний.

Зауважимо, що в нескінченновимірному комплексному банаховому просторі wp_n-топологія завжди слабша за топологію, породжену нормою. Проте для дійсного гільбертового простору ці топології збігаються при $n > 1$. З теореми про замкнений графік для поліноміальних операторів з банахового простору X в сепарабельний банахів простір Y випливає, що всякий замкнений графік полінома з X в Y (Y – сепарабельний) є wp_n-замкненим. Поки що невідомо чи це правильно для довільного Y.

Наслідок 2. *Нехай F – деяке бієктивне відображення з X в Y, неперервне в wp_n-топології простору X. Припустимо, що F^{-1} – поліноміальний оператор степеня n. Тоді F^{-1} – неперервний.*

Доведення. З wp_n-неперервності F випливає, що графік F, а отже й F^{-1} – wp_n-замкнена множина. Застосовуємо теорему 3 до відображення F^{-1}.

---

1. *Bochnak J., Siciak J.* Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces // Studia Math. – 1971. – Vol.39. – P.59-76.
2. *Drużkowski L.M.* Two criteria for continuity of polynomials and G-holomorphic mappings in infinite dimensions // Univ. Iagel. Acta Math. – 1984. – Vol.24. – P.135-138.
3. *Plichko A., Zagorodnyuk A.* On automatic continuity and three problems of "The Scottish Book" concerning the boundedness of polynomial functionals // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – Vol. 220. – P.477-494.
4. *A.Plichko, A.Zagorodnyuk.* Isotropic mappings and automatic continuity of polynomials, analytic and convex operators, in "General topology in Banach spaces" (ed. A.Plichko, T.Banakh). – NOVA Science Publisher, NY. To appear.
5. *Fernandez C.S.* The closed graph theorem for multilinear mappings // J. Math. and Math. Sci. Internat. – 1996. –Vol. 19. №2. – P.407-408.
6. *Rolewicz S.* On inversion of non-linear transformations // Studia Math. – 1958. – Vol.17. – P.79-83.
7. *Horowitz Ch.* An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol.53. – P.293-294.
8. *Aron R., Berner P.* A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings // Bull. Soc. Math. France. – 1978. – Vol.106. – P.3-24.
9. *Lindström M., Ryan R.A.* Application of ultraproducts to infinite dimensional holomorphy // Math. Scand. – 1992. – Vol. 71. – P.229-242.
10. *Carando D., Zaldendo I.* A Hahn-Banach theorem for integrable polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol.127. – P.241-250.
11. *Kirwan P., Ryan R.A.* Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – Vol.126. – P.1023-1029.
12. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. – 1991. – Vol.15. – P.51-93.
13. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Weak-star continuous analytic funtions // Can. J. Math. – 1995. – Vol. 47. – P.673-683.
14. *Aron R., Galindo P., Garcia D., Maestre M.* Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – Vol.348. – P.543-559.
15. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. – Berlin; New York, 1999.
16. *Загороднюк А.В.* Теорема Гільберта про нулі поліноміальних ідеалів на комплексному нескінченновимірному просторі // Мат. методи і фіз. мех. поля. – 1997. – Т.40. – №4. – С.13-20.

POLYNOMIAL ANALOGS OF SOME CLASSICAL THEOREMS OF FUNCTIONAL ANALYSIS

A. Zagorodnyuk

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Meckanics and Mathematics
GSP, 3b Naukova Str. 79601 Lviv, Ukraine

Some analogs of Hahn-Banach extension principle and Closed Graph Theorem for polynomial operators on Banach spaces are proved.

Key words: polinomial mapping on Banach spaces, theorems of extended and closed graph.

Стаття надійшла до редколегії 10.04.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.15–25

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.15–25

УДК 513.88

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТУ ТА ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГРАНИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕПАРНОГО ПОРЯДКУ З МАТРИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Олег СТОРОЖ, Орест ШУВАР

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто один клас скінченновимірних збурень диференціального оператора з інтегральними крайовими умовами, який діє у просторі вектор-функцій. Побудовано резольвенту збуреного оператора і визначено асимптотичну поведінку його власних функцій. Знайдено умови, які забезпечують повноту системи цих функцій.

Ключові слова: скінченновимірні збурення диференціального оператора, інтегральнимі крайовимі умови, власні функції.

Диференціальні оператори з інтегральними крайовими умовами, а також спряжені з ними оператори (які отримали назву диференціально-граничних) вивчали в багатьох працях, детальний огляд яких міститься в [1].

Одну з теоретико-функціональних моделей, яка дає змогу з єдиного погляду розглядати зазначені вище оператори, запропонував В.Е.Лянце [2]. У цій статті йтиметься про оператори, споріднені в сенсі [2] з парою, яка складається з максимального та мінімального операторів, породжених у гільбертовому просторі $L_2^m \stackrel{\text{def}}{=} L_2((0,1);\mathbb{C}^m)$ деяким диференціальним виразом порядку $n = 2\mu - 1$.

1. Позначення і формулювання задачі. Нижче скрізь під $\mathbb{B}_m$ розуміємо множину лінійних операторів, що діють у просторі $\mathbb{C}^m$, кожний такий оператор ототожнюємо з відповідною матрицею. Через $\mathbf{1}_m$ та $\mathbf{1}$ позначаємо одиничні оператори в $\mathbb{C}^m$ та L_2^m, через $D(T)$, $\ker T$, $\rho(T)$, $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ - область визначення, многовид нулів, резольвентну множину, спектр та точковий спектр оператора T відповідно, а через T^* - оператор, спряжений з T.

Нехай $l[y] = y^{(n)} + P_2(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y \quad (y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x)))$, де $P_2(x), \ldots, P_n(x)$ - визначені на $[0, 1]$ неперервні $\mathbb{B}_m$-значні функції, а $U_\nu = U_{\nu 0} + U_{\nu 1}$, де

$$U_{\nu 0}(y) = A_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} A_{\nu j} y^{(j)}(0), U_{\nu 1}(y) = B_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} B_{\nu j} y^{(j)}(1),$$

$A_\nu, B_\nu, A_{\nu j}, B_{\nu j} \in \mathbb{B}_m (\nu = 1, \ldots, n + r; r = 0, 1, \ldots, n)$, причому $n - 1 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0$, $n - 1 \geqslant k_{n+1} \geqslant \ldots \geqslant k_{n+r} \geqslant 0$; $k_{\nu+2} < k_\nu$, якщо $\nu = 1, 2, \ldots, n-2, n+1, \ldots, n+r-2$; хоча б один з операторів A_ν або B_ν $(\nu = 1, \ldots, n+r)$ є ненульовим; система крайових форм $\{U_1, \ldots, U_n\}$ лінійно незалежна.

Далі, нехай $\varphi_\nu{}^{(ij)} \in L_2(0,1)$, $\varphi_\nu(x) = (\varphi_\nu{}^{(ij)}(x))_{i,j=1}^m$, $\Phi_\nu y = \int\limits_0^1 \varphi_\nu{}^*(x)y(x)dx$, $\nu = 1,\dots,n+r$, $y \in L_2^m$. Зрозуміло, що Φ_ν – лінійний неперервний оператор $L_2^m \to \mathbb{C}^m$, спряжений з яким має такий вигляд:

$$\forall h \in \mathbb{C}^m \quad (\Phi_\nu^* h)(x) = \varphi_\nu(x)h.$$

Визначимо оператор T за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} D(T) = \{y \in L_2^m : y, y', \dots, y^{n-1} & \text{ абсолютно неперервні на } [0,\ 1], \\ & l[y] \in L_2^m,\ U_\nu y = \Phi_\nu y, \nu = 1,\dots,n\}, \\ & Ty = t[y] \stackrel{\text{def}}{=} l[y] + \sum_{\nu=n+1}^{n+r} \Phi_\nu{}^* U_\nu y \quad \forall y \in D(T). \end{aligned}$$

У цій праці визначимо деякі спектральні властивості оператора T, які у випадку, коли $\Phi_1 = \dots = \Phi_{n+r} = 0$, досліджено в [3], а у випадку, коли $m = 1$ - в [4].

2. Резольвента оператора T. Нехай $\{Y_1,\dots,Y_n\}$ – деяка фундаментальна система розв'язків рівняння $l[Y] = \lambda Y$ стосовно невідомої $\mathbb{B}_m$-значної функції $Y(x)$. Визначимо оператор-функції $Z_1,\dots,Z_n$, враховуючи умови

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \\ Y_1^{(n-2)} & \dots & Y_n^{(n-2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{0}_m \\ \vdots \\ \mathbf{0}_m \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\mathbb{O}_m \in \mathbb{B}_m$ – нульова матриця, і приймемо

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\mu} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi < x, \\ -\sum\limits_{j=\mu+1}^{n} Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi > x, \end{cases} \tag{2}$$

$$\tilde{f}(x) = \int\limits_0^1 g(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad (f \in L_2^m),$$

$$Y_{n+j}(x) = \tilde{\varphi}_{n+j}(x) = \int\limits_0^1 g(x,\xi)\varphi_{n+j}(\xi)d\xi, \quad (j = 1,\dots,r). \tag{3}$$

Як свідчить безпосередня перевірка,

$$l[\tilde{f}] - \lambda\tilde{f} = f, \quad l[Y_{n+j}] - \lambda Y_{n+j} = \varphi_{n+j}. \tag{4}$$

Далі, нехай

$$V_\nu(y) = \begin{cases} U_\nu(y) - \Phi_\nu y, & \nu = 1,\dots,n, \\ U_\nu(y), & \nu = n+1,\dots,n+r, \end{cases} \tag{5}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} V_1(Y_1) & \dots & V_1(Y_n) & V_1(Y_{n+1}) & \dots & V_1(Y_{n+r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(Y_1) & \dots & V_n(Y_n) & V_n(Y_{n+1}) & \dots & V_n(Y_{n+r}) \\ V_{n+1}(Y_1) & \dots & V_{n+1}(Y_n) & V_{n+1}(Y_{n+1}) + \mathbf{1}_m & \dots & V_{n+1}(Y_{n+r}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n+r}(Y_1) & \dots & V_{n+r}(Y_n) & V_{n+r}(Y_{n+1}) & \dots & V_{n+r}(Y_{n+r}) + \mathbf{1}_m \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Якщо* $\det \Delta(\lambda) \neq 0$,*то* $\lambda \in \rho(T)$ *і*

$$\forall f \in L_2^m \quad ((T - \lambda\mathbf{1})^{-1} f)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

де

$$G(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - (Y_1(x), \dots, Y_{n+r}(x)) \Delta(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} V_1(g) \\ V_2(g) \\ \vdots \\ V_{n+r}(g) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а величини, які фігурують у правій частині рівності (7) такі, як в (1)-(3), (5)-(6), причому у виразах $V_j(g)$ *всі похідні та інтеграли беруться за змінною* x.

Якщо ж $\det \Delta(\lambda) = 0$ *і, крім того, система* $\{\varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_{n+r}(x)\}$ *лінійно незалежна, тобто*

$$C_1, \dots, C_r \in \mathbb{B}_m, \quad \sum_{j=1}^{r} \varphi_{n+j}(x) C_j = 0 \Longrightarrow C_1 = \dots = C_r = 0, \tag{8}$$

то $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Доведення. У правильності першого твердження легко переконатись за допомогою прямих обчислень, застосувавши (4). Рівність $Ty = \lambda y$ виконується тоді і тільки тоді, коли існують $c_1, \dots, c_{n+r} \in \mathbb{C}^m$ такі, що $\Delta(\lambda)c = 0$, де $c = (c_1, \dots, c_{n+r})$ і

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n+r} Y_j(x) c_j.$$

Поділявши на обидві частини цієї рівності виразом $l[y] - \lambda y$ і врахувавши (8), переконаємось у правильності другого твердження.

Зауваження 1. Оскільки $Y_1, \dots, Y_n$ можна вибрати так, щоб вони виявилися цілими аналітичними функціями параметра λ, то $(T - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ є мероморфною оператор-функцією, полюсами якої можуть бути тільки власні значення оператора T.

Зауваження 2. Нехай $\lambda \in \rho(T)$. З (7) випливає, що елементи матриці $G(x, \xi, \lambda)$ квадратично інтегровані на $[0, 1] \times [0, 1]$, так що $(T - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ - компактний оператор. Якщо $T = T^*$, то існує ортонормована база простору L_2^m, складена з власних елементів оператора T. Використовуючи теорему Гільберта-Шмідта (див.

[5, с.10, 69]), неважко довести, що в цьому випадку будь-яка функція $f \in D(T)$ є сумою рівномірно збіжного ряду за цими елементами.

Зауваження 3. Зрозуміло, що умова (8) не призводить до суттєвої втрати загальності, тому нижче скрізь вважатимемо, що вона виконується.

3. Асимптотика власних функцій. Приймемо $\lambda = -\rho^n$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ і розіб'ємо комплексну ρ-площину на $2n$ секторів ${S_\varkappa}^{(c)}$ з вершиною в точці $-c \in \mathbb{C}$, визначених так:

$$ {S_\varkappa}^{(c)} = \{\rho \in \mathbb{C} : \frac{\varkappa\pi}{n} \leqslant \arg(\rho + c) \leqslant \frac{(\varkappa+1)\pi}{n}\}, \varkappa = 0, 1, \dots, n-1. $$

Позначимо через $\omega_1, \dots, \omega_n$ всі різні корені степеня n з -1, занумеровані так, що для деякого фіксованого $\varkappa$ і всіх $\rho \in S_\varkappa \overset{\text{def}}{=} {S_\varkappa}^{(0)}$ виконуються нерівності. $Re(\rho\omega_1) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_n)$. Розділимо ${S_\varkappa}^{(c)}$ на підобласті

$$ {S_\varkappa}'^{(c)} = \{\rho \in {S_\varkappa}^{(c)} : Re(\rho + c)\omega_\mu \leqslant 0\}, $$

$$ {S_\varkappa}''^{(c)} = \{\rho \in {S_\varkappa}^{(c)} : Re(\rho + c)\omega_\mu \geqslant 0\} $$

і приймемо

$$ \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu, & \rho \in {S_\varkappa}'^{(c)}, \\ \mu - 1, & \rho \in {S_\varkappa}''^{(c)}. \end{cases} $$

Якщо ρ міститься в одній з двох фіксованих областей ${S_\varkappa}' \overset{\text{def}}{=} {S_\varkappa}'^{(0)}$ або ${S_\varkappa}'' \overset{\text{def}}{=} {S_\varkappa}''^{(0)}$, то

$$ Re(\rho\omega_1) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_{\tilde{\mu}}) \leqslant 0 \leqslant Re(\rho\omega_{\tilde{\mu}+1}) \leqslant \dots \leqslant Re(\rho\omega_n) \tag{9} $$

(деталі – див. [3, с.53, 75]). Визначимо числа $\theta_0, \dots, \theta_m$ за допомогою рівності

$$ \theta_0 + \theta_1\xi + \dots + \theta_m\xi = $$

$$ = \begin{pmatrix} A_1\omega_1^{k_1} & \dots & A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1 + \xi B_1)\omega_\mu^{k_1} & B_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \dots & B_1\omega_n^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} & \dots & A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2 + \xi B_2)\omega_\mu^{k_2} & B_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \dots & B_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n\omega_1^{k_n} & \dots & A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n + \xi B_n)\omega_\mu^{k_n} & B_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \dots & B_n\omega_n^{k_n} \end{pmatrix}. \tag{10} $$

Якщо $\theta_0\theta_m \neq 0$, то система крайових форм $\{U_1, \dots, U_n\}$ називається регулярною за Біркгофом. Означення регулярності не залежить від вибору області $S_\varkappa$, а рівняння

$$ \theta_0 + \theta_1\xi + \dots + \theta_m\xi = 0 \tag{11} $$

має ті самі корені $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}$ (відповідно $\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_m^{(2)}$) для всіх $S_\varkappa$ з непарним (парним) $\varkappa$ (див. [3, с.121]).

З результатів, викладених в [6], випливає, що кожному кореневі $\xi_j^{(\alpha)}(j = 1, \dots, m; \alpha = 1, 2)$ рівняння (11) відповідає послідовність $\lambda_{kj}^{(\alpha)} = -(\tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)})^n$ власних значень оператора T, де

$$ \tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)} = \rho_{kj}^{(\alpha)} + o(1), k \in \mathbb{N}, \tag{12} $$

$$ \rho_{kj}^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu}(\mp 2k\pi i + \ln_j \xi_j^{(1)}), \tag{13} $$

$$\rho_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu}(\pm 2k\pi i + \ln_j \xi_j^{(2)}), \tag{14}$$

верхній знак відповідає числу вигляду $n = 4q - 1$, нижній – числу вигляду $n = 4q + 1$, а $\ln_j \xi$ – деяке фіксоване значення натурального логарифма.

Знайдемо асимптотичні формули для відповідних власних (вектор-) функцій при великих за модулем власних значеннях $\lambda = -\rho^n$. Для цього позначимо через $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_n$ фундаментальну систему розв'язків рівняння $t[Y] + \rho^n Y = 0$ стосовно невідомої $\mathbb{B}_m$-значної функції $Y(x)$ таку, що для достатньо великих за модулем $\rho \in S_\varkappa{}'^{(c)}$ ($\rho \in S_\varkappa{}''^{(c)}$) і $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\hat{Y}_j^{(k)}(x, \rho) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^k (e^{\rho\omega_j x}\mathbf{1}_m + o(1)), & j = 1, \ldots, \tilde{\mu}, \\ (\rho\omega_j)^k (e^{\rho\omega_j x}\mathbf{1}_m + e^{\rho\omega_j} o(1)), & j = \tilde{\mu}+1, \ldots, n \end{cases} \tag{15}$$

(існування системи, що задовольняє ці співвідношення, доведено в [6]) і приймемо

$$V_\nu(Y) = U_\nu(Y) - \int_0^1 \varphi_\nu^*(x) Y(x) dx, \nu = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Розглядатимемо тільки однократні власні значення, для яких ранг блочної матриці $\{V_\nu(\hat{Y}_j)\}_{\nu,j=1}^n$ дорівнює $nm - 1$. У цьому випадку відповідна власна функція має вигляд $y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^m \hat{Y}_j(x, \lambda) c_j$, де $(c_1, \ldots, c_n)$ - деякий нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^n V_\nu(\hat{Y}_j) c_j = 0, \nu = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Нехай $\{e_1, \ldots, e_m\}$ - канонічна база простору $\mathbb{C}^m$, $\hat{Y}_j(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{y_j^{(\alpha\beta)}\}_{\alpha,\beta=1}^m$, $\mathbb{E} \stackrel{\text{def}}{=} (e_1, \ldots, e_m)$, $\mathbb{E}\hat{Y}_j = (\sum_{i=1}^m y_j^{(i1)} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^m y_j^{(im)} e_i)$, $j = 1, \ldots, n$.

Припустимо, що не всі мінори елементів першого рядка матриці системи (17) дорівнюють нулю (цього завжди можна досягти шляхом перепозначень) і позначимо через $\tilde{V}_1(\hat{Y}_j)(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ матрицю, утворену з $V_1(\hat{Y}_j)(A_1, B_1)$ відкиданням її першого рядка. Зі сказаного вище і з відомого правила розкриття визначника за елементами першого рядка випливає, що, з точністю до сталого скалярного множника,

$$y(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\hat{Y}_1 & \ldots & \mathbb{E}\hat{Y}_n \\ \tilde{V}_1(\hat{Y}_1) & \ldots & \tilde{V}_1(\hat{Y}_n) \\ V_2(\hat{Y}_1) & \ldots & V_2(\hat{Y}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n(\hat{Y}_1) & \ldots & V_n(\hat{Y}_n) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Теорема 2. *Якщо система $\{U_1, \ldots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом, то простому власному значенню $\lambda_{kj}^{(\alpha)} = -(\tilde{\rho}_{kj}^{(\alpha)})^n$ (див. (12)-(14)) оператора T відповідає власна функція*

$$y_{kj}^{(\alpha)} = \det(X_{1,kj}^{(\alpha)}, X_{2,kj}^{(\alpha)}) \quad (j = 1, \ldots, m; \alpha = 1, 2),$$

де

$$X^{\alpha}_{1,k_j}=\begin{pmatrix}[e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_1 x}\mathbb{E}] & \dots & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{\mu-1} x}\mathbb{E}] & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{\mu} x}\mathbb{E}]\\ \omega_1^{k_1}[\tilde{A}_1] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_1}[\tilde{A}_1] & \omega_{\mu}^{k_1}[\tilde{A}_1+\xi_j^{(\alpha)}\tilde{B}_1]\\ \omega_1^{k_2}[A_2] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_2}[A_2] & \omega_{\mu}^{k_2}[A_2+\xi_j^{(\alpha)}B_2]\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \omega_1^{k_n}[A_n] & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_n}[A_n] & \omega_{\mu}^{k_n}[A_n+\xi_j^{(\alpha)}B_n]\end{pmatrix},$$

$$X^{\alpha}_{2,k_j}=\begin{pmatrix}[e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{\mu+1}(x-1)}\mathbb{E}] & \dots & [e^{\rho^{(\alpha)}_{k_j}\omega_{n}(x-1)}\mathbb{E}]\\ \omega_{\mu+1}^{k_1}[\tilde{B}_1] & \dots & \omega_{n}^{k_1}[\tilde{B}_1]\\ \omega_{\mu+1}^{k_2}[B_2] & \dots & \omega_{n}^{k_2}[B_2]\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{\mu+1}^{k_n}[B_n] & \dots & \omega_{n}^{k_n}[B_n]\end{pmatrix},$$

$$[A]\stackrel{\mathrm{def}}{=}A+o(1).$$

Доведення. Враховуючи (15), (16), а також співвідношення (6)-(7) праці [6], бачимо, що

$$\mathbb{E}Y_j=\begin{cases}[e^{\rho\omega_j x}\mathbb{E}], & j=1,\dots,\tilde{\mu},\\ e^{\rho\omega_j}[e^{\rho\omega_j(x-1)}\mathbb{E}], & j=\tilde{\mu}+1,\dots,n.\end{cases}\tag{19}$$

$$V_\nu(Y_j)=\begin{cases}(\rho\omega_j)^{k_\nu}[A_\nu], & j=1,\dots,\mu-1,\\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}([A_\nu]+e^{\rho\omega_j}[B_\nu]), & j=\mu,\\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[B_\nu], & j=\mu+1,\dots,n.\end{cases}\tag{20}$$

Для достатньо великих $|\lambda|$ число ρ, яке фігурує в (19)-(20), дорівнює одному з чисел $\tilde{\rho}^{(\alpha)}_{kj}=\rho^{(\alpha)}_{kj}+o(1)$ (див. (12)-(14)). Оскільки числа $\rho^{(\alpha)}_{kj}$ лежать на прямій, паралельній бісектрисі сектора $S_\varkappa$, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\rho\in {S_\varkappa}'^{(c)}$, тобто $\tilde{\mu}=\mu$. Враховуючи це, легко переконатись, що для завершення доведення достатньо підставити (19)-(20) у (18) і поділити отриманий вираз на неістотний множник $\rho^{k_1(m-1)+(k_2+\dots+k_n)m}e^{m\rho(\omega_{\mu+1}+\dots+)\omega_n}$.

4. Допоміжні асимптотичні співвідношення. Нехай $\{Y_1,\dots,Y_n\}$ - фундаментальна система розв'язків рівняння $l[Y]+\rho^nY=0$ така, що при достатньо великих за модулем $\rho\in S_\varkappa$

$$Y_j^{(k)}(x,\rho)=(\rho\omega_j)^k e^{\rho\omega_j x}(\mathbf{1}_m+O(\frac{1}{\rho})), j=1,\dots,n, k=0,1,\dots,n-1,\tag{21}$$

причому оператор-функції, які фігурують у лівій частині (21), аналітично залежать від ρ. Існування такої системи доведено в [3, с.119]. Нехай для будь-якого $\rho\in {S_\varkappa}'^{(c)}$ (або ж $\rho\in {S_\varkappa}''^{(c)}$)

$$\tilde{g}(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{\tilde{\mu}}Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi<x,\\ -\sum\limits_{j=\tilde{\mu}+1}^{n}Y_j(x)Z_j(\xi), & \xi>x,\end{cases}$$

де $Z_1, \dots, Z_n$ такі, як в (1). Відомо (див. [3, с.126]), що

$$Z_j(\xi) = e^{-\rho\omega_j\xi} \frac{1}{n\rho^{n-1}}(-\omega_j \mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), \quad j = 1, \dots, n,$$

а отже,

$$\tilde{g}^{(k)}(x,\xi) = \frac{d^k \tilde{g}}{dx^k}(x,\xi) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\rho^k}{n\rho^{n-1}} \sum\limits_{j=1}^{\tilde{\mu}} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\omega_j^{k+1}\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), & \xi < x \\ \frac{\rho^k}{n\rho^{n-1}} \sum\limits_{j=\tilde{\mu}+1}^{n} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\omega_j^{k+1}\mathbf{1}_m + O(\frac{1}{\rho})), & \xi < x, \end{cases} \tag{22}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$. Приймемо

$$\tilde{Y}_{n+j}(x) = \int\limits_0^1 \tilde{g}(x,\xi,\lambda)\varphi_{n+j}(\xi)d\xi, (j = 1, \dots, r).$$

Як свідчить безпосередня перевірка, $l[\tilde{Y}_{n+j}] - \lambda\tilde{Y}_{n+j} = \varphi_{n+j}$ (пор. з (4)), тому в формулі (7) для ядра резольвенти оператора T g можна замінити на $\tilde{g}$. Іншими словами, якщо $\lambda \in \rho(T)$, то

$$G(x,\xi,\lambda) = \tilde{g}(x,\xi,\lambda) - (\tilde{Y}_1(x), \dots, \tilde{Y}_{n+r}(x))\tilde{\Delta}(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ V_2(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

де $\tilde{Y}_j \stackrel{\text{def}}{=} Y_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $V_1, \dots, V_{n+r}$ такі, як в (5), а

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \{V_\nu(\tilde{Y}_j)\}_{\nu,j=1}^{n+r} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{mr} \end{pmatrix}.$$

Лема 1. *Якщо* $\varphi \in L_2((0,1), \mathbb{B}_m)$, *то*

$$\int\limits_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx = o(1), \qquad j = 1, \dots, \tilde{\mu}, \tag{24}$$

$$\int\limits_0^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx = o(1), \qquad j = \tilde{\mu}+1, \dots, n, \tag{25}$$

причому, якщо елементи матриці $\varphi(x)$ *мають похідні, які належать до* $L_1(0,1)$, *то в (24)-(25)* $o(1)$ *можна замінити на* $O(\frac{1}{\rho})$.

Крім того,

$$\int\limits_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)} O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad j = 1, \dots, \tilde{\mu}, \tag{26}$$

$$\int_0^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)} O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad j=\tilde{\mu}+1,\ldots,n. \tag{27}$$

Доведення. Зрозуміло, що достатньо переконатись у правильності леми у випадку, коли $m=1$. Нехай спочатку $\varphi_0 \in L_2(0,1)$ така, що $\varphi_0' \in L_1(0,1)$. Використовуючи формулу інтегрування частинами і враховуючи (9), отримуємо (при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$)

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0(x)dx\right| = \left|\frac{\varphi_0(x)e^{\rho\omega_j(x-\xi)}|_{x=1}^{x=\xi}}{\rho\omega_j} - \frac{1}{\rho\omega_j}\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0'(x)dx\right| \leqslant \frac{C}{\rho},$$

де C – деяка стала. Якщо φ – довільна функція з $L_2(0,1)$, а $\varepsilon>0$, то існує така функція φ_0 розглянутого вище типу, що $\int\limits_0^1 |\varphi(x)-\varphi_0(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2e^{|c|}})$, де $-c$ – вершина сектора ${S_\varkappa}^{(c)}$. Тому при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi(x)dx\right| \leqslant \left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\varphi_0(x)dx\right| +$$

$$+\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)}(\varphi(x)-\varphi_0(x))dx\right| \leqslant \frac{C}{|\rho|}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

якщо $|\rho| > \frac{2C}{\varepsilon}$, тобто (24) доведено. Аналогічно доводиться (25).

З (9) випливає, що при $j=1,\ldots,\tilde{\mu}$ і достатньо великих за модулем $\rho \in {S_\varkappa}^{(c)}$

$$\left|\int_1^\xi e^{\rho\omega_j(x-\xi)} O\left(\frac{1}{\rho}\right)\varphi(x)dx\right| \leqslant$$

$$\int_0^\xi \left|O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right| |e^{(\rho+c)\omega_j(x-\xi)}||e^{-c\omega_j(x-\xi)}||\varphi(x)|dx \leqslant \frac{\text{const}}{|\rho|},$$

тобто (26) доведено. Аналогічно доводиться (27).

З (22), (24) – (27) і наведених в [3, с.123] асимптотичних формул для величин $U_\nu(Y_j)$ $(\nu=1,\ldots,n+r; j=1,\ldots,n)$ випливає, що

$$\tilde{Y}_{n+j}^{(k)} = \frac{\rho^k}{\rho^{n-1}}o(1), j=1,\ldots,r, k=0,1,\ldots,n-1, \tag{28}$$

і при будь-яких $\nu=1,\ldots,n+r$

$$V_\nu(\tilde{g}) = O\left(\frac{1}{\rho^{n-1-k_\nu}}\right), \tag{29}$$

$$V_\nu(Y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[A_\nu], & j=1,\ldots,\mu-1, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}([A_\nu]+e^{\rho\omega_j}[B_\nu]), & j=\mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[B_\nu], & j=\mu+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{30}$$

$$V_\nu(Y_{n+j}) = \frac{\rho^{k_\nu}}{\rho^{n-1}} o(1), j = 1, \dots, r, \tag{31}$$

причому всі величини, які фігурують в (28)-(31), аналітично залежать від ρ, якщо $\rho \in S_\varkappa$ достатньо велике за модулем.

5. Розвинення за власними функціями. Нижче скрізь припускаємо, що система $\{U_1, \dots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом. Порівнюючи наведені в [6] асимптотичні формули для власних значень оператора T зі сказаним в [3, с.125], переконуємось, що в комплексній λ-площині існує така послідовність $\{\Gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ кіл радіуса R_k з центром в початку координат, що $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$ і при деякому $\delta > 0$ прообрази в $S_0 \cup S_1$ власних значень оператора T при відображенні $\lambda = -\rho^n$ перебувають на відстані $\geqslant \delta$ від прообразів кожного з кіл Γ_k.

Лема 2. *На колах Γ_k елементи матриці-функції $G(x, \xi, \lambda)$ задовольнять нерівності*

$$|G_{\alpha\beta}(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}, (\alpha, \beta = 1, \dots, m), \tag{32}$$

де M – деяка стала.

Доведення. Нехай γ_k – прообраз в $S_0 \cup S_1$ кола Γ_k при відображенні $\lambda = -\rho^n$, а числа $\omega_1, \dots, \omega_n$ занумеровані так, що нерівності (9) справджуються при $\varkappa = 0$. Визначимо блочну матрицю $\Delta_0(\lambda) \in \mathbb{B}_{m(n+r)}$, враховуючи рівності $\tilde{\Delta}(\lambda) = \Lambda \Delta_0(\lambda) E$, де

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\rho^{k_1} \mathbf{1}_m, \dots, \rho^{k_{n+r}} \mathbf{1}_m),$$

$$E = \operatorname{diag}(\underbrace{\mathbf{1}_m, \dots, \mathbf{1}_m}_{\tilde{\mu}}, e^{\rho\omega_{\tilde{\mu}+1}} \mathbf{1}_m, \dots, e^{\rho\omega_n} \mathbf{1}_m, \rho^{-k_{n+1}} \mathbf{1}_m, \dots, \rho^{-k_{n+r}} \mathbf{1}_m).$$

З (23) випливає, що

$$G(x, \xi, \lambda) = \tilde{g}(x, \xi, \lambda) - (\tilde{Y}_1(x), \dots, \tilde{Y}_{n+r}(x)) E^{-1} \Delta_0(\lambda)^{-1} \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ V_2(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}), \end{pmatrix}$$

з (21),(28) - що $(\tilde{Y}_1(x), \dots, \tilde{Y}_{n+r}(x)) E^{-1} = (\underbrace{O(1), \dots, O(1)}_{n+r})$, а з (29) - що

$$\Lambda^{-1} \begin{pmatrix} V_1(\tilde{g}) \\ \vdots \\ V_{n+r}(\tilde{g}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\rho^{n-1}}) \\ \vdots \\ O(\frac{1}{\rho^{n-1}}) \end{pmatrix}.$$

Тому (див. (22)) залишається довести, що на колах Γ_k елементи матриці $\Delta_0(\lambda)^{-1}$ обмежені зверху одним і тим самим числом. Для того щоб у цьому переконатися, використаємо оцінки (30), (31), з яких випливає, що будь-який елемент матриці $\Delta_0(\lambda)$, а отже, і його алгебраїчне доповнення, є величиною, обмеженою стосовно ρ, і що $\det \Delta_0(\lambda) = \psi(\rho) + o(1)$, де

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \theta_0 + \theta_1 e^{\rho\omega_\mu} + \dots + \theta_m e^{m\rho\omega_\mu}, & \rho \in S_0', \\ \theta_0 e^{-\rho\omega_\mu} + \dots + \theta_{m-1} e^{-\rho\omega_\mu}, & \rho \in S_0'', \end{cases}$$

а $\theta_0, \ldots, \theta_m$ визначені згідно з (10). До такої оцінки визначника прийдемо, розкривши його за першими стовпцями. Провівши міркування, аналогічні використаним на с. 96 монографії [3], доходимо висновку, що на дугах $\gamma_k \cap S_0$ $\det \Delta_0(\lambda)$ обмежений знизу одним і тим самим числом. Отже, на цих дугах справджуються нерівності (32). Оскільки попередні міркування застосовані і при $\rho \in S_1$, то лему доведено.

Перш ніж переходити до формулювання основного результату, зазначимо, що під Ω_k ми розуміємо круг, обмежений колом Γ_k, про яке йшлося в лемі 2 і що, не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$(2k-1)^n\pi^n \leqslant R_k \leqslant (2k+1)^n\pi^n, \tag{33}$$

де R_k - радіус кола Γ_k. Це випливає з (12)-(14).

Теорема 3. *Якщо система крайових форм $\{U_1, \ldots, U_n\}$ регулярна за Біркгофом, а всі полюси резольвенти оператора T є полюсами першого порядку, то*

$$\forall f \in D(T) \quad f = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} ((f|z_{\lambda,1})y_{\lambda,1} + \cdots + (f|z_{\lambda,n_\lambda})y_{\lambda,n_\lambda}), \tag{34}$$

де $\{y_{\lambda,1}, \ldots, y_{\lambda,n_\lambda}\}$ та $\{z_{\lambda,1}, \ldots, z_{\lambda,n_\lambda}\}$ - біортогональні бази просторів $\ker(T - \lambda\mathbf{1})$ та $\ker(T^* - \bar{\lambda}\mathbf{1})$ відповідно, $\sum_{\lambda\in\sigma(T)}$ поширюється на всі власні значення оператора T, які занумеровані так, що власні значення, які містяться в $\Omega_k \setminus \Omega_{k-1}$ передують власним значенням, які містяться в $\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$. Ряд у правій частині рівності (34) збігається не тільки в L_2^m, але й рівномірно на [0,1].

Доведення. З теореми 1, леми 2 та з (33) випливає, що

$$\forall f \in D(T) \quad \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_k} (T - \lambda\mathbf{1}_m)^{-1} Tf d\lambda = 0,$$

як за нормою простору L_2^m, так і в сенсі рівномірної збіжності на [0,1]. Крім того, $\Gamma_k \subset \rho(T)$, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\cup\Omega_k = \mathbb{C}$. Звідси і з рівності

$$\begin{aligned}\forall f \in D(T) \quad f = \sum_{\lambda\in\sigma(T)\cap\Omega_k} &((f|z_{\lambda,1})y_{\lambda,1} + \cdots + (f|z_{\lambda,n_\lambda})y_{\lambda,n_\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{1}{\lambda}(T - \lambda\mathbf{1})^{-1} Tf d\lambda\end{aligned}$$

(див. [5, с. 73-74]) випливає правильність теореми.

---

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.,Кочубей А.Н.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // Укр.мат.журн. – 1989. – Т. 41. – №10. – С.1299-1313.

2. *Лянце В.Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204. – №3. – С.542-545.

3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969.

4. *Сторож О.Г.* Асимптотические формулы для собственных значений оператора, родственного дифференциальному, нечетного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17. – №4. – С.744-746.

5. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. – К., 1983.

6. *Шувар О.Б.* Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі вектор-функцій // Вісник ДУ "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №407. – С.54-57.

ON RESOLVENT AND EIGENFUNCTIONS OF ODD ORDER DIFFERENTIAL-BOUNDARY OPERATORS WITH MATRIX COEFFICIENTS.

O. Storozh, O. Shuvar

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A class of finite-dimensional perturbations of differential operator with integral boundary conditions in the space of vector-functions is considered. The resolvent of perturbated operator is constructed and the asymptotic behaviour of its eigenfunctions is established. The conditions, under wich the system of these functions is total, are found.

Key words: integral boundary conditions, differential-boundary operator, eigenfunctions.

Стаття надійшла до редколегії 29.12.2000
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.26–28

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.26–28

УДК 512.544+519.46

ПРО РАДИКАЛЬНІ КІЛЬЦЯ, ПРИЄДНАНІ ГРУПИ ЯКИХ МАЮТЬ СКІНЧЕННЕ ЧИСЛО КЛАСІВ СПРЯЖЕНОСТІ

Орест АРТЕМОВИЧ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено, що радикальне (в сенсі Джекобсона) кільце R, приєднана група R° якого періодична і складається зі скінченного числа класів спряжених елементів, скінченне, описано деякі властивості простих радикальних областей.

Ключові слова: групи зі скінченним числом класів спряженості, радикальні кільця.

Групу G із скінченним числом класів спряженості називатимемо ν-групою. Добре відомо, що будь-яка лінійна група (над полем) і будь-яка RI-група із скінченним числом класів спряженості є скінченною (див., наприклад, [1, с.129] і [2, с. 369]).

У цій статті ми характеризуємо радикальні кільця R із приєднаною ν-групою R° і описуємо деякі властивості простих радикальних областей.

У праці використано стандартну термінологію, як, наприклад, в [1-3].

Лема 1. *Нехай R – радикальне кільце. Якщо R° – ν-група, то*

(1) *R містить скінченне число двобічних ідеалів;*
(2) *R має простий гомоморфний образ;*
(3) *R° не має власних підгруп скінченного індексу;*
(4) *центр $Z(R)$ скінченний.*

Доведення нескладне і ми його опускаємо.

Задачу дослідження радикальних кілець із приєднаною ν-групою R° сформулював Ф. Сас [3, проблема 88]. У цьому напрямі ми довели таке твердження.

Твердження 2. *Будь-яке радикальне кільце R з періодичною приєднаною ν-групою R° скінченне.*

Доведення. За наслідком 2.3 з [5] R – ніль-кільце. Оскільки R° не містить центральних квазіциклічних підгруп, то вона є прямим добутком скінченного числа примарних компонент (див. [6, §3.2]). Тому з наслідку 1 із [7] випливає, що R° – локально нільпотентна група. За теоремою Чернікова (див. [2, с. 369]) R – скінченне кільце, що і необхідно було довести.

Ф. Сас [8] визначив деякі властивості нескінченних радикальних кілець R, чиї приєднані групи R° мають тільки скінченне число класів спряженості. Якщо $R = R^2$ – радикальне кільце і R° має лише два класи спряженості, тоді R – просте радикальне кільце за твердженням 1 з [8]. З огляду на наслідок 1.1 з [9], ми отримуємо наслідок.

Наслідок 3. *Нехай R – просте радикальне кільце. Якщо R° – ν-група, тоді R – область або R містить ненульовий нільпотентний елемент.*

Твердження 4. *Нехай R – просте радикальне кільце. Якщо R° має два класи спряженості, тоді R – область із простою приєднаною групою R° без скруту.*

Доведення. За наслідком 3 R – область або ніль-кільце. Припустимо, що R – ніль-кільце. Тоді воно задовольняє тотожність

$$x^2 \equiv 0.$$

З леми 2.4 із [10] і твердження 2 випливає, що $char(R) = 0$, і, як наслідок, R – $\mathbb{Q}$-алгебра. За теоремою Нагати-Хігмена (див., наприклад, [11, с. 152]) R – нільпотентна алгебра. Одержали протиріччя. Отже, R – область із простою приєднаною групою R° без скруту. Твердження доведене.

Твердження 5. *Якщо R – проста радикальна область, тоді центр $Z(I)$ будь-якого його правого (лівого) ідеала I нульовий (зокрема, $Z(R) = \{0\}$).*

Доведення. Нехай R – радикальна область з двома операціями "+" і "·", R° – приєднана група кільця R стосовно операції "$\circ$". Припустимо, що $Z(R)$ ненульовий, і позначимо приєднану групу $Z(R)^\circ$ через T. Нехай $H(R,T)$ – множина пар $\{ (x,y) \mid x \in R, y \in T\}$ з алгебраїчною операцією, визначеною за правилом

$$(x,y)(u,v) = (y \cdot u + u + x, y \circ v).$$

Оскільки

$$ann_T(i) = \{ t \in T \mid t \cdot i = 0\}$$

ненульовий і $R = a \cdot R$ для кожного елемента $a \in Z(R)$, то $H(R,T)$ – група Фробеніуса за теоремою 2.3 з [10], що суперечить лемі 2.7 з [10]. Отже, $Z(R) = \{0\}$. За лемою 1.1.5 з [12] $Z(I) = \{0\}$ для кожного правого (лівого) ідеала I із R. Твердження доведене.

Наслідок 6. *Будь-яка радикальна PI-область R непроста.*

Справді, $Z(R)$ ненульовий за теоремою 1.4.2 із [12], а отже, R – непросте кільце внаслідок твердження 5.

---

1. *Robinson D.J.S.* Finiteness conditions and generalised soluble groups. Vol.1. – Berlin e.a., 1972.
2. *Курош А.Г.* Теория групп. – М., 1967.
3. *Джекобсон Н.* Строение колец. – М., 1961.
4. *Szász F.* Radikale der Ringe. – Berlin, 1975.
5. *Артемович О.Д., Іщук Ю.Б.* Про напівдосконалі кільця з заданими приєднаними групами // Математичні Студії. – 1996. – №6. – С.23-32.
6. *Amberg B., Sysak Ya.P.* Radical rings and products of groups // Preprint (Johannes Gutenberg-Universität Mainz), 1998.
7. *Amberg B., Dickenschied O., Sysak Ya.P.* Subgroups of the adjoint group of a radical ring // Canad. J. Math. – 1998. – Vol. 50. – №1. – P.3-15.

8. *Szász F.* On some simple Jacobson radical rings // Math. Japon. – 1973. – Vol. 18. – P.225-228.

9. *Krempa J.* Some examples of reduced rings // Algebra Colloq. – 1996. – Vol. 3. – №4. – P.289-300.

10. *Artemovych O.D.* On Frobenius groups associated with modules // Demonstratio Math. – 1998. – Vol. 38. – №4. – P.875-878.

11. *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца, близкие к ассоциативным. – М., 1978.

12. *Herstein I.* Rings with involutions. – Chicago e.a., 1976.

ON RADICAL RINGS WHOSE ADJOINT GROUPS HAVE FINITELY MANY CONJUGACY CLASSES

O. Artemovych

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

We prove that a (Jacobson) radical ring R with the torsion adjoint group R° which have finitely many conjugacy classes is finite and establish some properties of simple radical domains.

Key words: group with finitely many conjugacy classes, radical ring.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2000
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.29–32 Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.29–32

УДК 512.544

РОЗЩЕПЛЮВАНІСТЬ НЕ РАДИКАЛЬНО-НАПІВПРОСТИХ СКРУТІВ

Омелян ГОРБАЧУК, Мирослава ПАЛАМАРЧУК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто не радикально-півпрості скрути в категорії лівих R-модулів. За певних умов на радикальний фільтр досліджено питання про розщеплюваність скрутів.

Ключові слова: скрути, категорії, розщеплення, кільця, модулі.

У праці розглянуто асоціативні кільця з одиницею за припущення, що всі модулі є правими та унітарними.

Говоритимемо, що в категорії R-модулів задано радикал r, якщо задано класи модулів $\mathcal{T}$ та $\mathcal{F}$ з такими властивостями:

1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0$;

2) $\mathcal{T}$ замкнений стосовно фактор-модулів;

3) для будь-якого модуля M існує точна послідовність $0 \longrightarrow r(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/r(M)$ така, що $r(M) \in \mathcal{T}$ і $M/r(M) \in \mathcal{F}$.

Класи $\mathcal{T}$ і $\mathcal{F}$ називають r-радикальним і r-напівпростим, відповідно. Кожен з цих класів однозначно визначає інший. Наприклад, $T \in \mathcal{T}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{Hom}(T, F) = 0$ для всіх $F \in \mathcal{F}$. Модулі з класу $\mathcal{T}$ називаються r-радикальними, а з класу $\mathcal{F}$ – r-напівпростими. Зрозуміло, що $M \in \mathcal{T}$ тоді і лише тоді, коли $r(M) = M$, а включення $M \in \mathcal{F}$ рівносильне умові $r(M) = 0$. Підмодуль $r(M)$ називається r-радикалом модуля M. Якщо r-радикальний клас замкнений стосовно підмодулів, то r називають скрутом.

Радикальним фільтром кільця R називають систему $\mathcal{E}$ правих ідеалів цього кільця, що має такі властивості.

1. Якщо $I \in \mathcal{E}$ і $I \subseteq J$, де J – правий ідеал кільця R, то $J \in \mathcal{E}$.

2. Якщо $I \in \mathcal{E}$, то для будь-якого $\lambda \in R$ правий ідеал $(I : \lambda)$, де $(I : \lambda) = \{x \mid x \in R,\ \lambda x \in I\}$, також належить до $\mathcal{E}$.

3. Якщо $I \subseteq J$, де I – правий ідеал кільця R, $J \in \mathcal{E}$ та ідеал $(I : j) \in \mathcal{E}$ для довільного $j \in J$, то $I \in \mathcal{E}$.

Зв'язок між скрутом у категорії R-модулів і радикальним фільтром кільця R визначає теорема Габрієля і Маранди, яку подано в [1] (наслідок 6.8, с.39) або [2] (теорема 3.4, с.14).

Скрут називається радикально-напівпростим, якщо його радикальний фільтр містить найменший ідеал або клас радикальних модулів замкнених стосовно прямих добутків. Такі скрути досліджував Джанс у праці [3].

Скрут r називається розщеплюваним, якщо для довільного модуля M підмодуль $r(M)$ виділяється прямим доданком.

Спочатку робили припущення, що не радикально-напівпростий скрут не розщеплюється. (Були праці, в яких давали доведення цього факту, але згодом виявились помилковими).

У праці [4] побудували приклад не радикально-напівпростого скруту, який розщеплюється, а саме розглядали кільце диференціальних операторів $R = K[y, D]$, де K – диференціально замкнуте поле. За теоремою 7.42 праці [5] кільце R є областю головних ідеалів і правим V-кільцем. Виявляється, що періодичні модулі будуть ін'єктивні, коли поле K – диференціально замкнуте, тобто рівняння $p(x, D(x), \dots, D^n(x)) = 0$ при будь-якому n має розв'язок $\alpha \in K$ для всіх $p(x) \in K[x_1, \dots, x_{n+1}] - K$, де $p(x, D(x), \dots, D^n(x))$ – нетривіальний диференціальний многочлен.

Теорема. *Нехай радикальний фільтр $\mathcal{E}_r$ містить двобічні ідеали P_k такі, що $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} P_k = 0$, та існують такі елементи $p_k \in P_k$, що $p_k p_{k-1} \dots p_1 \neq 0$. Тоді з розщеплюваності відповідного скруту r випливає, що скрут r буде радикально-напівпростим.*

Доведення. Можна вважати, що скрут $r(R) = 0$. У протилежному випадку $R = r(R) \oplus R$, (пряма сума) і $r(R)$ буде двобічним ідеалом. Тоді замість кільця R можна взяти кільце R_1 і матимемо $r(R_1) = 0$.

Оскільки $r(R) = 0$ і за умовою існують такі елементи p_k, що $p_k p_{k-1} \dots p_1 \neq 0$, то $p_k p_{k-1} \dots p_1 P_k \neq 0$. Так як $p_k p_{k-1} \dots p_1 P_k \neq 0$, то існує таке n_k, що $p_k p_{k-1} \dots p_1 P_k \not\subset P_{n_k}$. Можемо вважати, що ідеали P_k утворюють ланцюг, тобто $P_{k+1} \subset P_k$. У протилежному випадку, взявши $P'_k = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_k$, які також належать радикальному фільтру, P'_k будуть утворювати ланцюг.

Розглянемо модуль $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} R/P_{n_k}$. $r(M) \neq M$, тому що елемент $(\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}, \dots)$ не анулюється ні одним ідеалом з радикального фільтра і елемент вигляду $(a_1, a_2, \dots, a_m, 0, \dots) \in r(M)$, де $a_i \in R/P_{n_i}$, тому що існує база з двобічних ідеалів.

Покажемо, що підмодуль $r(M)$ не виділяється прямим доданком.

Елемент $x \in M$ є елементом нескінченної висоти, якщо для довільного n існує такий елемент $y^{(n)} \in M$, що $x = y^{(n)} p'_n$, де $p'_n \in P_n$. За аналогією доведення теореми 1 у праці [6] визначимо, що у фактор-модулі $M/r(M)$ є елемент нескінченної висоти, і покажемо, що в M немає ненульових елементів нескінченної висоти.

Отже, нехай $x \in M$ – елемент нескінченної висоти. Це означає, що для всіх n $x = y^{(k_n)} p'_{k_n}$. Нехай $x = (b_1, b_2, \dots, b_m, \dots)$, $y^{(k_n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}, \dots)$ і $b_m \in y_m^{(n)} P_{m_k} \implies b_m = 0$, тобто тільки нульовий елемент має нескінченну висоту в модулі M.

Розглянемо елементи $m = (p_1, \dots, p_k p_{k-1} \dots p_1, \dots)$ і $n_k = (0, 0, \dots, 0, p_k \dots p_1, p_{k+1} p_k \dots p_1, \dots)$ з модуля M. Образи елементів m і m_k у фактор-модулі $M/r(M)$ позначимо відповідно $\bar{m}$ і $\bar{m}_k$. Враховуючи, що P_k двобічні ідеали, отримаємо $\bar{m} = \bar{m}_{m_k}$. Звідси видно, що $\bar{m}$ має нескінченну висоту у фактор-модулі $M/r(M)$.

Для завершення доведення достатньо показати, що $\bar{m} \neq 0$. Доведемо, що m не анулюється жодним з P_k. Припустимо, що m анулюється, тобто існує таке P_k, що $m P_k = 0$. Розглянувши цю рівність покоординатно, одержимо $p_k \dots p_1 P_k = 0$, тобто $p_k \dots p_1 P_k \subset P_{n_k}$, що суперечить умові побудови модуля M, що $p_k \dots p_1 P_k \not\subset P_{n_k}$.

Із умови розщеплюваності скруту r фактор-модуль $M/r(M)$ є ізоморфним деякому підмодулю модуля M.

З іншого боку, ми отримуємо, що в модулі M є елемент нескінченної висоти, що суперечить попереднім дослідженням, тобто скрут r – радикально-напівпростий.

Означення. Нехай задана послідовність правих ідеалів P_i. Цю послідовність назвемо T-нільпотентною зліва, коли для довільної послідовності елементів $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots p_i \in P_i$ існує таке натуральне число m, що $p_m \ldots p_1 = 0$.

Зауваження. Здебільшого послідовність правих ідеалів буде спадною, тобто $P_k \supseteq P_{k+1}$.

Наше означення T-нільпотентності зліва, коли P_i однакові, збігається з означенням T-нільпотентності зліва для правого ідеала P.

Наслідок 1. Нехай скрут r розщеплюється і його радикальний фільтр має зліченну базу з двобічних ідеалів, яка не є T-нільпотентною зліва. Тоді r – радикально-напівпростий скрут.

Доведення випливає безпосередньо з теореми, де умова, що база не є T-нільпотентною зліва дає нам умову, що існують такі p_i, що $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \neq 0$.

Зауваження. Умову двобічності ідеалів просто зняти не можна, бо існує приклад у праці [4] розщеплюваного нерадикально-напівпростого скруту, радикальний фільтр якого складається з правих ідеалів некомутативного кільця без дільників нуля, яке не містить нетривіальних двобічних ідеалів.

Наслідок 2. Нехай r – розщеплюваний скрут з умовою, що існує така послідовність двобічних ідеалів $P_k \in \mathcal{E}_r$, що $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \notin \mathcal{E}_r$ і існує така послідовність елементів $p_m \in P_m$, що для довільного k $p_k p_{k-1} \ldots p_1 \notin B$. Тоді скрут r – радикально-напівпростий.

Доведення випливає з теореми, переходячи від кільця R до фактор-кільця R/B, образи ідеалів P_n у фактор-кільці позначимо через P'_n. Відповідний скрут у фактор-кільці R/B, радикальний фільтр якого задається образами правих ідеалів з радикального фільтра $\mathcal{E}_r$. Скрут r' розщеплюється (див. [7], наслідок 2, с.55) і елементи $p'_k \ldots p'_1 \neq 0$. Отже, до скруту r' можна застосувати теорему, яка визначає, що r' – радикально-напівпростий. А звідси випливатиме, що r – радикально-напівпростий.

1. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. - Кишинев, 1983.
2. *Stenström, B.* Rings and Modules of Quotients. – Berlin, 1971.
3. *Janç, J.* Some aspects of torsion // Pacif. J. Math. – 1965. – Vol. 15. – P.1249-1259.
4. *Cozzens J.H.* Homological properties of the ring of differential polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1970, – Vol. 76. – №1. – C.75-79.
5. *Фейс К.* Алгебра: кольца и категории. Т.1. - М., 1977.

6. *Горбачук О.Л.* Про кручення в модулях // Український матем. журн. – 1973. – Т. 25. – №4. – С.517-523.

7. *Горбачук Е.Л.* Радикалы в модулях над разными кольцами // Матем. исследования. – 1972. – №1. – С.49-59.

SPLITTING RADICAL-SEMISIMPLE TORSIONS

O. Gorbachuk, M. Palamarchuk

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A hereditary non-jans torsion in the category R-Mod is considered. Some properties of the splitting hereditary torsions are proved.

Key words: torsion, splitting, hereditary, category, perfect ring.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.33–40 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.33–40*

УДК 513.6

КРУЧЕННЯ І ГРУПИ БРАУЕРА ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОЛОКАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

Людмила СТАХІВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай A – еліптична крива, визначена над повним дискретно нормованим полем з псевдоскінченним полем класів лишків, $(A(K))_n$ і $(BrA)_n$ – підгрупи групи K – раціональних точок кривої A і групи Брауера кривої A, яка складається з елементів, порядок яких ділить n. Показано, що $|(BrA)_n| \leqslant n|(A(K))_n|$. Використовуючи цю нерівність і метод В.І. Янчевського, Г.Л. Марголіна, описана група $(BrA)_n$.

Ключові слова: алгебраїчні многовиди, еліптичні криві, групи Брауера, псевдоскінченні поля.

Нехай K – псевдолокальне поле, тобто повне стосовно дискретного нормування v поле з псевдоскінченним за Аксом [1] полем класів лишків k, π – простий елемент поля K. O_K, P_K, U_K відповідно кільце цілих, ідеал нормування та група одиниць поля K. α – одиниця поля K, яка не є квадратом. K_s і k_s – сепарабельні замикання полів K і k , $G = Gal(K_s/K)$ – група Галуа поля K.

Нехай A – еліптична крива над полем K, $K(A)$ – поле функцій на кривій A, $A(K)$ – група K – раціональних точок кривої A, $A_0(K)$ – підгрупа точок групи $A(K)$, що редукуються в неособливі, $A_0(k)$ – образ групи $A_0(K)$ при відображенні редукції, $A_1(K)$ – ядро редукції. $BrK(A)$ – група Брауера поля $K(A)$, BrA – група Брауера кривої A [2]. Відомо, що група BrA є підгрупою групи $BrK(A)$ і вивчення групи $BrK(A)$ зводиться до вивчення групи BrA, бо факторгрупа $BrK(A)/BrA$ є відомою згідно з результатами [3], (див. також [4]). $BrK(A)$ є періодичною абельовою групою, тому вивчення групи BrA зводиться до вивчення підгруп $(BrA)_n$, що складаються з елементів, порядок яких є дільником n. Надалі вважаємо, що $(n, chark) = 1$. μ_n – група коренів n - го степеня з 1, що містяться в полі k_s. Для розширення Галуа L/K з групою Галуа G через $H^i(L/K, M)$ або $H^i(G, M)(i \in \mathbb{Z})$ позначаємо когомології Галуа G – модуля M, $H^i(K, M) =^{df} H^i(Gal(K_s/K), M)$.

В.І. Янчевський і Г.Л. Марголін [4] дослідили групу Брауера еліптичних і гіпереліптичних кривих над локальним полем і описали підгрупу $(BrA)_2$ цієї групи.

Мета цієї праці – показати, що аналогічні результати правильні і для еліптичних кривих, визначених над псевдолокальним полем. Зауважимо, що у зв'язку з тим, що немає інформації про невиродженість добутку Тейта - Шафаревича в абельових многовидах розмірності більшої ніж одиниця, визначених над псевдолокальним полем, ми не можемо поки що одержати аналоги згаданих результатів В.І. Янчевського і Г.Л. Марголіна для гіпереліптичних кривих.

Ми позначимо символом $|G|$ порядок скінченної групи G. Сформулюємо спочатку теорему, яка дає, зокрема, оцінку зверху для порядку групи $(BrA)_n$. Зазначимо, що перші два твердження цієї теореми правильні для відповідних алгебраїчних многовидів, визначених над загальними локальними полями [8], і клас загальних локальних полів містить класичні локальні та псевдолокальні поля.

Теорема 1.

1. Нехай A – абельовий многовид, визначений над загальним локальним полем K; n - натуральне число, взаємно просте з характеристикою поля лишків k поля K. Тоді група $A(K)/nA(K)$ скінченна.

2. Нехай A – повна, неособлива, абсолютно незвідна алгебраїчна крива, визначена над загальним локальним полем K. Тоді група $(BrA)_n$ скінченна.

3. Нехай A – еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K. Тоді група $(BrA)_n$ скінченна і правильна нерівність: $|(BrA)_n| \leqslant n|(A(K))_n|$.

Для доведення цієї теореми нам буде потрібно декілька лем.

Лема 1. *Нехай M – скінченний G-модуль над загальним локальним полем K. Тоді $H^1(K, M)$ – скінченна група.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $\mu_n \subset K$. Розглянемо точну послідовність G-модулів $1 \to \mu_n \to K_s^* \to K_s^* \to 1$, з якої одержуємо точну послідовність когомологій Галуа

$$1 \to \mu_n \to K^* \to K^* \to H^1(K, \mu_n) \to H^1(K, K_s^*).$$

$H^1(K, K_s^*) = 0$ за теоремою Гільберта - 90. А тому $H(K, \mu_n) \cong K^*/K^{*n}$.

Покажемо, що група K^*/K^{*n} скінченна. Оскільки K – повне стосовно дискретного нормування поля, то $K^* = \mathbb{Z} \oplus U$, де U – група одиниць поля K. Звідси легко одержати, що послідовність груп $1 \to U/U^n \to K^*/K^{*n} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$ точна. Тому група K^*/K^{*n} скінченна, якщо група U/U^n скінченна. Перевіримо, що група U/U^n скінченна. Розглянемо підгрупу $U_1 = 1 + \pi O_K$. Відомо, що $U/U_1 \cong k^*$. Тому можна розглянути таку комутативну діаграму з точними рядками, в якій вертикальні стрілки є гомоморфізмами множення на n:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & U_1 \arrow[r] \arrow[d, "n"] & U \arrow[r] \arrow[d, "n"] & k^* \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 1 \\
1 \arrow[r] & U_1 \arrow[r] & U \arrow[r] & k^* \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}.$$

З цієї діаграми та з подільності елементів групи U_1 на n випливає, що $U/U^n \cong k^*/k^{*n}$. Покажемо, що k^*/k^{*n} скінченна група. Для цього розглянемо точну когомологічну послідовність $1 \to \mu_n \to k^* \to k^* \to H^1(k, \mu_n) \to 0$, яка відповідає точній послідовності $1 \to \mu_n \to k_s^* \to k_s^* \to 1$. Тут $H^1(k, \mu_n) \cong \mu_n$, бо $\mu_n \subset K$. Звідси $k^*/k^{*n} \cong \mu_n$ і остаточно отримуємо, що $|K^*/K^{*n}| = n^2$ і група $H^1(K, \mu_n)$ – скінченна.

Припустимо, що $\mu_n \not\subset K$. Розглянемо скінченне розширення Галуа L/K таке, що $\mu_n \subset L$. Скористаємось відрізком спектральної послідовності Хохшільда-Серра [5, с.21]

$$1 \to H^1(L/K, \mu_n) \to H^1(K, \mu_n) \to H^1(L, \mu_n)^{Gal(L/K)}.$$

Оскільки групи $H^1(L/K, \mu_n)$ і $H^1(L, \mu_n)^{Gal(L/K)}$ скінченні, то і група $H^1(K, \mu_n)$ скінченна.

Нехай L/K – скінченне розширення Галуа, над яким модуль M стає тривіальним. Можна вважати, що $M = \oplus\mu_{n_i}$, причому $\mu_{n_i} \subset L$. Оскільки когомології комутують з прямими сумами, то $H^1(L, M) \cong \oplus H^1(L, \mu_{n_i})$. Це означає, що група $H^1(L, M)$ скінченна. Тому, знову застосувавши спектральну послідовність Хохшільда-Серра

$$1 \longrightarrow H^1(L/K, M) \longrightarrow H^1(K, M) \longrightarrow H^1(L, M)^{Gal(L/K)}$$

і використовуючи скінченність груп $H^1(L, M)$ та $H^1(L/K, M)$, одержуємо скінченність групи $H^1(K, M)$. □

Лема 2. *Група $A_1(K)$ однозначно подільна на всі натуральні числа, що взаємно прості з характеристикою поля лишків поля K.*

Доведення. Доведення цієї леми можна знайти, наприклад, у [6].

Лема 3. *Нехай A – довільна еліптична крива, визначена над псевдолокальним полем K або крива з виродженою редукцією, визначена над загальним локальним полем K. Тоді*

$$|A(K)/nA(K)| = |(A(K))_n|. \tag{1}$$

Доведення. Якщо редукція кривої невироджена, то рівність $|A(K)/nA(K)| = |(A(K))_n|$ доведена у [7] і в [14]. У випадку виродженої редукції треба розглянути окремо випадки кривих з мультиплікативною та адитивною редукціями.

Якщо A – крива з мультиплікативною редукцією, то рівність (1) доведена у [15]. Нехай A – крива з адитивною редукцією. Множення на n в точній послідовності редукції визначає таку діаграму:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1(K) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & A_0(K) \arrow[r] \arrow[d, "n"] & k^+ \arrow[r] \arrow[d, "n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1(K) \arrow[r] & A_0(K) \arrow[r] & k^+ \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

в якій лівий крайній вертикальний гомоморфізм є ізоморфізмом на підставі леми 2, а правий крайній вертикальний гомоморфізм є ізоморфізмом тому, що $(n, char k) = 1$. Отже, середній гомоморфізм також є ізоморфізмом і ми отримуємо, що

$$|A_0(K)/nA_0(K)| = |(A_0(K))_n| = 0.$$

Відомо [9], що група $A_0(K)$ вкладається в точну послідовність

$$0 \longrightarrow A_0(K) \longrightarrow A(K) \longrightarrow H \longrightarrow 0, \tag{2}$$

де група H може мати порядок 1, 2, 3 або 4 [9], група порядку 4 може бути як циклічною, так і нециклічною.

Нехай 2 ділить n і $|H| = 2$, що відповідає типам (c2) і (c7) за Нероном [9]. У цьому випадку, застосувавши лему про змію до діаграми, що одержується з точної послідовності (2) за допомогою множення на 2, одержуємо, що

$$|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = |(A(K))_2| = |A(K)/2A(K)| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2.$$

Нехай 2 ділить n і H- циклічна група четвертого порядку, що відповідає типам (c4) і$(c5_{2k})$ за Нероном. Тоді аналогічно одержуємо, що

$$|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = |(A(K))_2| = |A(K)/2A(K)| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 4.$$

Якщо 2 ділить n і H – циклічна група четвертого порядку, що відповідає типу $(c5_{2k+1})$ за Нероном, то одержимо, що $|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = 2$.

Нарешті, якщо 2 ділить n і A – крива типу (c3) або (c6)(тобто H – група третього порядку), то $|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = 0$.

Якщо 3 ділить n, а крива A має тип (c1), (c2), (c4), (c5), (c7) або (c8) за Нероном, то $|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = 0$.

Залишився випадок, коли 3 ділить n, а крива A має тип (c3) або (c6) за Нероном. Тоді, застосовуючи гомоморфізм множення на n до точної послідовності (2), одержуємо $|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = |(A(K))_n| = 3$.

Нехай 2 не ділить n і 3 не ділить n, тоді $(n, |H|) = 1$, тому множення на n є ізоморфізмом групи H. Розглянемо таку діаграму гомоморфізму множення на n:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_0(K) & \longrightarrow & A(K) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \downarrow{\scriptstyle n} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_0(K) & \longrightarrow & A(K) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad . \tag{3}$$

Як зазначено вище, множення на n в групі $A_0(K)$ є ізоморфізмом. Тому середній вертикальний гомоморфізм в (3) є ізоморфізмом групи $A(K)$. Отже,

$$|(A(K))_n| = |A(K)/nA(K)| = 0,$$

і це завершує доведення леми у випадку адитивної редукції.

Доведення теореми 1. 1. Відомо [11], що $(A(K_s))_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ і, отже, за лемою 1 група $H^1(K, (A(K_s))_n)$ скінченна. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to (A(K))_n \to A(K_s) \to A(K_s) \to 0$$

множення на n в $A(K_s)$ і відповідну їй точну когомологічну послідовність

$$\begin{array}{ccccc} A(K) & \xrightarrow{n} & A(K_s) & \longrightarrow & H^1(K, (A(K_s))_n) \longrightarrow \\ H^1(K, A(K_s)) & \xrightarrow{n} & H^1(K, A(K_s)) & \longrightarrow & \cdots \end{array} \tag{4}$$

З останньої послідовності випливає, що група $A(K)/nA(K)$ ізоморфна підгрупі групи $H^1(K, (A(K_s))_n)$, і отже, є скінченною групою.

2. Нехай A – довільна повна абсолютно незвідна алгебраїчна крива, визначена над загальним локальним полем K, $\bar{A}$ – крива A, розглянута над полем K_s. Відомо [12], що G-модуль $Pic^0\bar{A}$ ізоморфний якобіану кривої $\bar{A}$. Аналогічно тому, як ми одержали послідовність (4), маємо точну послідовність

$$H^1(K, (Pic^0\bar{A})_n) \longrightarrow H^1(K, Pic^0\bar{A}) \xrightarrow{n} H^1(K, Pic^0\bar{A}),$$

яка показує, що група $H^1(G, Pic^0\bar{A})_n$ є гомоморфним образом скінченної (згідно з лемою 1) групи $H^1(K, (Pic^0\bar{A})_n)$, отже, є скінченною групою. Розглянемо ще точну послідовність G-модулів $0 \to Pic^0\bar{A} \to Pic\bar{A} \to \mathbb{Z} \to 0$. У відповідній послідовності когомологій Галуа $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$. Тому група $H^1(G, Pic^0\bar{A})$ вкладається в точну послідовність

$$\mathbb{Z} \longrightarrow H^1(G, Pic^0\bar{A}) \longrightarrow H^1(G, Pic\bar{A}) \longrightarrow 0,$$

з якої одержуємо, що $H^1(G, Pic\bar{A})_n$ скінченна група. З точної послідовності

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Pic\bar{A} & \longrightarrow & H^0(K, Pic\bar{A}(K_s)) & \longrightarrow & BrK & \longrightarrow \\ \longrightarrow & BrA & \longrightarrow & H^1(K, Pic\bar{A}(K)) & \longrightarrow & H^3(K, K_s^*) & \end{array} \tag{5}$$

[12] отримуємо з урахуванням того, що $H^3(K, K_s^*) = 0$ (когомологічна розмірність поля K дорівнює 2) [5], таку точну послідовність

$$0 \longrightarrow \hat{BrK} \longrightarrow BrA \longrightarrow H^1(G, Pic\bar{A}),$$

де $\hat{BrA}$ – деяка факторгрупа групи BrK. Для загального локального поля K група $BrK \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [8] є повною, тому кожна її факторгрупа є теж повною. Звідси випливає, що $(\hat{BrA})_n$ скінченна. З точної послідовності

$$0 \longrightarrow (\hat{BrK})_n \longrightarrow (BrA)_n \longrightarrow (H^1(G, Pic\bar{A}))_n$$

одержуємо, що група $(BrA)_n$ скінченна.

3. Нерівність $|(BrA)_n| \leqslant n\ |A(K)/nA(K)|$ доведено в праці [14].

Незважаючи на те, що доведена теорема дає лише оцінку зверху для порядку групи n-кручення групи Брауера кривої A, вона, як і у випадку еліптичних кривих над локальними полями, може бути використана для повного описання групи $(BrA)_2$ за допомогою кватерніонних алгебр.

Вважаємо, що характеристика поля K відмінна від 2. Тоді Вейєрштрассове рівняння кривої A має вигляд

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c. \tag{6}$$

де $a, b, c \in O_K$. Многочлен $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ може мати три, один або не мати жодного кореня. Залежно від того, скільки коренів має многочлен $g(x)$ говорять, відповідно, про розкладний, напіврозкладний і нерозкладний випадки. Вважаємо, що рівняння (6) є мінімальним, тобто $v(\Delta)$, де Δ – дискримінант многочлена $g(x)$ приймає найменше можливе значення. У розкладному випадку мінімальне рівняння Вейєрштрасса кривої A можна звести до вигляду $y^2 = x(x-e_1)(x-e_2), e_1, e_2 \in O_K$. У напіврозкладному випадку це рівняння зводиться до вигляду $y^2 = x(x^2 + ax + b)$, $a, b \in O_K$ і многочлен $x^2 + ax + b$ незвідний над K. У нерозкладному випадку маємо рівняння $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, де $a, b, c \in O_K$ і многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ незвідний над K.

Нагадаємо, що алгеброю $(\frac{a,b}{K})$ узагальнених кватерніонів називають алгебру, породжену елементами 1, x, y, z, де $x^2 = a$, $y^2 = b$, $z^2 = -ab$, 1 - одиничний елемент, і елементи x, y, z попарно антикомутують, $[\frac{a,b}{K}]$ – елемент групи BrK з представником $(\frac{a,b}{K})$.

Теорема 2. *Нехай A – еліптична крива з невиродженою редукцією над повним стосовно дискретного нормування полем K з псевдоскінченним полем лишків k. Тоді група $(BrA)_2$ складається з елементів*

$$\left[\frac{\pi,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha}{K(A)}\right], \left\{\left[\frac{\pi, x-e_i}{K(A)}\right]\right\}_{i=1,2,3}, \left\{\left[\frac{\pi, \alpha(x-e_i)}{K(A)}\right]\right\}_{i=1,2,3},$$

у розкладному випадку. У напіврозкладному випадку група $(BrA)_2$ складається з елементів

$$\left[\frac{\pi,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha x}{K(A)}\right].$$

У нерозкладному випадку група $(BrA)_2$ складається з елементів

$$\left[\frac{\alpha,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,\pi}{K(A)}\right].$$

Теорема 2, в більш послабленому формулюванні, та начерк її доведення вже були опубліковані в [14], але вимога обмеження обсягу праці [14] не дала змоги навести там в явному вигляді зображення елементів групи $(BrA)_2$ кватерніонними алгебрами. Для доведення цієї теореми потрібна така лема.

Лема 5. *([4]) Нехай* $\left[\frac{f,g}{K(A)}\right]$ *і крива A визначена рівнянням* $y^2 = x(x^2 + ax + b)$. *Тоді, якщо f – унітарний многочлен з $K[x]$, то* $\left[\frac{f,g}{K(A)}\right]_\infty$ *тривіальна алгебра над* $K(A)_\infty$.

Доведення. Доведення цієї леми, наведене в праці [4] для локальних полів, дослівно переноситься на випадок псевдолокальних полів.

Доведення теореми 2. Враховуючи лему 5 і дослівно повторюючи міркування В.І. Янчевського і Г.Л. Марголіна [4, теорема 8], одержуємо нерозгалуженість, нетривіальність і попарну неізоморфність алгебр зі списків з формулювання теореми 2. Тепер з теореми 1 випливає, що група $(BrA)_2$ має не більше ніж 8 елементів у розкладному випадку, має не більше ніж 4 елементи у напіврозкладному випадку і має не більше ніж 2 елементи у нерозкладному випадку. Тому наведені в формулюванні теореми списки є повними.

Розглянемо розкладний випадок кривої A з виродженою редукцією. У цьому випадку відомо [4], що мінімальне рівняння Вейєрштрасса кривої A має один з таких виглядів:

1) $y^2 = x(x+\alpha)(x-\pi^m a), m > 0$, якщо редукція мультиплікативна, але дотичні в особливій точці редукції невизначені над полем k;

2) $y^2 = x(x+1)(x-\pi^m a), m > 0$, якщо редукція мультиплікативна й обидві дотичні в особливій точці редукції визначені над полем k;

3) $y^2 = x(x-\pi a)(x-\pi b), a \neq b$, якщо редукція адитивна;

4) $y^2 = x(x-\pi a)(x-\pi^m b), m > 1$, якщо редукція адитивна.

Тут a і $b \in U_K$, а α – одиниця поля K, яка не є квадратом.

Теорема 3. *Нехай A – еліптична крива, задана над K одним з попередніх рівнянь. Тоді у випадку 1 група $(BrA)_2$ складається з елементів*

$$\left[\frac{\pi,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha x}{K(A)}\right],$$

$$\left[\frac{\alpha,x+\alpha}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,\alpha(x+\alpha)}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,x-\pi^m\alpha}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha(x-\pi^m\alpha)}{K(A)}\right].$$

У випадку 2 група $(BrA)_2$ складається з елементів

$$\left[\frac{\pi,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi,\alpha x}{K(A)}\right],$$

$$\left[\frac{\alpha,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,\pi x}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi\alpha,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\pi\alpha,\alpha x}{K(A)}\right].$$

У випадках 3 і 4 група $(BrA)_2$ складається з елементів

$$\left[\frac{\alpha,1}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,\pi}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,x}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha,x-\pi\alpha}{K(A)}\right],$$

$$\left[\frac{\alpha, \pi(x-\pi\alpha)}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha, \pi x}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha, x-\pi^m b}{K(A)}\right], \left[\frac{\alpha, \pi(x-\pi^m b)}{K(A)}\right],$$

де $m = 1$ *у випадку 3 і* $m > 1$ *у випадку 4.*

Для доведення цієї теореми використовуємо метод В.І. Янчевського і Г.Л. Марголіна, застосований ними для еліптичних кривих над локальними полями. Для цього нам треба мати аналог леми 1 з [4]. Сформулюємо його у вигляді леми.

Лема 6. *Нехай* k *– псевдоскінченне поле характеристики відмінної від 2. Тоді в групі* k^* *виконується кожне з таких тверджень:*

1) існує $u \neq 0$ *таке, що* $u \in (k^*)^2$ *і* $(u+1) \in (k^*)^2$;

2) існує $u \neq 0$ *таке, що* $u \in (k^*)^2$ *і* $(u+1) \notin (k^*)^2$;

3) існує $u \neq 0$ *таке, що* $u \notin (k^*)^2$ *і* $(u+1) \in (k^*)^2$;

4) існує $u \neq 0$ *таке, що* $u \notin (k^*)^2$ *і* $(u+1) \notin (k^*)^2$.

Доведення. Якби k було скінченним полем, то формулювання цієї леми цілком збігалося б з формулюванням вищезгаданої леми 1 праці [4]. Доведення цього результату у [4] суттєво використовує скінченність поля. Якщо цей результат вже доведений для скінченних полів, то для того щоб переконатися у його правильності і для псевдоскінченних полів, достатньо сформулювати його мовою логіки першого порядку [1]. Це легко зробити. Потрібне формулювання має такий вигляд:

$$\exists u(\neg u = 0 \wedge \exists x \exists y(u = x^2 \wedge u + 1 = y^2))\wedge$$

$$\exists u(\neg u = 0 \wedge \exists x \forall y(u = x^2 \wedge \neg u + 1 = y^2))\wedge$$

$$\exists u(\neg u = 0 \wedge \forall x \exists y(\neg u = x^2 \wedge u + 1 = y^2))\wedge$$

$$\exists u(\neg u = 0 \wedge \forall x \forall y \neg(u = x^2 \vee u + 1 = y^2)).$$

Доведення теореми 3. Доведення ґрунтується на модифікації доведення аналогічного результату В.І. Янчевського і Г.Л. Марголіна [4]. Доведення нерозгалуженості, нетривіальності і попарної неізоморфності алгебр зі списків доводиться тими самими методами, що і в [4], враховуючи леми 5 та 6, і той факт, що кожна абсолютно незвідна, неособлива крива, визначена над K, має K-раціональну точку. Ці алгебри є повною системою представників групи $(BrA)_2$, оскільки за теоремою 1 група $(BrA)_2$ має не більше ніж 8 елементів.

Автор висловлює щиру вдячність В.І. Андрійчуку за формулювання задачі, постійну увагу до праці, поради й обговорення.

---

1. *Ax J.* The elementary theory of finite field // Ann. Math. – 1968. – Vol 88. – №2. – P.239-271.
2. *Милн Дж.* Абелевы многообразия. – М., 1983.
3. *Scharlau W.* Uber die Brauer-Gruppe eines algebraischen Funktionen korpers in einer Voriablen// J. fur die reine und angew. Math. – 1969. – Bd. 239-240. – P.1-6.

4. *Янчевский В.И., Марголин Г.Л.* Кручение и группы Брауэра локальных эллиптических и гиперэллиптических кривых// Ч.1, Ч.2, препринты 6(509),7(510), Инст. Матем. АН Беларуси. – Минск, 1994.
5. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. – М., 1968.
6. *Tate J.* The arithmetic of elliptic curves// Invent. Math. – 1974. – Vol. 23. – P.179-206.
7. *Платонов В.И., Рапинчук А.С.* Алгебраические группы и теория чисел. – М., 1991.
8. *Serre J.P.* Corps locaux. – Paris; Hermann, 1962.
9. *Neron A.* Modeles Minimaux Des Varietes Abeliennes sur Les Corps Locaux et Globaux// IHES. – 1964. – №21.
10. *Fried M., Jarden M.* Field arithmetic. – Springer, 1986.
11. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. – М., 1971.
12. *Lichtenbaum S.* Duality Theorems for Curves over P-adic Fields // Invent. Math. – 1969. – Vol. 7. – P.120-136.
13. *Андрийчук В.И.* Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями // Мат. сб. – 1979. – Т. 110. – №9. – С.88-101.
14. *Стахів Л.Л.* Кручення і групи Брауера еліптичних кривих з невиродженою редукцією над псевдолокальним полем // Вісник державного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – №337. – С.59-62.
15. *Андрійчук В.И., Стахів Л.Л.* Про групу Брауера еліптичних кривих // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. наук. – 1999. – Вип. 2. – С.10-13.

TORSION OF THE BRAUER GROUP OF AN ELLIPTIC CURVE OVER PSEUDOLOCAL FIELD

L. Stakhiv

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let A be elliptic curve defined over a complete with respect to discrete valuation field K with a psevdofihite residue field, $(A(K))_n$ and $(BrA)_n$ are the subgroups of the group of K-rational points and of the Brauer group of A, consisting of elements of exponent dividing n. It is shown that $|(BrA)_n| \leqslant n|(A(K))_n|$. Using this inequality and following V.Yanchevskii and G.Margolin we describe $(BrA)_2$.

Key words: Brauer groups, elliptic curves, pseudolocal fields.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.41–44

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.41–44

УДК 517.53

ПРО КОМПАКНІСТЬ СІМ'Ї АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО l-ІНДЕКСУ

Марта БОРДУЛЯК, Володимир КУШНІР
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай G – довільна область комплексної площини, а l така додатна неперервна функція в G, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\mathrm{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G,$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число.

Одержано умови компактності сім'ї аналітичних в області G функцій обмеженого l-індексу.

Ключові слова: аналітичні функції обмеженого l-індексу.

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\mathrm{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f [1] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(z)} \leqslant c_f(z), \tag{2}$$

де $c_f(z) = \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}$.

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f;l)$, а клас аналітичних в G функцій обмеженого l-індексу з індексом, що не перевищує N, позначатимемо через $\Omega_N(G,l)$.

Зауважимо, що при $G = \mathbb{C}$ і $l(x) \equiv 1$ з цього означення випливає класичне означення цілої функції обмеженого індексу.

А.К.Бозе [2], вивчаючи властивості сім'ї Ω_N цілих функцій, індекс яких не перевищує N, визначив умови, за яких така сім'я є компактною. У цій праці результати Бозе ми узагальнимо на клас аналітичних в області функцій обмеженого l-індексу.

Для $r \in [0, \beta]$ приймемо, що

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\},$$
$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

Клас додатних неперервних в G функцій l, які, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через $Q_\beta(G)$.

Лема 1. *Якщо $l \in Q_\beta(G)$ і $f \in \Omega_N(G, l)$, то для будь-яких точок z і z_0 з G таких, що $|z - z_0| \leqslant \dfrac{1}{2l(z_0)}$*

$$c_f(z) \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_0). \tag{3}$$

Доведення. Нехай $f \in \Omega_N(G, l)$, а $z_0 \in G$. Тоді для всіх $z \in G$ таких, що $|z - z_0| \leqslant \dfrac{1}{2l(z_0)}$, з огляду на (1), маємо степеневе розвинення

$$f^{(j)}(z) = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-j)!}(z - z_0)^{n-j} =$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!l^{n-j}(z_0)}(n-j+1)(n-j+2)...n(z-z_0)^{n-j}l^{n-j}(z_0),\ j = 0, 1, ... \tag{4}$$

Оскільки ряд $\sum_{n=j}^{\infty}(n-j+1)(n-j+2)...nr^{n-j}$, отриманий почленним диференціюванням геометричної прогресії $\sum_{n=j}^{\infty} r^n$ збігається до $\dfrac{j!}{(1-r)^{j+1}}$ при $|r| < 1$, з (4) одержуємо

$$|f^{(j)}(z)| \leqslant c_f(z_0)\frac{j!l^j(z_0)}{(1 - |z - z_0|l(z_0))^{j+1}},$$

звідки для $j = 0, 1, ..., N$

$$\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} \leqslant \left(\frac{l(z_0)}{l(z)}\right)^j c_f(z_0)2^{j+1} \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_0).$$

Теорема 1. *Нехай $l \in Q_\beta(G)$ і $D \subset G$ – деякий компакт. Тоді існує $P = P(D, N, l) > 0$ таке, що для будь-яких $z, w \in D$ і для будь-якої функції $f \in \Omega_N(G, l)$*

$$c_f(z) \leqslant Pc_f(w). \tag{5}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що D – замкнений круг діаметра d (довільний компакт покриємо скінченним числом замкнених кругів). Виберемо $m \in \mathbb{Z}_+$ так, щоб $m > 2dl_*$, де $l_* = \sup\{l(z) : z \in D\}$. Нехай $z, w \in D$. Тоді $|z - w| \leqslant d$ й існує скінченна послідовність точок $\{z_p\}_{p=0}^{k}$ така, що $z_0 = z, z_k = w, k \leqslant m$, кожна z_p належить відрізку, який з'єднує z і w і лежить в D і $|z_p - z_{p-1}| = \dfrac{1}{2l(z_{p-1})}$. Таку послідовність завжди можна вибрати, оскільки $\sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{2l(z_p)} \geqslant \frac{m}{2l_*} > d \geqslant |z - w|$. Тоді за лемою маємо

$$c_f(z) = c_f(z_0) \leqslant 2^{N+1}\lambda_1^{-N}(1/2)c_f(z_1) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2N+2}\lambda_1^{-2N}(1/2)c_f(z_2) \leqslant ... \leqslant 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)c_f(z_k) = 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)c_f(w).$$

Для завершення доведення досить вибрати $p = 2^{kN+k}\lambda_1^{-kN}(1/2)$.

Будемо говорити, що послідовність f_n аналітичних в G функцій рівномірно збіжна всередині G, якщо вона рівномірно збіжна на кожному компакті з G.

Теорема 2. *Нехай $l \in Q_\beta(G)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність функцій з $\Omega_N(G,l)$.*

(i) Для того щоб $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ була компактною, тобто щоб існувала підпослідовність $\{f_k^*\}_{k=1}^\infty$, рівномірно збіжна всередині G до деякої аналітичної функції f, необхідно і достатньо, щоб існувала підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{c_{f_n}\}_{n=1}^\infty$, обмежена принаймні в одній точці з G.

(ii) Якщо $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ рівномірно збіжна всередині G до функції f, то $f \in \Omega_N(G,l)$.

Доведення. Нехай $\{f_k^*\}_{k=1}^\infty$ – підпослідовність послідовності $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ рівномірно збіжна всередині G до функції f, $z \in G$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{f_k^{*(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right\}_{k=1}^\infty$ збігається до $\dfrac{f^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}$ для всіх $j = 0,1,2,\ldots$, то існує $k_j \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\left|\frac{f_k^{*(j)}(z)}{j!l^j(z)} - \frac{f_k^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right| < \varepsilon$$

або

$$\frac{|f_k^{*(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f_k^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon$$

для всіх $k > k_j$, $j = 0,1,2,\ldots$ Нехай $m = \max\{k_0, k_1, \ldots k_N\}$. Тоді

$$\frac{|f_{m+n}^{*(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f_k^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon \tag{6}$$

для всіх n і $j = 0,1,\ldots,N$. Оскільки кожна $f_{m+n}^* \in \Omega_N(G,l)$, то з (6) отримуємо

$$c_{f_{m+n}^*}(z) < c_f(z) + \varepsilon$$

для всіх n. А це означає, що підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{c_{f_n}\}_{n=1}^\infty$, обмежена в точці z. (Насправді ми довели, що підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^\infty$ обмежена в кожній точці області G).

Навпаки, нехай $z_0 \in G$ – деяка точка, а підпослідовність $\{c_{f_k^*}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{c_{f_n}\}_{n=1}^\infty$ обмежена в точці z. Покажемо, що існує підпослідовність $\{f_p^{**}\}_{p=1}^\infty$ послідовності $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, рівномірно збіжна на кожному компакті з G. Нехай $S \subset G$ – компакт. Існують обмежена множина $\tilde{S} \subset G$ така, що $z \in \tilde{S}$ і $S \subseteq \tilde{S}$, і число $M > 0$ таке, що $c_{f_k^*}(z_0) \leqslant M$ для всіх k. За теоремою 1 існує додатне число $P = P(\tilde{S}, N, l)$ таке, що

$$c_{f_k^*}(z) \leqslant P c_{f_k^*}(z_0) \leqslant PM$$

для всіх k і $z \in S$. Оскільки $|f_k^*(z)| \leqslant c_{f_k^*}(z)$ для всіх z, маємо

$$|f_k^*(z)| \leqslant PM$$

для всіх $z \in S$ і $k = 1,2,\ldots$ Тоді за теоремою Монтеля існує підпослідовність $\{f_p^{**}\}_{p=1}^\infty$ послідовності $\{f_k^*\}_{k=1}^\infty$, що рівномірно збігається всередині G до деякої аналітичної функції f. Оскільки $\{f_p^{**}\}_{p=1}^\infty$ теж підпослідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, то частину (i) доведено.

Доведемо частину (ii). Нехай $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ рівномірно збігається всередині G до функції f. За теоремою Вейєрштрасса f – аналітична в G. Покажемо, що $c_f(z) = \tilde{c}_f(z) = \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : k \in \mathbb{Z}_+\right\}$ для всіх $z \in G$. Нехай $z \in G$. Припустимо, що

$c_f(z) < \tilde{c}_f(z)$ і $\tilde{c}_f(z) = \dfrac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)}$, $p > N$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $2\varepsilon < \delta$, де $0 < \delta = \tilde{c}_f(z) - c_f(z)$. Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{f_n^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $\dfrac{f^{(j)}(z)}{j!l^j(z)}$, міркуючи так само як в частині (i), знайдемо $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|f_{m+n}^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} < \frac{|f^{(j)}(z)|}{j!l^j(z)} + \varepsilon$$

для всіх n і $j = 0, 1, ..., N$. Оскільки $f_k \in \Omega_N(G, l)$ для всіх k, то

$$c_{f_{m+n}}(z) < c_f(z) + \varepsilon \tag{7}$$

для кожного n. Існує $s \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} < \frac{|f_{s+n}^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} + \varepsilon \tag{8}$$

для всіх n. Нехай $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_+$ такі, що $m + n_1 = s + n_2 = q$. Тоді з (7) і (8) отримуємо

$$c_f(z) + \delta = \tilde{c}_f(z) = \frac{|f^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} < \frac{|f_q^{(p)}(z)|}{p!l^p(z)} + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant c_{f_q}(z) + \varepsilon < c_f(z) + 2\varepsilon < c_f(z) + \delta,$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, $c_f(z) = \tilde{c}_f(z)$ і тому $f \in \Omega_N(G, l)$.

1. *Шеремета М.М., Кушнір В.О.* Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Матем. студії. – 1999. – Т.12. – N 1.– С.59-66.

2. *Bose A.K.* A Note on Entire Functions of Bounded Index //Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol.21. – N 2. – P.257-262.

ON THE COMPACTNESS OF THE SET OF ANALYTIC IN G FUNCTIONS OF BOUNDED l-INDEX

M. Borduljak, V. Kushnir

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let G be an arbitrary complex domain, and l be a positive continuous function in G such that

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G,$$

where $\beta > 1$ is a constant.

The conditions of compactness of the set of analytic in G functions of bounded l-index are established.

Key words: analytic functions of bounded l-index.

Стаття надійшла до редколегії 06.10.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.45–50

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.45–50

УДК 517.53

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ПОЛІСУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

Оксана БОРОВА, Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано непокращувані асимптотичні формули для полісубгармонічних функцій нульового порядку.

Ключові слова: полісубгармонічні функції нульового порядку.

Нехай u – субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функція, μ-її міра Рісса, $n(t,u) = n(t,\mu) = \mu(\{x : |x| < t\})$, cap E вінерова (при $m \geqslant 3$) або логарифмічна (при $m = 2$) ємність борелівської множини $E \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ ([1, с. 209]). Відносною ємністю E називатимемо величину ([2, с. 1295])

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\operatorname{cap}(E\cap U(r))}{\operatorname{cap} U(r)}, \quad U(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant r\}.$$

Вважатимемо, що функція u має нульовий порядок, якщо $\ln B(r,u) = o(\ln r)$, $r \to +\infty$, де $B(r,u) = \max\{u(x) : |x| = r\}$. Позначимо через $SH_m(0)$ клас субгармонічних в $\mathbb{R}^m, m \geqslant 2$ функцій u нульового порядку, $W(r) = r^{\lambda(r)}$, де $\lambda(r)$ – нульовий уточнений порядок $u(x)$ такий, що $W(r) \uparrow +\infty$ при $r \to +\infty$. Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $u(0) = 0$. u – гармонічна в околі точки нуль.

Підкласи функцій u класу $SH_m(0)$, для яких виконується

$$n(r,u) = o\big(r^{m-2}W(r)\big), \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

називатимемо допустимими класами функцій.

У [3] доведено, що клас функцій $SH_2(0)$ є допустимим та наведено приклад субгармонічної в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$ функції, для якої умова (1) не виконується.

У [4] показано, що множина субгармонічних в $\mathbb{R}^m, m \geqslant 3$ функцій нульового порядку, замкнена стосовно множення на додатні сталі перетворень $x \mapsto kx, (k > 0)$ граничного переходу в просторі узагальнених функцій $D'(\mathbb{R}^m)$, і яка не містить ніяких обмежених зверху в $\mathbb{R}^m$ функцій, крім сталих, є допустимим класом функцій. Зокрема, допустимим класом буде множина полісубгармонічних (а, отже, плюрісубгармонічних) в $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій.

У випадку $m \geqslant 3$ приймемо

$$I(x,u) = \int\limits_{|a-x|\leqslant|x|} \left(|x-a|^{2-m} - |x|^{2-m}\right) d\mu(a),$$

$$N(r,u) = \int\limits_{|a|\leqslant r} \left(|a|^{2-m} - r^{2-m}\right) d\mu(a) = (m-2)\int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\, dt,$$

а при $m = 2$

$$I(x,u) = \int\limits_{|a-x|\leqslant|x|} \ln\frac{|x|}{|a-x|}\,d\mu(a),$$

$$N(r,u) = \int\limits_{|a|\leqslant r} \ln\frac{r}{|a|}\,d\mu(a) = \int\limits_1^r \frac{n(t,u)}{t}\,dt.$$

Для субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$ функцій з допустимих класів є правильними такі асимптотичні формули ([4]):

$$u(x) = -I(x,u) + N(r,u) + o(W(r)), \quad r = |x| \to \infty, \tag{2}$$

$$u(x) = N(r,u) + o(W(r)), \quad x \to \infty, \quad x \notin E, \tag{3}$$

де E – множина нульової відносної ємності.

У цій праці уточнимо асимптотичні формули (2) та (3) для полісубгармонічних $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій.

Нагадаємо, що функція $u(x) = u(z_1, \dots, z_n)$ називається полісубгармонічною в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, якщо для кожного $i = 1, 2, \dots n$ функція $u(z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ)$ є субгармонічною в $\mathbb{C}$ функцією змінної z_i при довільних фіксованих змінних $z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ$.

Позначимо через $pSH_{2n}(0)$ – клас полісубгармонічних в $\mathbb{C}^n, n \geqslant 2$ функцій нульового порядку. Нехай $u \in pSH_{2n}(0)$, μ– міра Рісса функції $u, (z_i, Z_i^\circ) = (z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ,$
$z_i, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ)$, $Z_i^\circ = (z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ)$, $n(r; u(x)) = \mu(\{x \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leqslant$ $\leqslant r,\ i = 1, 2, \dots n\})$, $n(r; u(z_i, Z_i^\circ)) = \mu(\{(z_i, Z_i^\circ) \in \mathbb{C}^n : |z_i| \leqslant r\})$,

$$N(r; u(x)) = (2n-2)\int\limits_0^r \frac{n(t; u(x))\,dt}{t^{2n-1}}, \qquad N(r; u(z_i, Z_i^\circ)) = \int\limits_0^r \frac{n(t; u(z_i, Z_i^\circ))\,dt}{t}.$$

Приймемо $\delta(r) = \delta(r; W) = \sup\left\{\dfrac{tW'(t)}{W(t)} : t \geqslant r\right\}$. Оскільки $W(r)$ – повільно зростаюча функція, тобто $W(2r) \sim W(r)$, $r \to \infty$, то за лемою 3 з [5] отримуємо $W(r\exp(1/\delta(r))) \leqslant e\,W(r)$.

Теорема 1. *Якщо $u \in pSH_{2n}(0)$, то*

$$n(r; u(x)) = O(\delta(r) r^{\lambda(r)+2n-2}), \ \ r = |x| \to \infty. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо $z_j = \xi_j + i\zeta_j$, $D(r) = \{x \in \mathbb{C}^n : |z_j| \leqslant r, j = 1, \dots, n\}$, $D_i(r) = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : |z_j| \leqslant r, j \neq i\}$, $d\omega = d\xi_1 \cdot d\zeta_1 \cdot \ldots \cdot d\xi_n \cdot d\zeta_n$– елемент об'єму в $\mathbb{C}^n$, $d\omega_i = d\xi_1 \cdot d\zeta_1 \cdot \ldots \cdot d\xi_{i-1} \cdot d\zeta_{i-1} \cdot d\xi_{i+1} \cdot d\zeta_{i+1} \cdot \ldots \cdot d\xi_n \cdot d\zeta_n$, Δu– лапласіан функції u, $e_2 = 2\pi$, $e_{2n} = (2n-2)c_{2n} = (2n-2)2\pi^n/\Gamma(n)$, $n \geqslant 2$. Нехай $u \in pSH_{2n}(0)$. Для двічі неперервно диференційовних функцій u маємо

$$n(r; u(x)) = e_{2n}^{-1}\int\limits_{D(r)} \Delta u\,d\omega = e_{2n}^{-1}\sum_{i=1}^n \int\limits_{D(r)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta_i^2}\right) d\,\omega =$$

$$= 2\pi e_{2n}^{-1}\sum_{i=1}^n \int\limits_{D_i(r)} n(r; u(z_i, Z_i^\circ))\,d\omega_i. \tag{5}$$

Використовуючи відомі теореми про граничний перехід, отримуємо, що ліва і права частини (5) рівні і для всіх $u \in pSH_{2n}(0)$.

Припустимо, що існують функція $\psi(r)$, $\psi(r) \to +\infty$ $(r \to +\infty)$ і послідовність (r_k), $r_k \to +\infty$, $k \to +\infty$ такі, що для деякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\int\limits_{D_i(r)} n(r_k; u(z_i, Z_i^\circ))\, d\omega_i \geqslant \psi(r_k)W(r_k)\delta(r_k)(\pi r_k^2)^{n-1}.$$

Тоді існують (z_i, Z_{ik}°), $Z_{ik}^\circ \in D_i(r)$ такі, що

$$n(r_k; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant \psi(r_k)\delta(r_k)W(r_k).$$

Враховуючи означення $N(r; u(z_i, Z_i^\circ))$, для $r \geqslant r_k$ отримуємо

$$N(r; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant n(r_k; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \ln(r/r_k).$$

Прийнявши, що $r_k' = r_k \exp(1/\delta(r_k))$, маємо

$$N(r_k'; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \geqslant \psi(r_k)W(r_k). \tag{6}$$

Якщо виконується

$$N(r; u(z_i, Z_{ik}^\circ)) \leqslant N(2r; u(x))2^{2(n-1)}, \tag{7}$$

то з (6) отримуємо $(k \to \infty)$

$$2^{2(n-1)}\, O(W(2r_k')) \geqslant \psi(r_k)W(r_k).$$

Враховуючи, що функція $W(r)$ повільно зростаюча і $W(2r_k') \leqslant e\, W(r_k)$, $k \to +\infty$, одержуємо протиріччя.

Отже,

$$\int\limits_{D_i(r)} n(r; u(z_i, Z_i^\circ))\, d\omega_i = O(\delta(r) r^{\lambda(r)+2n-2}), r \to \infty,$$

і, враховуючи (5), отримуємо твердження теореми 1.

Залишилось довести (7). За формулою Йенсена маємо

$$N(r;\ u(z_1 + z_1^\circ, \dots, z_{i-1} + z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1} + z_{i+1}^\circ, \dots, z_n + z_n^\circ)) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} u(z_1^\circ + re^{i\phi_1}, \dots, z_{i-1}^\circ + re^{i\phi_{i-1}}, re^{i\phi_i}, z_{i+1}^\circ +$$

$$+ re^{i\phi_{i+1}}, \dots, z_n^\circ + re^{i\phi_n}) d\,\phi_1 \cdot \ldots \cdot d\,\phi_n \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_1^\circ, \dots, z_{i-1}^\circ, re^{i\phi_i}, z_{i+1}^\circ, \dots, z_n^\circ) d\,\phi_i = N(r;\ u(z_i, Z_i^\circ)).$$

Далі для $|z_i^\circ| \leqslant r, i = 1, 2, \dots n$, одержуємо

$$n(r;\ u(z_1 + z_1^\circ, \dots, z_{i-1} + z_{i-1}^\circ, z_i, z_{i+1} + z_{i+1}^\circ, \dots, z_n + z_n^\circ)) =$$

$$= \mu(\{\ x \in \mathbb{C}^n : |z_j + z_j^\circ| \leqslant r,\ j \neq i,\ |z_i| \leqslant r\}) \leqslant \mu(\{|z_j| \leqslant r + |z_j^\circ|,\ j \neq i,\ |z_i| \leqslant r\};$$

$$u(x)) \leqslant\leqslant n(2r;\ u(x)).$$

Звідси

$$N(2r;u(x)) = (2n-2)\int_0^{2r} \frac{n(t;u(x))}{t^{2n-1}}\,dt = (2n-2)\,2^{2n-2}\int_0^{r} \frac{n(2t;u(x))}{t^{2n-1}}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-2n}N(r;u(z_1+z_1^\circ,\dots,z_{i-1}+z_{i-1}^\circ,z_i,z_{i+1}+z_{i+1}^\circ,\dots,z_n+z_n^\circ)) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-2n}N(r;u(z_i,Z_i^\circ)),$$

і (7) доведено. Теорема 1 повністю доведена.

Зауваження. У випадку $n=1$ приклад міри μ, для якої $n(t,\mu)=\ln^p t$, $p>0, t\geqslant e$ засвідчує, що оцінка (4) є точною. Справді, тоді $N(r,\mu)=\dfrac{\ln^{p+1}t}{p+1}=W(t)$, $\delta(t)=\dfrac{p+1}{\ln t}$, а $n(t,\mu)=\ln^p t=\delta(t)W(t)$.

Наслідок 1. *Якщо u - плюрісубгармонічна в $\mathbb{R}^{2n}$ функція нульового порядку, то виконується (4).*

Оскільки кожна плюрісубгармонічна функція є полісубгармонічною, то твердження наслідку зразу випливає з теореми 1.

Теорема 2. *Нехай $u\in pSH_{2n}(0)$, ψ - довільна функція, $\psi(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$. Тоді*

$$u(x) = -I(x,u)+N(r;u(x))+O(\delta(r)W(r)),\quad r=|x|\to+\infty, \tag{8}$$

$$I(x,u)=o(\psi(r)\delta(r)W(r)),\quad x\to\infty,\quad x\notin E, \tag{9}$$

де E - множина нульової відносної ємності.

Доведення. Щоб отримати співвідношення (8), використаємо метод праці [3] та твердження теореми 1. Справді, приймемо, що $m=2n$ і запишемо

$$u(x)=\Big\{\int\limits_{|a|\leqslant 2r}+\int\limits_{|a|>2r}\Big\}(|a|^{2-m}-|x-a|^{2-m})\,d\mu(a)=I_1+I_2.$$

Для I_1 маємо

$$I_1=-I(x,u)+N(2r;u(x))-\int\limits_{D(x,a)}|x-a|^{2-m}\,d\mu(a)-r^{2-m}n(r,x)+(2r)^{2-m}n(2r,u),$$

де $D(x,a)=\{a\in\mathbb{R}^m:|x-a|>r,|a|\leqslant 2r\}$, $n(r,x)=\mu\{t:|t-x|\leqslant|x|\})$. Оскільки

$$0\leqslant\int\limits_{D(x,a)}|x-a|^{2-m}\,d\mu(a)\leqslant n(2r;u(x))r^{2-m},\quad n(r,x)\leqslant n(2r;u(x)),$$

$$N(2r;u(x))=N(r;u(x))+d_m\int_r^{2r}\frac{n(t;u(x))}{t^{m-1}}\,dt\leqslant N(r;u(x))+n(2r;u(x))r^{2-m},$$

$$n(r;u(x))=O(\delta(r)r^{\lambda(r)+2n-2}),$$

то

$$I_1 = -I(x,u) + N(r;u(x)) + O(\delta(r)W(r)), \quad r \to +\infty.$$

Враховуючи, що для $t \geqslant 2r$ виконується

$$t^{m-2} - (t-r)^{m-2} \leqslant (m-2)t^{m-3}r,$$

$$(t+r)^{m-2} - t^{m-2} \leqslant (m-2)(3/2)^{m-3}t^{m-3}r,$$

одержуємо

$$I_2 \leqslant \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{(t+r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t+r)^{m-2}t^{m-2}}\, dn(t;u(x)) \leqslant C_1 r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t,u)}{t^{m-1}},$$

$$I_2 \geqslant \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{(t-r)^{m-2} - t^{m-2}}{(t-r)^{m-2}t^{m-2}}\, dn(t;u(x)) \geqslant -C_2 r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t,u)}{t^{m-1}},$$

де C_1, C_2 - деякі додатні сталі.

Враховуючи теорему 1 та повільне зростання функції $W(r)$, маємо

$$r \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{dn(t;u(x))}{t^{m-1}} \leqslant r(m-1) \int\limits_{2r}^{+\infty} \frac{n(t;u(x))}{t^m}\, dt = O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{n(t;u(x))}{t^m}\, dt =$$

$$= O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n(2^{k+1}r;u(x))}{(2^k r)^{m-1}} = O(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\delta(2^{k+1}r)(2^{k+1}r)^{m-2}W(2^{k+1}r)}{(2^k r)^{m-1}} =$$

$$= O(1)\delta(r) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+o(1))^{k+1}W(r)}{2^{k-m+2}} = O(\delta(r)W(r)), \quad r \to +\infty,$$

що доводить співвідношення (8).

Доведемо співвідношення (9). Не зменшуючи загальності, вважаємо, що функція $\psi(r)$, $r \in [0,+\infty)$ є зростаючою. Приймемо для $\alpha > 0$

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^m : \ I(x;\mu) \geqslant \alpha\psi(r)\delta(r)W(r)\}.$$

Покажемо, що при $k \to +\infty$

$$\mathrm{cap}\,[E_\alpha \cap U(2^k) \setminus U(2^{k-1})]/\mathrm{cap}\, U(2^k) \to 0. \tag{10}$$

Справді, якщо це не так, то для деякого $\gamma > 0$ і послідовності (k_s), $k_s \to +\infty$, $s \to +\infty$,

$$\mathrm{cap}[E_\alpha \cap U(2^{k_s}) \setminus U(2^{k_s-1})] \geqslant 2\gamma \mathrm{cap}\, U(2^{k_s}).$$

Виберемо компакт $L_{k_s} \subset E_\alpha \cap U(2^{k_s}) \setminus U(2^{k_s-1})$ так, щоб

$$\mathrm{cap}\, L_{k_s} \geqslant \gamma\, \mathrm{cap}\, U(2^{k_s}).$$

Нехай ν_{k_s} – рівноваговий розподіл одиничної міри на L_{k_s}. Тоді

$$\int\limits_{L_{k_s}} I(x,u)\, d\nu_{k_s}(x) \geqslant \alpha\psi(2^{k_s-1})\delta(2^{k_s-1})W(2^{k_s-1}). \tag{11}$$

З іншого боку, маємо

$$\int\limits_{L_{k_s}} I(x,u)\,d\nu_{k_s}(x) \leqslant \int\limits_{L_{k_s}} d\nu_{k_s}(x) \int\limits_{|x-a|\leqslant|x|} |x-a|^{2-m}\,d\mu(a) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|a|\leqslant 2^{k_s+1}} d\mu(a) \int\limits_{L_{k_s}} |x-a|^{2-m}\,d\nu_{k_s}(x) = (\operatorname{cap} L_{k_s})^{-1} n(2^{k_s+1}; u(x)) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{-1} 2^{-k_s(m-2)} O(\delta(2^{k_s+1}) W(2^{k_s+1})(2^{k_s+1})^{m-2}) = O(\delta(2^{k_s}) W(2^{k_s-1}))$$

при $s \to +\infty$, що суперечить (11). Отже, співвідношення (10) доведено.

З (10), застосовуючи метод доведення теореми 2 праці [2] та лему з [2, с. 1295], отримуємо співвідношення (9). Теорема 2 доведена.

1. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. – М., 1966.
2. *Фаворов С.Ю.* О множествах понижения для субгармонических функций регулярного роста// Сиб. матем. журн. - 1979. - Т.20. - №6. – С.1294-1302.
3. *Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка// Матем. заметки. – 1983. – Т.34. – №2. – С.227-236.
4. *Заболоцкий Н.В., Фаворов С.Ю.* Асимптотические формулы субгармонических в $\mathbb{R}^m$ функций нулевого порядка// Теория функций, функц. анализ и их прилож. Харьков. – 1987. – Вып.47. – С.125-128.
5. *Братищев А.В., Коробейник Ю.В.* О некоторых характеристиках роста субгармонических функций// Матем. сб. – 1978. – Т.106. – №1. – С.44-65.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF POLISUBHARMONICAL FUNCTIONS

O. Borova, M. Zabolotskii

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

There is obtained unsharpened asymptotic formulas for polisubharmonics functions of zero order.

Key words: polisubharmonics functions of zero order.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.51–56

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.51–56

УДК 517.535

ПРО МАЖОРАНТИ ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Оксана ЛИЗУН
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілих функцій f з заданими обмеженнями на кількість їхніх нулів знайдено, в певному сенсі мінімальні, мажоранти зростання неванліннівської характеристики $T(r,f)$.

Ключові слова: ціла функція, лічильна функція, характеристика Неванлінни, нескінченний порядок, скінченний порядок.

Додатні, зростаючі до $+\infty$, неперервні на $(0,+\infty)$ функції називатимемо функціями зростання. Нехай ν – функція зростання. Через S_ν позначатимемо множину послідовностей $\mathcal{Z}$ відмінних від нуля комплексних чисел без точок скупчення в $\mathbb{C}$ таких, що $n(r,\mathcal{Z}) \leqslant \nu(r)$, $r>0$, де $n(r,\mathcal{Z})$ – кількість членів послідовності $\mathcal{Z}$ в крузі $\{z : |z| \leqslant r\}$. Скрізь надалі вважатимемо, що $\mathcal{Z} \cap \{z : |z| < 1\} = \emptyset$.

Характеристика Неванлінни цілої функції f позначається через $T(r,f)$, множина її нулів – через $\mathcal{Z}(f)$. Нехай λ – функція зростання. Ціла функція f називається функцією скінченного λ-типу, якщо при деяких $a>0$, $b>0$ виконується $T(r,f) \leqslant a\lambda(br)$ для всіх $r>0$. Клас цілих функцій f таких, що $\mathcal{Z}(f) \in S_\nu$ позначатимемо через $\mathcal{E}_\nu$.

1. Ми вивчаємо такі мажоранти зростання λ цілих функцій з класів $\mathcal{E}_\nu$, які для довільної послідовності $\mathcal{Z}$ з S_ν мажорують бодай одну цілу функцію $f \in \mathcal{E}_\nu$.

Означення. *Функція зростання λ називається мінімальною мажорантою зростання для $\mathcal{E}_\nu$, якщо:*

1) *для довільної послідовності $\mathcal{Z}$ з S_ν існує ціла функція скінченного λ-типу f така, що $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$;*
2) *існує послідовність $\mathcal{Z}$ з S_ν така, що для довільної цілої функції f, послідовність нулів якої збігається з $\mathcal{Z}$, виконується $\lambda(r) \leqslant aT(br,f)$ при деяких $a>0$, $b>0$ для всіх $r>0$.*

Теорема 1. *Нехай ν – неперервно диференційовна функція зростання і ϕ – додатна, неспадна, неперервно диференційовна функція така, що*

i) *функція $\omega(r) = \log\nu(r) + \log\phi(r)$ строго опукла стосовно $\log r$, $\omega(r)/\log r \to +\infty$ при $r \to +\infty$;*

ii)

$$\log \int_1^{\psi(k)} \frac{dt}{\phi(t)t} = o(k), \qquad k \to +\infty, \tag{1}$$

де функція $\psi(r)$ обернена до функції $r\omega'(r)$.

Тоді при $\lambda(r) = \phi(r)\nu(r)\int\limits_1^r \frac{dt}{\phi(t)t}$ *для довільної послідовності* $\mathcal{Z} \in S_\nu$ *існує ціла функція скінченного* λ*-типу* f *така, що* $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$.

Для $r \in (0, +\infty)$ і послідовностей $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{C}$ та $\mathcal{Z} = \{z_j = |z_j|e^{i\varphi_j}\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_j \to \infty$ при $j \to +\infty$, приймемо

$$l_0(r; \mathcal{Z}, \gamma) = N(r, \mathcal{Z});$$

$$l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma) = \gamma_k r^k + r^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t, \mathcal{Z})}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

де

$$n_k(r, \mathcal{Z}) = \sum_{|z_j|\leqslant r} e^{-ik\varphi_j}, \quad n_0(r, \mathcal{Z}) = n(r, \mathcal{Z}), \quad N(r, \mathcal{Z}) = \int\limits_0^r n(t, \mathcal{Z})t^{-1}dt.$$

Зауважимо, що $n_k(r, \mathcal{Z}) = 0$ при $r \in (0, 1)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Для доведення теореми 1 нам буде потрібна така лема.

Лема [1]. *Нехай* $\mathcal{Z} = \{z_j\} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *довільна послідовність без точок скупчення в* $\mathbb{C}$. *Якщо існують послідовності* $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{C}$ *і* $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \to 0$ *при* $k \to +\infty$ *такі, що для всіх* $k \in \mathbb{N}, r \in (0, +\infty)$ *і деякого* $b \in [1, +\infty)$ *виконується*

$$l_0(r; \mathcal{Z}, \gamma) \leqslant \lambda(br),$$
$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(br),$$

то існує єдина ціла функція f *скінченного* λ*-типу така, що* $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$.

Доведення теореми 1. Нехай $\mathcal{Z} \in S_\nu$. Для побудови цілої функції скінченного λ-типу f такої, що $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$, побудуємо спочатку коефіцієнти Фур'є $l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)$ пари послідовностей $(\mathcal{Z}, \gamma)$, підібравши γ_k так, щоб для всіх $r > 1$, $k \in \mathbb{N}$ виконувалося $|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(br)$ при деяких $b \geqslant 1$ і $\varepsilon_k \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Нехай функції ν, ϕ задовольняють умови i) та ii). Тоді зі строгої опуклості функції $\omega(r)$ стосовно $\log r$ та її гладкості випливає, що $r\omega'(r)$ строго зростає до $+\infty$ на $(1, +\infty)$. Отже, при $k \in \mathbb{N}$ маємо: або $r\omega'(r) > k$ при $r > 1$, або існує єдине $r_k > 1$ таке, що $r\omega'(r) = k$. Це r_k є єдиною точкою мінімуму функції $\omega(t) - k\log t$. Приймемо в першому випадку $\gamma_k = 0$, $r_k = 1$, а в другому

$$\gamma_k = -\int\limits_1^{r_k} \frac{n_k(t, \mathcal{Z})}{t^k}\frac{dt}{t}.$$

Тоді при $r < r_k$ одержуємо

$$l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma) = -r^k \int\limits_r^{r_k} \frac{n_k(t, \mathcal{Z})}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

а при $r \geqslant r_k$ –

$$l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma) = r^k \int\limits_{r_k}^r \frac{n_k(t, \mathcal{Z})}{t^k}\frac{dt}{t}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, при $r < r_k$, $k \in \mathbb{N}$, з огляду на (1), маємо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant r^k \int\limits_r^{r_k} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^k} \frac{dt}{t} \leqslant r^k \int\limits_r^{r_k} \frac{\nu(t)\phi(t)}{t^k} \frac{dt}{\phi(t)t} = r^k \int\limits_r^{r_k} e^{\omega(t) - k\log t} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant$$

$$\leqslant \phi(r)\nu(r) \int\limits_1^{r_k} \frac{dt}{\phi(t)t} = 2^{k\varepsilon_k} \phi(r)\nu(r) \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(r), \tag{2}$$

починаючи з деякого r, де $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

При $r \geqslant r_k$, $k \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant r^k \int\limits_{r_k}^{r} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t^k} \frac{dt}{t} \leqslant r^k \int\limits_{r_k}^{r} e^{\omega(t) - k\log t} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant$$

$$\leqslant \phi(r)\nu(r) \int\limits_1^{r} \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(r). \tag{3}$$

Враховуючи (2) та (3), знаходимо

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant 2^{k\varepsilon_k}\lambda(r),$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$, починаючи з деякого r. Отже, існує стала $a > 0$ така, що

$$|l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)| \leqslant a2^{k\varepsilon_k}\lambda(r) = 2^{k\varepsilon'_k}\lambda(r) \tag{4}$$

для всіх $r > 1$, де $\varepsilon'_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

Маємо також

$$l_0(r; \mathcal{Z}, \gamma) \leqslant \int\limits_1^{r} \nu(t)\phi(t) \frac{dt}{\phi(t)t} \leqslant \lambda(r), \tag{5}$$

для всіх $r > 1$.

Враховуючи (4) та (5), бачимо, що коефіцієнти Фур'є $l_k(r; \mathcal{Z}, \gamma)$ пари послідовностей $(\mathcal{Z}, \gamma)$ задовольняють умови леми. Отже, існує ціла функція f скінченного λ-типу така, що $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$. Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай ν - неперервно диференційовна функція зростання така, що $\log \nu(r)$ строго опукла стосовно $\log r$, і при деякому $a > 1$ виконується* $\int\limits_1^{+\infty} \nu(t)(\nu(at)t)^{-1} dt < +\infty$.

Тоді ν - мінімальна мажоранта для $\mathcal{E}_\nu$.

Доведення. Приймемо $\phi(t) = \nu(at)/\nu(t)$. Тоді при будь-якому $\psi(k)$ виконується (1). Отже, за теоремою 1 для довільної послідовності $\mathcal{Z} \in S_\nu$ існує ціла функція скінченного λ-типу f, $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$, при

$$\lambda(r) = \nu(ar) \int\limits_1^{r} \frac{\nu(t)}{\nu(at)} \frac{dt}{t} = O(\nu(ar)), \qquad r \to +\infty.$$

Перевіримо умову 2) означення. Позначимо $N(r, \mathcal{Z}(f)) = N(r, f)$. Розглянемо послідовність $\mathcal{Z}$ таку, що $\frac{1}{2}\nu(r) \leqslant n(r, \mathcal{Z}) \leqslant \nu(r)$. Для довільної функції $f \in$

$\mathcal{E}_\nu$, $f(0) = 1$, $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$ маємо, враховуючи нерівність $N(r, f) \leqslant T(r, f)$ [2, с. 22],

$$\nu(r) \leqslant \int_r^{er} \frac{\nu(t)}{t} dt \leqslant 2 \int_1^{er} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t} dt = 2N(er, f) \leqslant 2T(er, f).$$

Наслідок 1 доведено.

Наступний наслідок дає результат, який отримав Г. Скода [3].

Наслідок 2. *Нехай ν - неперервно диференційовна функція зростання така, що $\log \nu(r)$ опукла стосовно $\log r$, $\log \nu(r)/\log r \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Тоді існує ціла функція $f \in \mathcal{E}_\nu$ скінченного λ-типу при $\lambda(r) = r^\varepsilon \nu(r)$, де $\varepsilon > 0$.*

Доведення. Приймемо $\phi(r) = r^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді функція $\omega(r) = \log \nu(r) + \log \phi(r)$ опукла стосовно $\log r$ і

$$\log \int_1^{\psi(k)} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} = O(1) = o(k), \qquad k \to +\infty.$$

За теоремою 1 існує ціла функція $f \in \mathcal{E}_\nu$ скінченного λ-типу при

$$\lambda(r) = r^\varepsilon \nu(r) \int_1^r \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}} = O(r^\varepsilon \nu(r)), \qquad r \to +\infty.$$

Наслідок 2 доведено.

2. Розглянемо випадок, коли функція зростання ν має скінченний порядок, тобто $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} \log \nu(r)/\log r < +\infty$.

Теорема 2. *Нехай ν - функція зростання скінченного порядку. Тоді функція зростання*

$$\lambda(r) = \begin{cases} r^{q-1} \int_1^r \frac{\nu(t)}{t^q} dt + r^q \int_r^\infty \frac{\nu(t)}{t^{q+1}} dt & , \text{ при } r \geqslant 1, \\ r \int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{q+1}} dt & , \text{ при } r \in (0, 1), \end{cases}$$

де q - найменше натуральне число таке, що

$$\int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{q+1}} dt < +\infty,$$

є мінімальною мажорантою для $\mathcal{E}_\nu$.

Доведення. Існування цілої функції скінченного λ-типу з заданою послідовністю нулів $\mathcal{Z} \in S_\nu$ добре відоме (див., наприклад, [2, с.53]). Ця функція - канонічний добуток Вейєрштрасса роду $q - 1$.

Перевіримо умову 2) означення. Розглянемо послідовність $\mathcal{Z}$ додатних чисел таку, що $n(r, \mathcal{Z}) = \nu(r) + O(1)$, $r \to +\infty$. Нехай f - деяка ціла функція така, що

$\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}$. Оцінимо коефіцієнти Фур'є $l_k(r, f)$, $k = q-1, q$, її логарифма [4]

$$l_{q-1}(r,f) = \gamma_{q-1} r^{q-1} + r^{q-1} \int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^q} dt, \quad \gamma_{q-1} = 0 \quad \text{при} \quad q = 1,$$

$$l_q(r,f) = \gamma_q r^q + r^q \int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt.$$

За означенням q і побудовою $\mathcal{Z}$ одержуємо

$$l_{q-1}(r,f) = (1+o(1)) r^{q-1} \int\limits_0^r \frac{\nu(t)}{t^q} dt, \qquad r \to \infty.$$

При $r \to +\infty$ маємо

$$\gamma_q + \int\limits_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt \to \gamma_q + \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt.$$

Мінімум модуля цієї границі досягається при

$$\gamma_q = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t,\mathcal{Z})}{t^{q+1}} dt.$$

Тому при досить великих r отримуємо

$$r^q \int\limits_r^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^{q+1}} dt \leqslant |l_q(r,f)| + O(1).$$

Оскільки при деяких додатних a, b для всіх $r > 0$ виконується [5]

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |l_k(r,f)|^2 \right\}^{1/2} \leqslant bT(ar,f),$$

то при певному $c > 0$ одержуємо

$$\lambda(r) \leqslant c(|l_{q-1}(r,f)| + |l_q(r,f)|) \leqslant BT(ar,f),$$

починаючи з деякого $r > 0$. Тепер сталі a, B можна вибрати так, що ця нерівність буде виконуватися для всіх $r > 0$. Умова 2) означення виконана. Теорема 2 доведена.

Праця виконана при підтримці INTAS, проект N^o 99-00089.

1. *Васильків Я.В.* Зауваження до умов скінченності λ-типу цілої функції// Мат. методи та фіз.-мех. поля (в друці)
2. *Хейман У.* Мероморфные функции. – М., 1966.
3. *Skoda H.* Sous-ensembles analytique ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$// Bull. Soc. Math. France. – 1972. – Vol. 100. – №4. – P.353-408.

4. *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0, 2\pi]$-метриці// Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50. – №7. – С.889-896.

5. *Бридун А.М., Лизун О.Я., Мицик Р.З.* Узагальнення теореми Ліндельофа для цілих функцій// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.20-27.

ON MAJORANTS OF THE GROWING OF ENTIRE FUNCTIONS

Ya. Vasylkiv, O. Lyzun

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

For entire functions f satisfying certain restrictions on the number of its zeros are find growth majorants of Nevanlinna characteristic $T(r, f)$ which are minimal in some sence.

Key words: entire function, counting function, Nevanlinna characteristic, infinite order, finite order.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.57–60

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.57–60

УДК 517.53

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА, Мирослав ШЕРЕМЕТА
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул.Стрийська, 3, м.Дрогобич, Львівська обл. Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Побудовано канонічні добутки, які належать до $\alpha\beta$-класу збіжності.
Ключові слова: канонічні добутки, класи збіжності, ряди Діріхле.

Нехай f – ціла функція з нулями z_k, $f(0) \neq 0$, $n_f(r) = \sum_{|z_k| \leqslant r} 1$ – лічильна функція нулів, $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\varrho = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ – порядок функції f, а $\tau = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho}}$ – її тип. Добре відомо [1], що $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln n_f(r)}{\ln r} = \varrho$ і, якщо ϱ – неціле число, то існують додатні сталі k_1 і k_2 такі, що $k_1\tau \leqslant \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln n_f(r)}{r^{\varrho}} \leqslant k_2\tau$. У випадку, коли $\tau = 0$, Ж. Валірон [2] означив клас збіжності умовою $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty$ і довів таке: якщо f належить до класу збіжності, то $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-\varrho} < +\infty$. Якщо ϱ – неціле число, то остання умова є також достатньою [3] для належності f до класу збіжності (зауважимо, що для нецілого ϱ за теоремою Адамара про зображення цілої функції задача зводиться до питання належності до класу збіжності канонічних добутків).

У випадку, коли $\varrho = +\infty$, для характеристики зростання цілих функцій використовують узагальнений порядок [4] $\varrho_{\alpha\beta} = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$, де $\alpha \in L$, $\beta \in L$, а L – клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій. Канонічні добутки заданого узагальненого порядку побудував С.К.Балашов [5]. Ми розглянемо узагальнений $\alpha\beta$-клас збіжності, який означимо умовою

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty, \tag{1}$$

і за певних обмежень на функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ побудуємо канонічний добуток, який належатиме до $\alpha\beta$-класу збіжності (зауважимо, що належність цілої функції f до $\alpha\beta$-класу збіжності в термінах її тейлорових коефіцієнтів описана в [6]).

Отже, нехай (z_k) – довільна занумерована у порядку неспадання модулів послідовність відмінних від 0 комплексних чисел з єдиною точкою скупчення у ∞, а $n(r)$ – її лічильна функція. Вважатимемо, що функція $n(r)$ має не тільки нескінченний порядок, а й задовольняє умову $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, де $\omega \in L$, і розглянемо канонічний добуток

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/z_k,\, 2[\omega(|z_k|)]), \tag{2}$$

де $E(z, p)$ – первинний множник Вейєрштрасса. Оскільки для кожного $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{|z_k|}\right)^{2[\omega(|z_k|)]+1} = \sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\{-2(1+o(1))\omega(|z_k|)\ln|z_k|\} =$$
$$= \sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\{-2(1+o(1))\ln n(|z_k|)\} \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty}\exp\{-2(1+o(1))\ln k\} < +\infty,$$

то [1, с. 16] канонічний добуток (2) абсолютно і рівномірно збігається на кожному компакті з $\mathbb{C}$ й зображає цілу функцію.

Теорема. *Нехай функції $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ такі, що $\alpha(x^2) = O(\alpha(x))$, $\beta(2x) = O(\beta(x))$ при $x \to +\infty$ і $\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\beta(x)} < +\infty$. Припустимо, що послідовність (z_n) задовольняє умову $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, де $\omega \in L$. Для того щоб канонічний добуток (2) належав до $\alpha\beta$-класу збіжності, необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}(\alpha(k)-\alpha(k-1))B(\ln|z_k|) < +\infty, \quad B(x) = \int\limits_{x}^{\infty}\frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \tag{3}$$

Доведення. Оскільки [1, с. 21] $\ln|E(z,p)| \leqslant 3e(2+\ln p)\dfrac{|z|^{p+1}}{1+|z|}$, $p \geqslant 1$, то

$$\ln M_\pi(r) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 3e(2+\ln(2[\omega(|z_n|)]))\frac{(r/|z_n|)^{2[\omega(|z_n|)]+1}}{1+r/|z_n|} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(K_1 r)^{2[\omega(|z_n|)]+1}}{|z_n|^{2[\omega(|z_n|)]+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\lambda_n}}\exp\{(\ln r+\ln K_1)\lambda_n\}, \tag{4}$$

де $\lambda_n = 2[\omega(|z_n|)]+1$, а через K_j тут і надалі позначені додатні сталі.

Відомо [7, с. 23] таке: якщо невід'ємні коефіцієнти a_n ряду Діріхле $F(\sigma) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\exp\{\sigma\lambda_n\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, задовольняють умову $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{-\ln|a_n|} = h < 1$, то $F(\sigma) \leqslant \mu(\sigma/(1-h-\varepsilon))$ для кожного $\varepsilon \in (0, 1-h)$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_0(\varepsilon)$, де $\mu(\sigma) = \max\{a_n\exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 1\}$. Оскільки $\ln n(r) \sim \omega(r)\ln r$, $r \to +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\lambda_n\ln|z_n|} = 1/2$, і тому з (4) одержуємо $\ln M_\pi(e^\sigma) \leqslant \mu\left(\dfrac{\sigma+\ln K_1}{1/2-\varepsilon}\right)$, де $\mu(\sigma) = \max\left\{\left(\dfrac{e^\sigma}{|z_n|}\right)^{\lambda_n} : n \geqslant 1\right\}$. Нехай $\nu(\sigma) = \max\left\{n : \left(\dfrac{e^\sigma}{|z_n|}\right)^{\lambda_n} = \mu(\sigma)\right\}$.

Очевидно, що $\nu(\sigma) \leqslant n(e^\sigma)$. Тому [10, с. 17]

$$\ln\mu(\sigma) = \ln\mu(0) + \int\limits_0^\sigma \lambda_{\nu(t)}dt \leqslant \ln\mu(0) + \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant \ln\mu(0) + \sigma\lambda_{n(e^\sigma)} \leqslant$$

$$\leqslant \ln\mu(0) + 2\sigma\omega(|z_{n(e^\sigma)}|) + 1 \leqslant \ln\mu(0) + 2\sigma\omega(e^\sigma) + 1 \leqslant 3\ln n(e^\sigma)$$

і

$$\ln M_\pi(e^\sigma) \leqslant \exp\left\{3\ln n\left(\exp\left\{\frac{\sigma + \ln K_1}{1/2 - \varepsilon}\right\}\right)\right\} \leqslant \exp\left\{3\ln n\left(e^{K_2\sigma}\right)\right\} \tag{5}$$

для всіх досить великих σ. З умови $\alpha(x^2) = O(\alpha(x))$, $x \to +\infty$ випливає, що $\alpha(e^{3x}) \leqslant K_3\alpha(e^x)$, а з умови $\beta(2x) = O(\beta(x))$, $x \to +\infty$ маємо $\beta(\sigma/K_2) \geqslant \beta(\sigma)/K_4$. Тому з (5) отримуємо $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_\pi(e^\sigma))}{\beta(\sigma)}d\sigma \leqslant K_5 \int\limits_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(e^\sigma))}{\beta(\sigma)}d\sigma$, тобто канонічний добуток (2) належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, якщо

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty. \tag{6}$$

Навпаки, нехай $N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dt$ – неванліннова лічильна функція послідовності (z_k). Тоді $n(r) \leqslant N(er)$ і, завдяки умові $\beta(2x) = O(\beta(x))$, $x \to +\infty$, нерівність (6) правильна, якщо $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(N(r))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty$. Якщо π належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, то за нерівністю Йєнсена ($N(r) \leqslant \ln M_\pi(r)$) останнє співвідношення правильне.

Отже, канонічний добуток (2) належить до $\alpha\beta$-класу збіжності тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність (6).

Але

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)}dr = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int\limits_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{\alpha(n(r))}{r\beta(\ln r)}dr + K_6 = \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha(n) \int\limits_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{dr}{r\beta(\ln r)} + K_6 =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha(n)(B(\ln|z_n|) - B(\ln|z_{n+1}|)) + K_6 = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B(\ln|z_n|) + K_7.$$

Тому співвідношення (6) і (3) рівносильні. Теорему доведено.

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М., 1956.
2. *Valiron G.* General theory of integral functions. – Toulouse, 1923.
3. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – М., 1941.
4. *Шеремета М.Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Известия вузов. Матем. – 1967. – №2. – С.100-108.
5. *Балашов С.К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней // Известия вузов. Матем. – 1972. – №8. – С.10-18.

6. *Мулява О.М.* Класи збіжності в теорії рядів Діріхле // Доп. НАН України, сер. А. – 1999. – №3. – С.35-39.

7. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

ON THE BELONGING OF CANONICAL PRODUCTS TO GENERALIZED CONVERGENCE CLASS

O. Muliava, M. Sheremeta

Drogobych State Pedagogical University, 3 Stryiska Str., Drogobych, Lvivska obl, Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Canonical products belonging to convergence $\alpha\beta$-class are constructed.

Key words: canonical products, convergence class, Dirichlet series.

Стаття надійшла до редколегії 28.05.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.61-65

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.61-65

УДК 517.5

ПРО МІНІМУМ МОДУЛЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО РОДУ

Олег СКАСКІВ, Ігор ЧИЖИКОВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілої функції $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - z/a_n)$ нульового роду доведено, що умова $\underline{\lim}_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\sum_{|a_n|<r}|a_n| + r\sum_{|a_n|>r}\frac{1}{|a_n|}\right) = 0$ є достатньою, а у випадку, коли $a_n > 0$ $(n \geqslant 1)$, і необхідною для того, щоб $\overline{\lim}_{r\to+\infty} m_f(r)/M_f(r) = 1$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Ключові слова: ціла функція, мінімум модуля, нульовий рід.

Для мероморфної функції f позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$. А. А. Гольдберг довів таку теорему.

Теорема А [1]. *Якщо f – мероморфна у комплексній площині функція порядку нуль і*

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{N(r,0,f) + N(r,\infty,f)}{\ln^2 r} \leqslant \sigma < +\infty, \tag{1}$$

то

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{m_f(r)}{M_f(r)} \geqslant C(\sigma) = \left(\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}}\right)^2, \quad q = e^{-\frac{1}{4\sigma}}, \tag{2}$$

де $N(r,0,f)$ і $N(r,\infty,f)$ – усереднені лічильні функції відповідно нулів і полюсів функції f (означення див. [2]), $C(0) = 1$.

Він висловив припущення [1], що теорема А правильна для кожної мероморфної функції нульового роду, якщо виконується умова (1).

У праці [3] доведено, що нерівність (2) є правильна для кожної мероморфної функції нульового роду, як тільки виконується умова

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{r}{\ln^2 r} \int_r^{+\infty} \frac{N(r,0,f) + N(r,\infty,f)}{t^2} dt \leqslant \sigma < +\infty, \tag{3}$$

яка є дещо сильнішою за умову (1). З умови (1) для мероморфної функції нульового порядку, а з умови (3) для мероморфної функції нульового роду випливає при $\sigma = 0$ рівність

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{m_f(r)}{M_f(r)} = 1. \tag{4}$$

Тому природно виникає запитання про необхідні і достатні умови правильності рівності (4) в класі мероморфних функцій нульового роду. Ми даємо відповідь

Дослідження частково підтримані грантом INTAS, проект 99-0089

на це запитання у випадку цілих функцій нульового роду. Власне, якщо $\lambda = (\lambda_n)$ – неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел така, що $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, то через $Z(\lambda)$ позначимо клас цілих функцій f нульового роду таких, що

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big), \quad |a_n| = \lambda_n \ (n \geqslant 1),$$

тобто клас функцій з фіксованою послідовністю $(|a_n|)$.

Правильна така теорема.

Теорема. *Для того щоб для цілої функції $f \in Z(\lambda)$ справджувалась рівність (4) достатньо, а у випадку, коли $a_n = \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$, і необхідно, щоб*

$$\varliminf_{r\to+\infty}\Big(\frac{1}{r}\sum_{\lambda_n\leqslant r}\lambda_n + r\sum_{\lambda_n>r}\frac{1}{\lambda_n}\Big) = 0. \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи, що при $|z| = r > 0$

$$|f(z)| \leqslant \prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 + \frac{r}{\lambda_n}\Big) = \hat{f}(-r), \quad |f(z)| \geqslant \prod_{n=1}^{+\infty}\Big|1 - \frac{r}{\lambda_n}\Big| = \hat{f}(r),$$

де $\hat{f}(z) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - z/\lambda_n\Big)$, то $M_f(r) \leqslant \hat{f}(-r) = M_{\hat{f}}(r)$ і $m_f(r) \geqslant \hat{f}(r) = m_{\hat{f}}(r)$, а отже, достатньо довести теорему для функції $\hat{f}$. Далі для $r \notin \{\lambda_n\}$

$$\ln\frac{M_{\hat{f}}(r)}{m_{\hat{f}}(r)} \leqslant \sum_{\lambda_n<r}\ln\frac{1+\frac{r}{\lambda_n}}{1-\frac{r}{\lambda_n}} + \sum_{\lambda_n>r}\ln\frac{\frac{r}{\lambda_n}+1}{\frac{r}{\lambda_n}-1} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_1(r) + \Pi_2(r).$$

Тому достатньо показати, що $\varliminf\limits_{r\to+\infty}(\Pi_1(r) + \Pi_2(r)) = 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (5).

Зауважимо, що

$$\Pi_1(r) = \sum_{\lambda_n<r}\ln\Big(1 + \frac{2\lambda_n}{r-\lambda_n}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n<r} c_n(r),$$
$$\Pi_2(r) = \sum_{\lambda_n>r}\ln\Big(1 + \frac{2r}{\lambda_n-r}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n>r} d_n(r),$$

при цьому $c_n(r) > 0$ і $d_n(r) > 0$ для всіх $n \geqslant 1$ і $r \notin \{\lambda_n\}$.

Припустимо, що виконується умова (5). Тоді існує така послідовність $r_j \uparrow +\infty$, що при $r = r_j \to +\infty$

$$\frac{1}{r}\sum_{\lambda_n<r}\lambda_n + r\sum_{\lambda_n>r}\frac{1}{\lambda_n} = o(1). \tag{6}$$

Звідси отримуємо, що для $m_j = \max\{n : \lambda_n < r_j\}$ виконується $r_j/\lambda_{m_j+1} \to 0$ і $\lambda_{m_j}/r_j \to 0$ $(j \to +\infty)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $r_j/\lambda_{m_j+1} \leqslant \frac{1}{2}$ і $\lambda_{m_j}/r_j \leqslant \frac{1}{2}$ $(j \geqslant 1)$.

Тоді для всіх $n \leqslant m_j$

$$c_n(r_j) = \ln\Big(1 + \frac{2\lambda_n}{r_j - \lambda_n}\Big) \leqslant \frac{2\lambda_n}{r_j\Big(1 - \frac{\lambda_n}{r_j}\Big)} \leqslant 4\frac{\lambda_n}{r_j},$$

а для всіх $n \geqslant m_j + 1$

$$d_n(r_j) = \ln\Big(1 + \frac{2r_j}{\lambda_n - r_j}\Big) \leqslant \frac{2r_j}{\lambda_n\Big(1 - \frac{r_j}{\lambda_n}\Big)} \leqslant 4\frac{r_j}{\lambda_n},$$

тому згідно з (6)

$$\Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j) \leqslant 4\Big(\frac{1}{r_j}\sum_{\lambda_n < r_j} \lambda_n + r_j \sum_{\lambda_n > r_j} \frac{1}{\lambda_n}\Big) = o(1) \quad (r_j \to +\infty),$$

і достаність умови (5) доведено.

Припустимо, що $r_j \uparrow +\infty$ послідовність, для якої

$$\Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j) = o(1) \quad (r_j \to +\infty). \tag{7}$$

Тоді $c_n(r_j) = o(1)$ $(r_j \to +\infty)$ для кожного $n \leqslant m_j$ і $d_n(r_j) = o(1)$ $(r_j \to +\infty)$ для кожного $n \geqslant m_j + 1$. Звідки отримуємо, що для $n \leqslant m_j$

$$\tilde{c}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\lambda_n}{r_j - \lambda_n} = o(1) \quad (r_j \to +\infty),$$

і для $n \geqslant m_j + 1$

$$\tilde{d}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2r_j}{\lambda_n - r_j} = o(1) \quad (r_j \to +\infty).$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\tilde{c}_n \leqslant 1/2$, $\tilde{d}_n \leqslant 1/2$. Тому, використовуючи нерівності $\ln(1 + x) \geqslant 2x/3$ $(0 \leqslant x \leqslant 1/2)$, $\frac{\lambda_n}{r_j - \lambda_n} \geqslant \frac{\lambda_n}{r_j}$ і $\frac{r_j}{\lambda_n - r_j} \geqslant \frac{r_j}{\lambda_n}$, отримуємо

$$\frac{4}{3}\Big(\sum_{\lambda_n < r_j} \frac{\lambda_n}{r_j} + \sum_{\lambda_n > r_j} \frac{r_j}{\lambda_n}\Big) \leqslant \Pi_1(r_j) + \Pi_2(r_j).$$

Звідси, згідно з (7), бачимо, що виконується умова (5).

Необхідність умови (5), а з нею і теорему повністю доведено.

Наведемо один наслідок з теореми.

Наслідок. *Якщо $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant n_0)$, то для того щоб для функції $f \in Z(\lambda)$ справджувалась рівність (4) достатньо, а у випадку, коли $a_n = \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$ і необхідно, щоб*

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Необхідність умови (8) отримуємо негайно з того, що $\frac{\lambda_{m_j}}{r_j} \geqslant \frac{\lambda_{m_j}}{\lambda_{m_j+1}}$, де m_j і r_j визначено у доведенні теореми.

Для доведення достатності умови (8) припустимо, не зменшуючи загальності міркувань, що $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 1)$. Тому $\lambda_m \geqslant \lambda_p q^{m-p}$ $(1 \leqslant p \leqslant m)$ і, отже, у випадку, коли послідовність $m_j \to +\infty$ така, що $\lambda_{m_j}/\lambda_{m_j+1} = o(1)$ $(j \to +\infty)$, а $r_j = \sqrt{\lambda_{m_j}\lambda_{m_j+1}}$ негайно отримаємо

$$\frac{1}{r_j}\sum_{k=1}^{m_j}\lambda_k + r_j\sum_{k=m_j+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k} \leqslant \frac{\lambda_{m_j}}{r_j}\sum_{k=1}^{m_j}q^{k-m_j} + \frac{r_j}{\lambda_{m_j+1}}\sum_{k=m_j+1}^{+\infty}q^{m_j+1-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{m_j}}{\lambda_{m_j+1}}}\frac{2q}{q-1} = o(1) \quad (j \to +\infty),$$

тобто виконується умова (5).

Зазначимо, що у випадку, коли виконується умова

$$\varliminf_{r\to+\infty}\frac{N_\lambda(r)}{\ln^2 r} = 0, \quad N_\lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\lambda(t)}{t}dt, \quad n_\lambda(t) = \sum_{0<\lambda_n\leqslant t} 1,$$

то виконується (8). Навпаки це не правильно. Для кожного $\sigma > 0$ існує послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, що одночасно

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{N_\lambda(r)}{\ln^2 r} = \sigma, \quad \lim_{r\to+\infty}\frac{r}{\ln^2 r}\int\limits_r^{+\infty}\frac{N_\lambda(t)}{t^2}dt = \sigma, \tag{9}$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant q > 1 \quad (n \geqslant 1), \quad \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = +\infty.$$

Справді, нехай $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_n)$ наступна послідовність $\tilde{\lambda}_n = q^n$, $q = e^{\frac{1}{2\sigma}}$, $\sigma > 0$. Тоді

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{n_{\tilde{\lambda}}(t)}{\ln t} = 2\sigma \tag{10}$$

і, отже, для $\tilde{\lambda}$ правильні рівності (9).

Виберемо послідовності $n_k = 2^{2^k}$ $(k \geqslant \max\{[q]+1, 2\})$ та $m_k = \min\{m : \tilde{\lambda}_m \geqslant k\tilde{\lambda}_{n_k}\}$. Нехай послідовність λ вибрана з умови

$$\lambda = \{\lambda_n : n \geqslant 1\} = (\{k\tilde{\lambda}_{n_k}\} \cup \{\tilde{\lambda}_n\}) \setminus \{\tilde{\lambda}_n : n_k + 1 \leqslant n \leqslant m_k\}.$$

Позаяк $\tilde{\lambda}_{n+1} = q\tilde{\lambda}_n$ $(n \geqslant 1)$ і

$$\frac{k\tilde{\lambda}_{n_k}}{\tilde{\lambda}_{n_k}} = k \geqslant [q] + 1 > 1, \quad \frac{\tilde{\lambda}_{m_k+1}}{k\tilde{\lambda}_{n_k}} \geqslant \frac{\tilde{\lambda}_{m_k+1}}{\tilde{\lambda}_{m_k}} = q,$$

то $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 1)$, а також $\varlimsup_{n\to+\infty}\lambda_{n+1}/\lambda_n = +\infty$. Далі, очевидно, що

$$n_\lambda(t) \leqslant n_{\tilde{\lambda}}(t) \quad (t > 0), \tag{11}$$

крім того, при $k \geqslant \max\{[q]+1, 2\} \stackrel{\text{def}}{=} k_0$ і $t \in [\tilde{\lambda}_{n_k}, \tilde{\lambda}_{n_{k+1}})$

$$n_\lambda(t) \geqslant n_{\tilde{\lambda}}(t) - \sum_{s=k_0}^{k}(m_s - n_s).$$

Зауважимо, що

$$\tilde{\lambda}_{m_s} = (e^{\frac{1}{2\sigma}})^{m_s} \geqslant s\tilde{\lambda}_{n_s} = s(e^{\frac{1}{2\sigma}})^{n_s},$$

тобто $m_s \geqslant 2\sigma \ln s + n_s$, а, враховуючи, що m_s є найменшим можливим, то $m_s = n_s + [2\sigma \ln s]$, тому для $t \in [\tilde{\lambda}_{n_k}, \tilde{\lambda}_{n_{k+1}})$

$$n_\lambda(t) \geqslant n_{\tilde{\lambda}}(t) - \sum_{s=k_0}^{k} [2\sigma \ln s]. \tag{12}$$

Оскільки $\sum\limits_{s=k_0}^{k} [2\sigma \ln s] \sim 2\sigma k \ln k \ (k \to +\infty)$ та $n_{\tilde{\lambda}}(t) \geqslant n_k = 2^{2^k}$ при $t \geqslant \lambda_{n_k}$, то з (11) і (12) одержуємо

$$n_\lambda(t) = (1 + o(1)) n_{\tilde{\lambda}}(t) \quad (t \to +\infty),$$

а отже,

$$N_\lambda(t) = (1 + o(1)) N_{\tilde{\lambda}}(t) \quad (t \to +\infty).$$

Звідки отримуємо, що для послідовності λ виконуються умови (8)–(10) і $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant q > 1 \ (n \geqslant 1)$.

1. *Гольдберг А.А.* О минимуме модуля мероморфной функции медленного роста // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. –№6. – С.835-844.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.
3. *Skaskiv O.B.* An elementary addendum to A. Gol'dbergs's theorem on the minimum modulus of a meromorphic function of zero order // Math. methods and phiz.-mech. fields. – 1999. – Vol.43. – №4 – P.155-158.

ON THE MINIMUM OF AN ENTIRE FUNCTION OF ZERO GENUS

O. Skaskiv, I. Chyzhykov

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - z/a_n)$ be an enitre function of zero genus. We prove that in order to $\varlimsup\limits_{r\to+\infty} m_f(r)/M_f(r) = 1$, where $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, it is sufficient and in the case when $a_n > 0 \ (n \geqslant 1)$ is necessary that $\varliminf\limits_{r\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\sum_{|a_n|\leqslant r}|a_n| + r\sum_{|a_n|>r}\frac{1}{|a_n|}\right) = 0$.

Key words: entire function, minimum modulus, zero order.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.2001

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.66-73

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.66-73

УДК 517.57

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ КРАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Олеся ТРАКАЛО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано аналоги співвідношень Бореля для цілих кратних рядів Діріхле.
Ключові слова: ряд Діріхле, виняткова множина, математичне сподівання.

Нехай $H^p(\lambda)$ – клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}^p$, $p \geqslant 1$) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} F_n e^{<z,\lambda_n>},$$

де $\|n\| = n_1 + \cdots + n_p$ для мультиіндексу $n = (n_1, \ldots, n_p)$, $< a, b >= a_1 b_1 + \ldots a_p b_p$ для $a = (a_1, \ldots a_p)$, $b = (b_1, \ldots b_p)$, а $\lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ – фіксована послідовність така, що $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $0 = \lambda_0^{(j)} < \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant k \uparrow +\infty)$, $j = 1, 2, \ldots p$.

Для $F \in H^p(\lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ визначимо $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{<\sigma,\lambda_n>}$, $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}^p\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|F_n| e^{<\sigma,\lambda_n>} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$.

Нехай L – клас додатних неперервних неспадних необмежених на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H^p(\lambda, \Phi) = \{f \in H^p(\lambda) : \ln \mathfrak{M}(\sigma, F) = O(|\sigma| \Phi(|\sigma|)) \, (|\sigma| \to +\infty)\},$$

де $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots \sigma_p^2}$ для $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^p$.

У випадку всього класу цілих рядів Діріхле від однієї змінної (тобто класу $H^1(\lambda)$) відомо [1], що умова (при $j = 1$)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} < +\infty \tag{1}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{2}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_1)$, де E_1 – деяка множина скінченної міри Лебега на прямій $\text{meas} E_1 < +\infty$. У [2] цей результат доповнено. Для класу $H^1(\lambda, \Phi)$ з теореми 1 [2] випливає таке: якщо $\Phi \in L$, $F \in H^1(\lambda, \Phi)$ і для кожного $\eta > 0$ виконується умова (при $j = 1$)

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \sum_{0 < \lambda_k^{(j)} \leqslant \eta \Phi(R)} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} = 0, \tag{3}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$), де E_2 – деяка множина нульової лінійної щільності

$$\mathcal{D}E_2 \equiv \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{1}{R}\text{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

У [3-6] отримано аналоги цих результатів у класі $H^p(\lambda)$ (в [3,4,6] для $p = 2$, в [5] при $p \geqslant 2$). Найсильніші в частині описання виняткової множини E твердження одержали в [5,6]. Нехай S_R – необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, напрямною якого є сфера $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \,:\, |\sigma| = R\}$, а твірні паралельні до прямої $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) \,:\, \sigma_1 = \dots = \sigma_p\}$, а K – конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат O такий, що

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^p \,:\, \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \mu(t\sigma, F)}{t} = +\infty\}.$$

З результату, доведеного в [5], випливає, що співвідношення (2) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_3$) для кожної функції $F \in H^p(\lambda)$, $p \geqslant 2$, як тільки для $1 \leqslant j \leqslant p$ виконується умова (1), а для лебегової в $\mathbb{R}^p$ міри множини E_3 виконується

$$\text{meas}_p(E_3 \cap S_R) = O(R^{p-1}) \quad (R \to +\infty).$$

З результату, одержаного в [6], випливає, що для кожної функції $F \in H^2(\lambda)$, якщо виконується умова (1) при $j = 1$ і $j = 2$, то співвідношення (2) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_4$), де K – кут в $\mathbb{R}^2$ з вершиною у початку координат і множина E_4, зокрема, такі, що $\mathbb{R}^2_+ \subset K$ і

$$\iint\limits_{E_4\cap\mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty, \tag{4}$$

тут і далі $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Отримане описання (4) виняткової множини E_4 є найкраще можливим у тому сенсі, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують послідовність λ, для якої виконується умова (1) при $j = 1$ і $j = 2$, функція $F \in H^2(\lambda)$, множина E_4 і стала $h > 0$ такі, що $\iint\limits_{E_4\cap\mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty$ і для всіх $\sigma \in E_4$

$$\ln M(\sigma, F) \geqslant (1 + h) \ln \mu(\sigma, F). \tag{5}$$

Позначимо

$$H^2_0(\lambda) = \bigcup_{\Phi} H^2(\lambda, \Phi),$$

де об'єднання беремо за всіма функціями $\Phi(t) = e^{\rho t}$, $\rho > 0$. У цьому повідомленні доповнимо в класі $H^2_0(\lambda)$ цитоване вище твердження з [6].

Правильною є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $F \in H^2_0(\lambda)$ і при $j = 1$ і $j = 2$ виконується умова (3). Тоді співвідношення (2) є правильним при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_5$) для кожного кута K з вершиною в точці O такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \mathbb{R}^2_+$, а множина E_5 така, що*

$$\iint\limits_{E_5\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = o(R) \quad (R \to +\infty),$$

де $C_R = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2_+ : |\sigma| \leqslant R\}$, $R > 0$.

Доведення. Нехай $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності j-их компонент векторної послідовності (λ_n), а $n(t,\sigma) = \sum_{<\lambda_n,\sigma> \leqslant t} 1$. Зауважимо, що при $\sigma \in \mathbb{R}^2_+$

$$n_j\left(\frac{t}{\sigma_j}\right) \leqslant n(t,\sigma) \leqslant n_1\left(\frac{t}{\sigma_1}\right) n_2\left(\frac{t}{\sigma_2}\right).$$

Враховуючи, що $\ln(1+x) \leqslant x$ $(x > -1)$, маємо $\frac{1}{n} \geqslant \ln(n+1) - \ln n$, тому

$$\sum_{\lambda_n^{(j)}} \frac{1}{n\lambda_n^{(j)}} \geqslant \int_0^R \frac{d\ln n_j(t)}{t},$$

звідки отримуємо, що для кожного $\sigma \in \mathbb{R}^2_+$

$$\int_0^R \frac{d\ln n(t,\sigma)}{t} \leqslant \int_0^R \frac{d\ln n_1(t/\sigma_1)}{t} + \int_0^R \frac{d\ln n_2(t/\sigma_2)}{t} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1} \int_0^{R/\sigma_1} \frac{d\ln n_1(t)}{t} + \frac{1}{\sigma_2} \int_0^{R/\sigma_2} \frac{d\ln n_2(t)}{t}.$$

Отже, якщо $\varepsilon(t) \searrow 0$ $(t \to +\infty)$ така, що

$$\frac{1}{\ln R}\left(\sum_{0<\lambda_n^{(1)} \leqslant R} \frac{1}{n\lambda_n^{(1)}} + \sum_{0<\lambda_n^{(2)} \leqslant R} \frac{1}{n\lambda_n^{(2)}} \right) < \varepsilon(R),$$

а $\overline{K} \subset \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : 0 < \delta_1 \leqslant \sigma_2/\sigma_1 \leqslant \delta_2 < +\infty\}$, то для всіх $\sigma = e_0$, $|e_0| = 1$, $e_0 \in \overline{K}$ одержуємо

$$\int_0^R \frac{d\ln n(t,e_0)}{t} \leqslant \frac{1}{\delta}\varepsilon\left(\frac{R}{\delta}\right) \ln\frac{R}{\delta},$$

де $\delta = \min\{\overline{\delta}_1, \overline{\delta}_2\}$, $\overline{\delta}_1 = 1/\sqrt{1+\delta_2^2}$, $\overline{\delta}_2 = \delta_1/\sqrt{1+\delta_1^2}$. Звідси випливає, що існує така зростаюча функція $\varphi \in L$, що

$$\ln\max\{n(t,e_0) : e_0 \in \overline{K}, |e_0| = 1\} = o(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{6}$$

$$I_0(R) \equiv \int_0^R \frac{d\varphi(t)}{t} = o(\ln R) \quad (R \to +\infty). \tag{7}$$

Нехай $\psi(t)$ – функція обернена до функції $\varphi(t)$. В [7] доведено, що з (7) випливає

$$I(R) \equiv \int_0^R \frac{dt}{\psi(t)} = o(\ln R) \quad (R \to +\infty). \tag{8}$$

Це доведення наведемо з дозволу автора.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\psi(x) = 1$ $(x \leqslant 0)$. Нехай $G_1 = \{R > 0 : \psi(R) > R\}$, $G_2 = \mathbb{R}_+ \setminus G_1$. Зауважимо, що

$$I(R) = \int^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t},$$

тобто якщо G_1 – обмежена множина, то співвідношення (8) доведено. Отже, вважаємо, що G_1 – необмежена множина, $\varepsilon > 0$ – довільне число, $R \in G_1$, а $\alpha(R,\varepsilon) = \max\{\psi(R - \sqrt{\varepsilon}\ln R), 1/\sqrt{\varepsilon}\}$. Для $R > \sqrt{\varepsilon}$ маємо

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \frac{R - \varphi(\alpha(R,\varepsilon))}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}\ln R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \ln R,$$

а для $R \leqslant \sqrt{\varepsilon}\ln R$

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \frac{R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \frac{\sqrt{\varepsilon}\ln R}{\alpha(R,\varepsilon)} \leqslant \varepsilon \ln R,$$

тобто для всіх $R \in G_1$

$$\int\limits_{\alpha(R,\varepsilon)}^{\psi(R)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \varepsilon \ln R. \tag{9}$$

Позначимо $G_3 = \{R \in G_1 : \alpha(R,\varepsilon) > R\}$. Для $R \in G_3$ одержуємо

$$\begin{aligned} \int^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} &= I_0(R) + \int\limits_{R}^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant \\ &\leqslant I_0(R) + \frac{1}{R}(\varphi(\alpha(R,\varepsilon)) - \varphi(R)) \leqslant I_0(R) + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

а для $G_1 \setminus G_3$

$$\int^{\alpha(R,\varepsilon)} \frac{d\varphi(t)}{t} \leqslant I_0(R).$$

Тому з нерівностей (9) і (10) для всіх $R \in G_1$ отримуємо

$$I(R) \leqslant \varepsilon \ln R + I_0(R) + 1.$$

Залишається зауважити, що для $R \in G_2$, очевидно,

$$I(R) \leqslant I_0(R).$$

З останніх двох нерівностей отримуємо співвідношення (8).

Для фіксованого $e_0 \in \mathbb{R}^2_+$, $|e_0| = 1$ розглянемо функцію $g(t) = \ln \mathfrak{M}(te_0, F)$, $t \in \mathbb{R}$ і випадкову величину $\xi =< \lambda_n, e_0 >$, $n \in \mathbb{Z}^2_+$ з розподілом ймовірностей

$$P\{\xi =< \lambda_n, e_0 >\} = \frac{|a_n| e^{t<\lambda_n, e_0>}}{\mathfrak{M}(\sigma, F)}.$$

Нескладний підрахунок засвідчує, що математичне сподівання $M\xi = g'(t)$, а дисперсія $D\xi = g''(t)$. Позаяк $g''(t) = D\xi \geqslant 0$ для кожного фіксованого e_0 і $t > 0$, то функція $g(t)$ – опукла на $(0, +\infty)$.

Нехай $E(e_0) = \{t : g'(t) \geqslant 0,5\psi(g(t))\}$, де функцію ψ визначено вище, а $E_5 = \bigcup\limits_{|e_0|=1} E(e_0)$. Тоді

$$\iint\limits_{E_5\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)\cap[0,R]} \Theta dt\Bigg)d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)\cap[0,R]} \frac{g'(t)dt}{\psi(g(t))}\Bigg)d\Theta \leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2}\Bigg(\int\limits_0^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)}\Bigg)d\Theta = \pi\int\limits_0^{g(R)} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Залишається пригадати, що $g(R) = O(e^{\rho R})$ $(R \to +\infty)$ для деякого $\rho > 0$ і застосувати співвідношення (8). Отже,

$$\iint\limits_{E_5\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} \leqslant o(\ln g(R)) = o(R) \quad (R \to +\infty),$$

тобто отримали потрібну оцінку величини множини E_5. Для всіх $\sigma \notin E_5$ при $\sigma = te_0$ послідовно одержуємо

$$g'(t) \leqslant \frac{1}{2}\psi(g(t)) = \frac{1}{2}\psi(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)). \tag{11}$$

За нерівністю Маркова $P\{\xi \geqslant a\} \leqslant \dfrac{M\xi}{a}$ $(a > 0)$ при $a = 2M\xi = 2g'(t)$ і $\sigma = te_0$ отримуємо

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{<\lambda_n, e_0> \leqslant a} |a_n| e^{<\sigma,\lambda_n>} + \mathfrak{M}(\sigma, F)P\{\xi > a\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{<\lambda_n, e_0> \leqslant a} |a_n| e^{<\sigma,\lambda_n>} + \frac{1}{2}\mathfrak{M}(\sigma, F).$$

Тому звідси і за нерівністю (11) при $\sigma \notin E_5$ маємо

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leqslant \ln n(2g'(t), e_0) + \ln \mu(\sigma, F) + \ln 2 \leqslant$$
$$\leqslant \ln n(\psi(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)), e_0) + \ln \mu(\sigma, F) + \ln 2.$$

Враховуючи, що (див. [8]) $|\sigma| = o(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F))$ $(|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K)$ за допомогою співвідношення (6) отримуємо при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_5)$

$$\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) + o(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F)).$$

З огляду на нерівності $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ $(\sigma \in \mathbb{R}^2)$, теорему 1 доведено.

За допомогою теореми 2 [2] одержуємо таке твердження.

Теорема 2. *Для кожної послідовності λ такої, що $\ln \|n\| = O(\|\lambda_n\|)$ $(\|n\| \to +\infty)$ і умова (3) не виконується при $j = 1$ або $j = 2$, існують функція $F \in$*

$H_0^2(\lambda)$, стала $h > 0$, множина $E_6 \subset \mathbb{R}_+^2$ такі, що для всіх $\sigma \in E_6$ правильною є нерівність (5) і

$$\varlimsup_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} > 0. \tag{12}$$

Доведення. Для визначеності приймемо, що умова (3) не виконується при $j = 1$. Тоді одночасно $\ln k = O(\lambda_k^{(1)})$ $(k \to +\infty)$ і

$$\varlimsup_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln R} \sum_{0<\lambda_k^{(1)}\leqslant R} \frac{1}{k\lambda_k} > 0.$$

Тому за теоремою 2 [2] існують стала $h > 0$, цілий ряд Діріхле

$$f_1(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{\sigma_1\lambda_k^{(1)}}$$

такий, що

$$0 \leqslant a_k \leqslant e^{-\lambda_k^{(1)}\ln\lambda_k^{(1)}}, \tag{13}$$

та множина $E^{(1)} \subset [0, +\infty)$ така, що $\dfrac{1}{R}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0, R]) \geqslant d > 0$ для деякої послідовності $R = R_j \to +\infty$ і такі, що

$$\ln f_1(\sigma_1) > (1 + 2h)\ln\mu(\sigma_1, f_1) \tag{14}$$

для всіх $\sigma_1 \in E^{(1)}$. Зазначимо, (див. [9]) з умови (13) випливає, що

$$\ln f_1(\sigma_1) \leqslant Ae^{\rho\sigma_1} \quad (\sigma_1 > 0)$$

для деяких $A > 0$ і $\rho > 0$. Виберемо довільний цілий ряд Діріхле з невід'ємними коефіцієнтами $b_k \geqslant 0$ і показниками $\lambda_k^{(2)}$, вимагаючи лише, щоб виконувались нерівності

$$\mu(\sigma_1, f_2) \leqslant \mu(\sigma_1, f_1) \quad (\sigma_1 > 0), \tag{16}$$

$$\ln f_2(\sigma_2) \leqslant Ae^{\rho\sigma_2} \quad (\sigma_2 > 0). \tag{17}$$

Тоді для всіх $\sigma \in E_6 \equiv \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1 \in E^{(1)}, 0 < \sigma_2 \leqslant \sigma_1\}$ для функції $F(\sigma) = f_1(\sigma_1)f_2(\sigma_2)$, послідовно використовуючи нерівність (14), Коші і (16), маємо

$$\begin{aligned} \ln F(\sigma) &\geqslant (1 + 2h)\ln\mu(\sigma_1, f_1) + \ln f_2(\sigma_2) \geqslant \\ &\geqslant (1 + 2h)\ln\mu(\sigma_1, f_1) + \ln\mu(\sigma_2, f_2) \geqslant \\ &\geqslant (1 + h)(\ln\mu(\sigma_1, f_1) + \ln\mu(\sigma_2, f_2)) = (1 + h)\ln\mu(\sigma, F). \end{aligned}$$

Залишається перевірити, що $F \in H_0^2(\lambda)$. Використовуючи нерівності (15) і (16), для всіх $\sigma \in \mathbb{R}_+^2$ і деякого $\rho_1 > 0$ одержуємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant Ae^{\rho\sigma_1} + Ae^{\sigma_2} \leqslant Ae^{\rho_1|\sigma|}.$$

Доведемо, що для множини E_6 виконується (12). Нехай $E^{(1)} = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}(a_k, b_k)$ – об'єднання інтервалів, які не перетинаються. Тоді у випадку, коли $b_m \leqslant R <$

a_{m+1},

$$\iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_k/\cos\Theta}^{b_k/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi}{4}(b_k - a_k) = \frac{\pi}{4}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0,R])$$

та у випадку, коли $R \in (a_{m+1}, b_{m+1})$,

$$\iint\limits_{E_6\cap C_R} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_0^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_k/\cos\Theta}^{b_k/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta + \int\limits_0^{\pi/4} \Bigg(\int\limits_{a_{m+1}/\cos\Theta}^{R/\cos\Theta} dt \Bigg) d\Theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi}{4}\Bigg(\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) + R - a_{m+1}\Bigg) = \frac{\pi}{4}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0,R]).$$

Залишається використати співвідношення $\varlimsup\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{R}\mathrm{meas}(E^{(1)} \cap [0,R]) > 0$. Теорему 2 доведено.

З теорем 1 і 2 одержуємо такий критерій.

Теорема 3. *Для того щоб для кожної функції $F \in H_0^2(\lambda)$ співвідношення (2) виконувалось при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_5$), необхідно і достатньо, щоб при $j = 1$ і $j = 2$ справджувалась умова (3); тут кут K і множина E_5 такі, як і в теоремі 1.*

---

1. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – N 1. – С. 41-47.
2. *Шеремета М.Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42. – N 2. – С. 215-226.
3. *Гречанюк Н.И.* О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41. – N 8. – С. 1047-1053.
4. *Гречанюк Н.И.* Максимум модуля и максимальный член двойного ряда Дирихле: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1989.
5. *Скасків О.Б., Орищин О.Г.* Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле // Матем. студії. – 1997. – Т. 8. – N 1. – С. 43-52.
6. *Скасків О.Б., Тракало О.М.* Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле // Матем. студії. – 2001. – Т. 16. – N 1.
7. *Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле : Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995.

8. *Скаскiв О.Б., Луцишин М.Р.* Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44. – N 9. – С. 1296-1298.

9. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

ABOUT RELATIONS OF BOREL FOR MULTIPLE DIRICHLET SERIES

O. Trakalo

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The relations of Borel type for entire multiple Dirichlet series are obtained.

Key words: Dirichlet series, exceptional set, mathematical expactation.

Стаття надійшла до редколегії 11.04.2001

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.74–83

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.74–83

УДК 517.9

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ТИПУ ІШИМОРІ ЯК РЕДУКЦІЯ НЕКАНОНІЧНОЇ ІЄРАРХІЇ КАДОМЦЕВА-ПЕТВІАШВІЛІ

Юрій БЕРКЕЛА, Юрій СИДОРЕНКО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто нову інтегровну за Лаксом нелінійну динамічну систему. Ця система міститься в неканонічній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі і є (2+1)-вимірним узагальненням (1+1)-вимірної моделі Гейзенберга. Знайдено широкий клас точних розв'язків у вигляді нелінійної суперпозиції лінійних хвиль.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі.

Значну частину відомих сьогодні нелінійних інтегровних за Лаксом диференціальних рівнянь з частинними похідними в просторі розмірності (1+1) і (1+2) отримано як редукцію в скалярній ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (КР) [1,2], яку прийнято називати канонічною. Матричне узагальнення ієрархії КР і нелінійні моделі, пов'язані з нею, розглядали в [3,4], а скалярна неканонічна (модифікована) ієрархія КР в праці [5].

Нелокальні редукції (які узагальнюють добре відомі редукції Гельфанда-Дікого) в інтегровних ієрархіях почали активно вивчати недавно (див. [5],[6],[7], і цитовану там літературу).

Праця побудована так. У першому розділі подано необхідний мінімум інформації про алгебру Лі формальних інтегродиференціальних операторів, а також введено поняття неканонічної матричної ієрархії КР. У головній частині (розділ 2) показано як відоме рівняння Ішиморі (17) [8], яке є просторово-двовимірним узагальненням нелінійного магнетика Гейзенберга, одержано з неканонічної ієрархії КР. Одним з головних результатів праці є нова версія (2+1)-вимірного узагальнення нелінійної моделі Гейзенберга (рівняння (13)), а також процедура його інтегрування (формули (24)-(25)). У третьому розділі обговорено деякі проблеми, пов'язані з дослідженням системи (13) при наявності фізично важливої редукції ермітового спряження.

1. Вихідні положення. Розглянемо над полем $\mathbf{C}$ лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : i, n(L) \in \mathbf{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $N \times N$ -функціями "просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1, t_2, \ldots$.

Матричні коефіцієнти $a_i(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ вважають гладкими функціями векторної змінної $\mathbf{t}$, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{A}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\partial := \frac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot]:\zeta\times\zeta\to\zeta, [L_1,L_2]=L_1L_2-L_2L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1, L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j} f^{(j)}\mathcal{D}^{n-j}, n\in\mathbf{Z}, f\in\mathcal{A}\subset\zeta, f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j}\in\mathcal{A}\subset\zeta, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}^n\mathcal{D}^m := \mathcal{D}^m\mathcal{D}^n := \mathcal{D}^{n+m}, n,m\in\mathbf{Z}.$$

Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n\in\zeta$ і оператора множення на функцію $f\in\mathcal{A}\subset\zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення

$$\mathcal{D}^k(f) := \frac{\partial^k f}{\partial x^k}\in\mathcal{A}, k\in\mathbf{Z}_+.$$

Строго диференціальну та інтегральну частини МДО $S=\sum\limits_{i=-\infty}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i$ визначають так:

$$S=S_{>0}+S_{\leqslant 0}, S_{>0}=\sum_{i=1}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i, S_{\leqslant 0}=\sum_{i=-\infty}^{0} s_i\mathcal{D}^i. \tag{3}$$

Формула (3) індукує розклад алгебри ζ в лінійну суму підалгебр строго диференціальних $\zeta_{>0}$ і інтегральних $\zeta_{\leqslant 0}$ операторів $\zeta=\zeta_{>0}\dot{+}\zeta_{\leqslant 0}$.

Задамо на алгебрі Лі ζ систему попарно комутуючих диференціювань $\{\partial_n\}, n\in\mathbf{N}$; $\partial_n:(\zeta,[\cdot,\cdot])\to(\zeta,[\cdot,\cdot])$

$$\partial_n L=\partial_n\left(\sum_j a_j\mathcal{D}^j\right) := \sum_j\frac{\partial a_j}{\partial t_n}\mathcal{D}^j+L\partial_n\equiv L_{t_n}+L\partial_n,$$

$$[\partial_n,\partial_m]=0,\quad [\mathcal{D}^j,\partial_n]=0,\quad j\in\mathbf{Z}.$$

Розглянемо $B_n^0, B_m^0\in\zeta_{>0}=\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\nu_i\mathcal{D}^i\right\}$, $\hat{B}_n^0:=\alpha_n\partial_{t_n}-B_n^0$, $\hat{B}_m^0:=\alpha_m\partial_{t_m}-B_m^0$, де $\alpha_i\in\mathbf{C}$ такі, що $\left[\hat{B}_n^0,\hat{B}_m^0\right]=\left[\alpha_n\partial_{t_n}-B_n^0,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m^0\right]=0$.

$$W=\sum_{i=0}^{\infty} w_i\mathcal{D}^{-i}$$

– елемент простору $\zeta_{\leqslant 0}$, для якого існує обернений W^{-1}.

Нехай оператор $B_n:=\alpha_n\partial_{t_n}-W\hat{B}_n^0W^{-1}$.

Твердження.

$$1.\quad [\alpha_n\partial_{t_n}-B_n,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m]=0. \tag{4}$$

2. $B_n\subset\zeta_{>0}$ *тоді і тільки тоді, якщо*

$$\alpha_n W_{t_n}=\left(WB_n^0W^{-1}\right)_{>0}W-WB_n^0. \tag{5}$$

Доведення. 1. $[\alpha_n\partial_{t_n}-B_n,\alpha_m\partial_{t_m}-B_m]=\left[W\hat{B}_n^0W^{-1},W\hat{B}_m^0W^{-1}\right]=$

$$=W\hat{B}_n^0\hat{B}_m^0W^{-1}-W\hat{B}_m^0\hat{B}_n^0W^{-1}=W[\hat{B}_n^0,\hat{B}_m^0]W^{-1}=0.$$

2. $B_n \subset \zeta_{>0} \Leftrightarrow (B_n)_{\leqslant 0} = 0.$

$$(B_n)_{\leqslant 0} = (\alpha_n \partial_{t_n} - W\hat{B}_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = (\alpha_n \partial_{t_n} - W(\alpha_n \partial_{t_n} - B_n^0)W^{-1})_{\leqslant 0} =$$
$$(\alpha_n W_{t_n} W^{-1} + W B_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = \alpha_n W_{t_n} W^{-1} + (W B_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = 0 \Rightarrow$$
$$\alpha_n W_{t_n} W^{-1} = -(W B_n^0 W^{-1})_{\leqslant 0} = -W B_n^0 W^{-1} + (W B_n^0 W^{-1})_{>0} \Rightarrow$$
$$\alpha_n W_{t_n} = -W B_n^0 + (W B_n^0 W^{-1})_{>0} W.$$

Наслідок. *Нехай $\alpha_1 = 0$, $L_0 := B_1^0 = C_1 \mathcal{D}$, $B_m^0 = C_m \mathcal{D}^m$, $C_1, C_m \in \mathcal{I}_N$, де $\mathcal{I}_N$ – деяка комутативна підалгебра алгебри $Mat_{N\times N}$, оператор $L := W L_0 W^{-1}$, тоді*

$$\alpha_m L_{t_m} = [B_m, L], \tag{6}$$

а за умови $C_m = (C_1)^m$ оператор L є розв'язком матричної ієрархії типу KP (Кадомцева-Петвіашвілі [1,2])

$$\alpha_m L_{t_m} = [(L^m)_{>0}, L]. \tag{7}$$

Доведення. З (4) одержуємо

$$[B_1, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = 0 \Rightarrow [L, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = 0 \Rightarrow (6),$$
$$B_m = \alpha_m \partial_{t_m} - W\hat{B}_m^0 W^{-1} = \alpha_m \partial_{t_m} - W(\alpha_m \partial_{t_m} - C_m \mathcal{D}^m)W^{-1} =$$
$$= \alpha_m W_{t_m} W^{-1} + W C_m \mathcal{D}^m W^{-1}.$$

Оскільки $B_m \subset \zeta_{>0}$, то $B_m = (W C_m \mathcal{D}^m W^{-1})_{>0}$. При $C_m = (C_1)^m$ маємо $B_m = (L^m)_{>0} \Rightarrow (7)$.

Означення. Нескінченна система рівнянь (7) ($m \in \mathbf{N}$) називається неканонічною матричною ієрархією KP.

Як зазначено раніше, оператори W мають обернені W^{-1}, коефіцієнти яких послідовно знаходимо з означення $WW^{-1} = I$. Безпосередні обчислення дають змогу виписати достатню для наших цілей кількість коефіцієнтів оператора $W^{-1} = w_0^{-1} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \mathcal{D}^{-i}$

$$\omega_1 = -w_0^{-1} w_1 w_0^{-1};$$
$$\omega_2 = -w_0^{-1} w_2 w_0^{-1} + w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1};$$
$$\omega_3 = -2w_0^{-1} w_2 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1} - 2w_0^{-1} w_1 (w_0^{-1} w_{0x})^2 w_0^{-1} - 2w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_{0xx} w_0^{-1} -$$
$$-w_0^{-1} w_3 w_0^{-1} + w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} + (w_1 w_0^{-1})^2 w_{0x} w_0^{-1} - w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_{1x} w_0^{-1}$$
$$+w_0^{-1} w_2 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} + w_0^{-1} (w_1 w_0^{-1})^2 w_{0x} w_0^{-1} + w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_2 w_0^{-1} - w_0^{-1} (w_1 w_0^{-1})^3.$$

2. Головна частина. Розглядатимемо введений простір ζ мікродиференціальних операторів, де коефіцієнти є матричними функціями розмірності 2×2 "просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1 = y, t_2 = t$.

Приклад 1. Візьмемо $B_1^0 = \sigma_3 \mathcal{D}$, $B_2^0 = (B_1^0)^2 = \mathcal{D}^2, \ldots, B_n^0 = (B_1^0)^n$, $L = W B_1^0 W^{-1}$.

$$(W \sigma_3 \mathcal{D} W^{-1})_{>0} = w_0 \sigma_3 w_0^{-1} \mathcal{D},$$
$$(W \mathcal{D}^2 W^{-1})_{>0} = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x} w_0^{-1} \mathcal{D},$$

де σ_3 – третя матриця Паулі $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Нехай $L = S\mathcal{D} + u_0 + u_1\mathcal{D}^{-1} + \ldots$. Тоді існує такий зв'язок між коефіцієнтами операторів W та L:

$$S = w_0\sigma_3 w_0^{-1},$$

$$u_0 = -w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1} - w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} + w_1\sigma_3 w_0^{-1},$$

звідки випливає, що $S^2 = 1$.

З (7), враховуючи те, що $L_{>0} = S\mathcal{D}$, $L^2_{>0} = \mathcal{D}^2 + (SS_x + u_0 S + S u_0)\mathcal{D}$ одержуємо такі рекурентні рівняння на S та u_i:

$$\alpha_1 S_y = [S, u_0]. \tag{8}$$

$$\alpha_1 u_{iy} = S u_{ix} + S u_{i+1} - \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_{j+1} S^{(i-j)},$$

$$\alpha_2 S_t = S[S, u_{0x}] + [S, u_0^2] = [S, S u_{0x} + u_0^2], \tag{9}$$

$$\alpha_2 u_{it} = u_{ixx} + 2u_{i+1,x} + (SS_x + u_0 S + S u_0)(u_{ix} + u_{i+1}) -$$

$$- \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_i^j u_{j+1} (SS_x + u_0 S + S u_0)^{(i-j)}, \quad i \in \mathbf{Z}_+.$$

Зокрема,

$$\alpha_1 u_{0y} = S u_{0x} + S u_1 - u_1 S = S u_{0x} + [S, u_1], \tag{10}$$

$$\alpha_1 u_{1y} = S u_{1x} + S u_2 + u_1 S_x - u_2 S = S u_{1x} + u_1 S_x + [S, u_2],$$

$$\alpha_2 u_{0t} = u_{0xx} + 2u_{1x} + (SS_x + u_0 S + S u_0) u_{0x} + [SS_x + u_0 S + S u_0, u_1].$$

Для функцій S та u_0 з (8), (9) одержимо замкнену систему

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = [S, S u_{0x} + u_0^2], \\ \alpha_1 S_y = [S, u_0]. \end{cases} \tag{11}$$

Враховуючи, що $S^2 = 1$, друге рівняння системи (11) можна розв'язати

$$u_0 = c_1 + c_2 S + \frac{\alpha_1}{2} S S_y,$$

де c_1, c_2 – деякі скалярні функції. Підставивши цей вираз у перше рівняння системи (11) і використовуючи співвідношення

$$\alpha_1 (u_{0y} S + S u_{0y}) = S u_{0x} S + u_{0x},$$

яке є наслідком формули (10), отримаємо

$$\alpha_2 S_t = \frac{\alpha_1}{2}[S, S_{xy}] + 2\alpha_1 c_1 S_y + 2c_2 S_x,$$

$$(\alpha_1 c_{2y} - c_{1x}) I + (\alpha_1 c_{1y} - c_{2x}) S = \frac{\alpha_1}{4}[S_x, S_y]. \tag{12}$$

З (12) випливає, що $\alpha_1 c_{2y} = c_{1x}$. Беручи $c_1 = \alpha_1 \varphi_y$, $c_2 = \varphi_x$, де φ - деяка скалярна функція, одержуємо

$$u_0 = \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \varphi_x S + \alpha_1 \varphi_y.$$

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = \dfrac{\alpha_1}{2}[S, S_{xy}] + 2\alpha_1^2\varphi_y S_y + 2\varphi_x S_x, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2\varphi_{yy} = \dfrac{\alpha_1}{4} S[S_y, S_x]. \end{cases} \tag{13}$$

Зображення Захарова–Шабата для цієї системи має вигляд

$$\left[\alpha_1\partial_y - S\mathcal{D}, \alpha_2\partial_t - \mathcal{D}^2 - (SS_x + 2\alpha_1\varphi_y S + 2\varphi_x)\mathcal{D}\right] = 0.$$

Приклад 2. Візьмемо $B_1^0 = \sigma_3\mathcal{D}$, $B_2^0 = \sigma_3\mathcal{D}^2$. Тоді

$$(W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1})_{>0} = w_0\sigma_3 w_0^{-1}\mathcal{D},$$
$$(W\sigma_3\mathcal{D}^2W^{-1})_{>0} = w_0\sigma_3 w_0^{-1}\mathcal{D}^2 + (w_1\sigma_3 w_0^{-1} -$$
$$-w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})\mathcal{D}.$$

З (5) одержимо такі рекурентні рівняння на коефіцієнти оператора W:

$$\alpha_1 w_{iy} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{ix} + w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{i+1} - w_{i+1}\sigma_3, \tag{14}$$

$$\alpha_2 w_{it} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{i,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0\sigma_3 w_0^{-1}] - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{ix} + w_{i+1}) +$$
$$+2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{i+1,x} + w_0[\sigma_3, w_0^{-1} w_{i+2}], \quad i \in \mathbf{Z}_+. \tag{15}$$

Декілька перших рівнянь з системи (14)–(15) мають вигляд

$$\alpha_1 w_{0y} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} + w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 - w_1\sigma_3,$$
$$\alpha_1 w_{1y} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{1x} + w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_2 - w_2\sigma_3,$$
$$\alpha_2 w_{0t} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0\sigma_3 w_0^{-1}] - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{0x} + w_1) +$$
$$+2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{1,x} + w_0[\sigma_3, w_0^{-1} w_2],$$
$$\alpha_2 w_{1t} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{1,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0\sigma_3 w_0^{-1}] - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{1x} + w_2) +$$
$$+2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{2,x} + w_0[\sigma_3, w_0^{-1} w_3].$$

Одержимо замкнену систему на w_0 та w_1

$$\begin{cases} \alpha_2 w_{0t} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0,xx} + ([w_1 w_0^{-1}, w_0\sigma_3 w_0^{-1}] - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1})(w_{0x} + w_1) + \\ +w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{1,x} + \alpha_1 w_{1y}, \\ \alpha_1 w_{0y} = w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} + w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 - w_1\sigma_3, \end{cases}$$

яка зводиться до системи

$$\begin{cases} \alpha_2 S_t = SS_{xx} + RS_x - SR_x + \alpha_1 R_y, \\ \alpha_1 S_y = [S, R] - SS_x, \end{cases} \tag{16}$$

де $R = w_1\sigma_3 w_0^{-1} - w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1}$, а $S := w_0\sigma_3 w_0^{-1}$.

Аналогічно до попереднього прикладу, друге рівняння системи (16) дає змогу виключити функцію R

$$R = \frac{1}{2}S_x + \frac{\alpha_1}{2}SS_y + c_1 S + c_2,$$

де c_1, c_2 - деякі скалярні функції. Підставляючи R у перше рівняння системи (16), воно набуває вигляду

$$\alpha_2 S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx} + \alpha_1^2 S_{yy}] + c_2 S_x + \alpha_1 c_1 S_y - c_{1x} + \alpha_1 c_{2y} + \frac{\alpha_1}{2}S[S_y, S_x] + \alpha_1 c_{1y} S - c_{2x} S.$$

Враховуючи співвідношення $\operatorname{tr} S = 0$, одержуємо

$$\alpha_1 c_{2y} - c_{1x} = -\frac{\alpha_1}{2} S[S_y, S_x],$$

$$\alpha_1 c_{1y} - c_{2x} = 0,$$

звідки випливає, що $\alpha_1 c_{1y} = c_{2x}$. Приймемо, що $c_1 = \frac{\varphi_x}{\alpha_1}, c_2 = \varphi_y$, де φ – скалярна функція. В результаті одержимо

$$R = \frac{1}{2} S_x + \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \frac{1}{\alpha_1} \varphi_x S + \varphi_y,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx} + \alpha_1^2 S_{yy}] + \varphi_y S_x + \varphi_x S_y, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2 \varphi_{yy} = \frac{\alpha_1^2}{2} S[S_y, S_x]. \end{array} \right. \tag{17}$$

Ця модель відома як система Ішиморі (2d-магнетик Гейзенберга)[8].

Зображення Захарова-Шабата для цієї системи має вигляд

$$\left[\alpha_1 \partial_y - S\mathcal{D}, \alpha_2 \partial_t - S\mathcal{D}^2 - (\frac{1}{2} S_x + \frac{\alpha_1}{2} S S_y + \frac{1}{\alpha_1} \varphi_x S + \varphi_y) \mathcal{D} \right] = 0.$$

Система (17) є інтегровною класичною моделлю, яка описує нелінійну спінову систему на площині (x, y).

В одновимірному випадку модель Гейзенберга є калібрувально-еквівалентною до нелінійного рівняння Шредінгера [9],[10]. Подібна калібрувальна еквівалентність є також у (1+2)-вимірному випадку.

Розглянемо оператори

$$L_{DS} = \alpha_1 \partial_y - \sigma_3 \mathcal{D} - U,$$

$$M_{DS} = \alpha_2 \partial_t - \mathcal{D}^2 - V,$$

де U, V – деякі матричні функції.

При $U = [\sigma_3, \omega]$, $V = 2\omega_x$ одержуємо зображення Захарова-Шабата $[L_{DS}, M_{DS}] = 0$ системи

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 P_t = \alpha_1 \sigma_3 P_{xy} + 2[D_x, P], \\ D_x - \alpha_1 \sigma_3 D_y = -2P^2. \end{array} \right. \tag{18}$$

де

$$\omega = P + D = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \operatorname{off}(q, r) + \operatorname{diag}(d_1, d_2). \tag{19}$$

Система (18) при редукції $r = \mu \bar{q}, \mu \in \mathbf{R}$ зводиться до нелінійної моделі Деві-Стюартсона (DS) [11] вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 q_t = \alpha_1 q_{xy} + 2\hat{S} q, \\ \hat{S}_{xx} - \alpha_1^2 \hat{S}_{yy} + 4\alpha_1 \mu |q|^2_{xy} = 0, \end{array} \right.$$

де $\hat{S} \equiv (d_1 - d_2)_x$.

Проведемо калібрувальне перетворення такого вигляду:

$$\Phi^{-1} L_{DS} \Phi = \hat{L}, \quad \Phi^{-1} M_{DS} \Phi = \hat{M},$$

де Φ – матрична 2×2-функція і $L_{DS}(\Phi) = 0$, $M_{DS}(\Phi) = 0$. Одержана пара операторів утворює зображення Захарова – Шабата $[\hat{L}, \hat{M}] = [\alpha_1 \partial_y - \Phi^{-1}\sigma_3 \Phi \mathcal{D}, \alpha_2 \partial_t - \mathcal{D}^2 - 2\Phi^{-1}\Phi_x \mathcal{D}] = 0$ для системи (13), за умов

$$S = \Phi^{-1}\sigma_3 \Phi \tag{20}$$

та

$$\alpha_1 \varphi_y + \varphi_x \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_3 \Phi_x \Phi^{-1} + \Phi_x \Phi^{-1}\sigma_3). \tag{21}$$

Зі співвідношення (20) випливає, що $\Phi = \pm w_0^{-1}$.

Шляхом елементарних перетворень з рівняння (21) можна виразити функцію φ

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln|\det \Phi| = \frac{1}{2}\ln|\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}\Phi_{21}|. \tag{22}$$

Для знаходження точних розв'язків нелінійної спінової моделі (13) скористаємося теоремою.

Теорема. *Нехай* $\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}_1(\alpha_1 x + y, t)$, $\vec{\varphi}_2 = \vec{\varphi}_2(\alpha_1 x - y, t)$ *– векторні розв'язки системи*

$$\begin{cases} \alpha_2 \vec{\varphi}_{1t} = \vec{\varphi}_{1xx}, \\ \alpha_2 \vec{\varphi}_{2t} = \vec{\varphi}_{2xx}, \end{cases} \tag{23}$$

$$\Omega = C + \mu \int_x^{+\infty} \bar{\vec{\varphi}}_1^T \otimes \vec{\varphi}_1 \, d\tau + \int_x^{+\infty} \bar{\vec{\varphi}}_2^T \otimes \vec{\varphi}_2 \, d\tau,$$

$\Omega, C \in \mathrm{Mat}_{2n,2n}(\mathbf{C})$, $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{2n}}), i = 1, 2$; *тоді компоненти матриці* Φ *мають такий вигляд:*

$$\Phi_{ij} = (-1)^j \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{(j)} \\ \vec{\varphi}_i \end{vmatrix}}{|\Omega|},$$

де $\Omega_{(j)} \in \mathrm{Mat}_{2n-1,2n}(\mathbf{C})$ *одержують з* Ω *викресленням* (j)*-стрічки*, $j = \overline{1, 2n}$.

Доведення цієї теореми міститься в [12].

Використовуючи (20) і (22), розв'язки системи (13) набувають вигляду

$$S = \Phi^{-1}\sigma_3\Phi = \frac{1}{\begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix} & -2\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix} \\ 2\begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix} & -\left(\begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\right) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left|\begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Omega_{(1)} \\ \vec{\varphi}_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \Omega_{(2)} \\ \vec{\varphi}_2 \end{vmatrix}\right| - \ln|\det \Omega|. \tag{25}$$

Отже, розв'язки нелінійної моделі (13) одержують в явному вигляді як нелінійну суперпозицію розв'язків лінійної системи (23), тобто параметризують 4n-функціональними параметрами $\varphi_{ij}, i = 1, 2; j = \overline{1, 2n}$ і ермітовою матрицею $C = C^*$.

Розглянемо деякі з них, які відповідають найпростішій параметризації.

1. Візьмемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\mu = 1$, $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ і $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}), i = 1,2$ – вектори розмірності 2, компоненти яких мають вигляд

$$\varphi_{11} = e^{\lambda_1(x+y) - i\lambda_1^2 t + \gamma_1}, \varphi_{12} = 0,$$
$$\varphi_{21} = 0, \varphi_{22} = e^{\lambda_2(x-y) - i\lambda_2^2 t + \gamma_2},$$

де $\lambda_i \in \mathbf{C}, i = 1,2$. Позначимо

$$\lambda_i^+ = \mathrm{Re}\lambda_i; \lambda_i^- = \mathrm{Im}\lambda_i; \gamma_i^+ = \mathrm{Re}\gamma_i; \qquad i = 1,2.$$

Для збіжності інтегралів у формулі (23) приймемо $\lambda_i^+ < 0$, $i = 1,2$.

Компоненти матриці Ω матимуть такий вигляд:

$$\Omega_{11} = -\frac{1}{2\lambda_1^+} e^{2\lambda_1^+(x+y) + 4\lambda_1^+\lambda_1^- t + 2\gamma_1^+}, \quad \Omega_{12} = i,$$
$$\Omega_{21} = -i, \quad \Omega_{22} = -\frac{1}{2\lambda_2^+} e^{2\lambda_2^+(x-y) + 4\lambda_2^+\lambda_2^- t + 2\gamma_2^+}.$$

Якщо матрицю S подати у вигляді

$$S = \begin{pmatrix} U_3 & U_1 \\ U_2 & -U_3 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

то з формули (24) випливає явний вигляд компонент U_i, i=1,2,3

$$U_1 = \frac{4\lambda_2^+ e^{2(\lambda_1^+ x + \lambda_1^+ y + \lambda_1^+\lambda_1^- t + \gamma_1^+)}}{e^{2((\lambda_1^+ + \lambda_2^+)x + (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)y + (\lambda_1^+\lambda_1^- + \lambda_2^+\lambda_2^-)t + \gamma_1^+ + \gamma_2^+)} - 4\lambda_1^+\lambda_2^+},$$

$$U_2 = \frac{4\lambda_1^+ e^{2(\lambda_2^+ x - \lambda_2^+ y + \lambda_2^+\lambda_2^- t + \gamma_2^+)}}{4\lambda_1^+\lambda_2^+ - e^{2((\lambda_1^+ + \lambda_2^+)x + (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)y + (\lambda_1^+\lambda_1^- + \lambda_2^+\lambda_2^-)t + \gamma_1^+ + \gamma_2^+)}},$$

$$U_3 = \frac{e^{2((\lambda_1^+ + \lambda_2^+)x + (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)y + (\lambda_1^+\lambda_1^- + \lambda_2^+\lambda_2^-)t + \gamma_1^+ + \gamma_2^+)} + 4\lambda_1^+\lambda_2^+}{e^{2((\lambda_1^+ + \lambda_2^+)x + (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)y + (\lambda_1^+\lambda_1^- + \lambda_2^+\lambda_2^-)t + \gamma_1^+ + \gamma_2^+)} - 4\lambda_1^+\lambda_2^+}.$$

Зокрема, при $\lambda_i^+ = -1, \lambda_i^- = 1, \gamma_i^+ = 0, i = 1,2$

$$U_1 = \frac{-4ie^{-2x-2y-t}}{e^{-4x-2t} - 4}, \qquad U_2 = \frac{-4ie^{-2x+2y-t}}{e^{-4x-2t} - 4}, \qquad U_3 = \frac{e^{-4x-2t} + 4}{e^{-4x-2t} - 4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{4e^{-2(1-i)x-4t}}{e^{-4x-2t} - 4}.$$

2. Візьмемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\mu = 1$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\vec{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}), i = 1,2$ – вектори розмірності 2, компоненти яких мають вигляд

$$\varphi_{11} = 0, \varphi_{12} = e^{\lambda_1(x+y) - i\lambda_1^2 t + \gamma_1},$$
$$\varphi_{21} = e^{\lambda_2(x-y) - i\lambda_2^2 t + \gamma_2}, \varphi_{22} = 0,$$

де $\lambda_i \in \mathbf{C}, i = 1,2$. Нехай $\lambda_j = -1 + i, \gamma_j^+ = 0, j = 1,2$. Аналогічно до попереднього випадку знаходимо компоненти матриці S з (26)

$$U_1 = \frac{-4e^{-2x-2y-t}}{e^{-4x-2t} - 4}, \qquad U_2 = \frac{4e^{-2x+2y-t}}{e^{-4x-2t} - 4}, \qquad U_3 = \frac{e^{-4x-2t} + 4}{e^{-4x-2t} - 4},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{4e^{-2(1-i)x-4t}}{e^{-4x-2t} - 4}.$$

3. Завершальні зауваження. Одержана інтегровна система (13) допускає два суттєво відмінних випадки. За аналогією з моделями Деві-Стюартсона (DS) їх можна назвати моделями типу Ішиморі - I (випадок $\alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_2 \in \mathbf{iR}$) і Ішиморі - II (випадок $\alpha_1 \in \mathbf{iR}, \alpha_2 \in \mathbf{R}$). Обидві моделі калібрувально еквівалентні до систем DS-I і DS-II відповідно. Ми розглядали перший випадок. Для отримання розв'язків другої моделі можна використати результати праць [11], [13] з інтегрування системи DS-II.

Особливе зацікавлення система (13) представляє при додатковій редукції ермітового спряження $S^* = S^{-1} = S$ (редукція $S^2 = I = \mathrm{diag}(1,1)$ очевидно задовольняється). Обидві системи (13) і (17) є (2+1)-вимірними узагальненнями (1+1) - вимірної класичної моделі феромагнетика Гейзенберга (ізотропного рівняння Ландау – Ліфшиця). Функція $S(x, y, t)$ в цьому випадку приймає значення в алгебрі Лі su(2) і може бути зображена у вигляді $S = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 + S_3\sigma_3$, де σ_i - стандартні матриці Паулі, $i = 1, 2, 3$.

У термінах магнітного вектора $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ система (13) набуває вигляду

$$\begin{cases} \alpha_2 \vec{S}_t = \frac{\alpha_1}{2} \vec{S} \times \vec{S}_{xy} + 2\alpha_1^2 \varphi_y \vec{S}_y + 2\varphi_x \vec{S}_x, \\ \varphi_{xx} - \alpha_1^2 \varphi_{yy} = \frac{\alpha_1}{4} \vec{S}(\vec{S}_y \times \vec{S}_x), \end{cases} \tag{27}$$

де "$\times$" є зовнішнім (векторним) добутком. Одержані в праці розв'язки (24), (25) не задовольняють системі (27) автоматично. Дослідження моделі (27) буде проведено окремо.

1. *Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T.* An elementary introduction to Sato theory// Progress Theoret. Phys. Suppl. – 1988. – Vol. 94. – P.210-241.
2. *Dickey L.A.* Soliton equations and Hamiltonian systems// Adv. Ser. in Math. Phys. – 1991. – N 12. – 310 p.
3. *Strampp W., Kundu A.* Derivative and higher order extension of Davey-Stewartson equation from matrix KP hierarchy// J. Math. Phys. – 1995. – Vol. 36. – P.4192-4200.
4. *Сидоренко Ю.М.* Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі і нелінійні інтегровні системи// Нелінійні коливання. – 1999. – Вип. 2. – N 2. – С.30-39.
5. *Oewel W., Strampp W.* Constrained KP-hierarchy and bi-hamiltonian structures// Commun. Math. Phys. – 1993. – Vol. 157. - P.51-68.
6. *Sidorenko J.M., Strampp W.* Multicomponent integrable reductions in the KP-hierarchy// J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34. – P.1429-1444.
7. *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями. Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 1. – С.78-97.
8. *Ishimori Y.* Multi-vortex solutions of a two-dimentional nonlinear wave equation// Progr. Theor. Rhys. – 1983. – Vol. 72. – N 1. - C.33-39.

9. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А.* Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга// Теор. и мат. физика – 1979. – Т. 38. – N 1. – С.26-35.

10. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М., 1986.

11. *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса та інтегровні редукції в системі Деві-Стюартсона // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – N 2. – С.252-264.

12. *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53. – N 5.

13. *Беркела Ю.Ю.* Матричні аналоги нелінійних рівнянь Бюргерса// Укр. фіз. журн. – 1998. – Т. 43. – N 7. – С.776-780.

NONLINEAR MODEL ISHIMORI'S TYPE AS REDUCTION OF THE NONCANONICAL HIERARCHY OF KADOMTSEV-PETVIASHVILI

Yu. Berkela, Yu. Sidorenko

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

New integrable by Lax nonlinear dynamical system is proposed. This system contains in the noncanonical hierarchy of Kadomtsev-Petviashvili and it is (2+1)-dimensional generalization of the (1+1)-dimensional Heisenberg model. Wide class of exact solutions in form of a nonlinear superposition of linear waves is obtained.

Key words: nonlinear dynamical system, hierarchy of Kadomtsev-Petviashvili.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2000
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.84-101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.84-101

УДК 517.95

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В АНІЗОТРОПНИХ ПРОСТОРАХ

Микола БОКАЛО, Василь ДМИТРІВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Встановлено коректність початково-граничної задачі і задачі Фур'є для інтегро-диференціальних рівнянь, диференціальна частина яких є квазілінійним параболічним оператором з різними степенями нелінійностей за різними похідними. У випадку задачі Фур'є не накладається ніяких умов на поведінку розв'язку і зростання початкових умов при $t \to -\infty$.

У природі є багато процесів, для опису яких теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних недостатньо. Все більше дослідників цікавиться інтегро-диференціальними рівняннями [1-4]. В працях [3,4] розглянуто першу крайову задачу для таких рівнянь, диференціальна частина яких є параболічним диференціальним оператором. У наведеній праці доведено коректність початково-граничної задачі та задачі Фур'є (задача без початкових умов (див. [5-7])) для інтегро-диференціальних рівнянь, диференціальна частина яких є квазілінійним параболічним оператором. Узагальнені розв'язки цих задач розглядають в анізотропних просторах Соболєва. Для доведення коректності задачі Фур'є не вимагається обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язку на нескінченності. Результати цієї роботи є узагальненням праць [6,7] на випадок інтегро-диференціальних рівнянь.

1. Коректність початково-граничної задачі

Нехай $Q_0 = \Omega \times (0,T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Розглядається задача

$$u_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) + \int\limits_\Omega K(x,y,t)u(y,t)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \qquad (x,t) \in \quad Q_0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Sigma = 0 \qquad (j = 0,1,...,m-1), \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Тут і далі m – довільне фіксоване натуральне число, α, β, γ – мультиіндекси довжиною n, $\delta u = (D^\beta u; |\alpha| \leqslant m)$ – вектор, який містить всі можливі похідні

$D^\beta u = \frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\dots\partial x_n^{\beta_n}}$, порядок $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n$ яких менший або дорівнює m. Нехай N – розмірність вектора δu.

Припустимо, що виконуються умови

(A1) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ визначені для майже всіх $(x,t) \in Q_0$ та всіх векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$ з координатами ξ_β $(|\beta| \leqslant m)$ і є каратеодорівськими; $a_\alpha(x,t,0) = 0$ $(|\alpha| \leqslant m)$;

(A2) існують числа $p_\gamma > 1$ $(|\gamma| \leqslant m)$ такі, що для всіх α $(|\alpha| \leqslant m)$, майже всіх $(x,t) \in Q_0$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ правильні нерівності

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\leqslant m} |\xi_\beta|^{p_\beta/p'_\alpha} + k_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_\infty(\overline{Q_0})$, $k_\alpha \in L_{p'_\alpha}(\overline{Q_0})$, $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p'_\alpha} = 1$;

(A3) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q_0$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0;$$

(A4) $K \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times (0,T))$;

(A5) $f_\alpha \in L_{p'_\alpha}(Q_0)$ $(|\alpha| \leqslant m)$;

(A6) $u_0 \in L_2(\Omega)$.

Нехай $\overrightarrow{p} = (p_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ – N-вимірний вектор з координатами p_α $(|\alpha| \leqslant m)$. Під $\overset{o}{W}{}^m_{\overrightarrow{p}}(\Omega)$ розумітимемо простір, який є замиканням простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $||v|| = \left(\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha v||^2_{L^{p_\alpha}(\Omega)}\right)^{1/2}$, а $W^{-m}_{\overrightarrow{p}'}(\Omega)$ – спряжений до $\overset{o}{W}{}^m_{\overrightarrow{p}}(\Omega)$ простір.

Додатково будемо припускати, що

(A7) існує неперервне вкладення $\overset{o}{W}{}^m_{\overrightarrow{p}}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Зауважимо, що для виконання припущення **(A7)** достатньо, щоб справджувалась нерівність $p_\gamma \geqslant 2$ хоча б для одного мультиіндекса γ (див. лему 1 праці [7]).

Означення 1.1. *Узагальненим розв'язком задачі* (1.1) – (1.3) *назвемо функцію* $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\overrightarrow{p}}(Q_0) \cap C([0,T]; L_2(\Omega))$, *яка задовольняє умову (1.3) та інтегральну рівність*

$$\iint_{Q_0} \left\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi + \left(\int_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi \right\} dx\, dt =$$

$$= \iint_{Q_0} \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi\, dx dt \qquad (1.4)$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$.

Позначимо через $\overrightarrow{K} = (K_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ N–вимірний вектор з невід'ємними компонентами K_α $(|\alpha \leqslant m)$. Скажемо, що $\overrightarrow{K}$ задовольняє умову повноти, якщо існує (залежна від $n, m, \vec{p}, \vec{K}, \Omega$) неперервна неспадна функція $G_{\vec{K}} : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ така, що $G(0) = 0$ і для будь-якого елемента v простору $\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega \times (0;1))$

$$||v||_{\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega\times(0;1))} \leqslant G_{\vec{K}}(B),$$

де $B = \iint\limits_{\Omega\times(0;1)} \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha v|^{p_\alpha}\, dxdt.$

Зауважимо, коли $K_\alpha > 0$ для всіх $\alpha\,(|\alpha| \leqslant m)$, то (очевидно) вектор $\vec{K} = (K_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ задовольняє умову повноти. Коли $p_\alpha = 2\,(0 < |\alpha| \leqslant m)$, $p_0 \geqslant 2$, то вектор $\vec{K}$ задовольняє умову повноти, якщо тільки $K_\alpha > 0$ при $|\alpha| = m$ і $|\alpha| = 0$. Це випливає з відповідних інтерполяційних нерівностей.

Теорема 1.1. *Припустимо, що для довільних $\xi \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q_0$ виконується нерівність*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\xi)\xi_\alpha \geqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha},$$

де K_α ($|\alpha| \leqslant m$) - невід'ємні сталі такі, що вектор $\vec{K} = (K_\alpha;\ |\alpha| \leqslant m)$ задовольняє умову повноти. Додатково припустимо, що $f_\alpha = 0$, коли $K_\alpha = 0\,(|\alpha| \leqslant m)$.

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1.1)-(1.3).

Доведення. Спочатку покажемо існування розв'язку. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Нехай система $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ функцій $w_i \in C_0^\infty(\Omega)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ є лінійно незалежною і повною в $\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(\Omega)$. Оскільки $u_0 \in L_2(\Omega)$ і правильне припущення **(A7)**, то існує послідовність $\{u_0^k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів вигляду $u_0^k = \sum\limits_{i=1}^{k} \overset{o}{c}{}_i^k w_i$ $(k \in \mathbb{N})$ таких, що $u_0^k \to u_0$ в $L_2(\Omega)$ ($\overset{o}{c}{}_i^k = \mathrm{const}\ \forall i, k$).

Для кожного натурального k шукаємо гальоркінське наближення u^k у вигляді

$$u^k(x,t) = \sum_{i=1}^{k} c_i^k(t) w_i(x), \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{1.5}$$

де $c_1^k(t), c_2^k(t), \ldots, c_k^k(t)$ - абсолютно неперервні на $[0,T]$ функції такі, що u^k є розв'язком системи рівнянь

$$\int\limits_\Omega \left\{ u_t^k w_l + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k) D^\alpha w_l + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u^k(y,t)\, dy \right) w_l - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha w_l \right\} dx = 0 \qquad (l = 1, \ldots, k;\ t \in [0,T]) \tag{1.6}$$

та задовольняє умову

$$u^k(x,0) = u_0^k(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Знаходження u^k зводиться до відшукання набору абсолютно неперервних на $[0,T]$ функцій $c_1^k(t), c_2^k(t), \ldots, c_k^k(t)$, які є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\int\limits_{\Omega} w_l w_i\,dx\right)(c_i^k)' + \int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta(\sum_{i=1}^{k} c_i^k w_i))D^\alpha w_l - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha w_l\right\}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\sum_{i=1}^{k} c_i^k w_i(y)\,dy\right)w_l(x)\;dx = 0 \quad (l=1,...,k;\; t\in[0,T]) \tag{1.8}$$

з початковими умовами

$$c_i^k(0) = \overset{o}{c}{}_i^k \quad (i=1,...,k). \tag{1.9}$$

Покажемо, що задача Коші (1.8),(1.9) має потрібний нам розв'язок. Оскільки матриця $\big(\int\limits_{\Omega} w_l w_i\,dx\big)_{l,i=1}^{k}$ невироджена і виконуються умови (**A1**)-(**A5**), то з відомих результатів (див., наприклад, теорему Каратеодорі на с. 54 праці [9]) випливає, що задача (1.8), (1.9) має єдиний непродовжуваний розв'язок $c_1^k(t), c_2^k(t), \ldots, c_k^k(t)$, який визначений на деякому проміжку $[0,t_1)$ $(t_1 \in (0,T])$ або на $[0,T]$. Доведемо, що цей розв'язок визначений на $[0,T]$, і знайдемо потрібні оцінки.

Домножимо перше рівняння системи (1.8) на $c_1^k(t)e^{-\lambda t}$, друге – на $c_2^k(t)e^{-\lambda t}$ і т.д., де λ – стала, значення якої визначимо пізніше. Підсумуємо одержані рівності та проінтегруємо за t від 0 до τ. В результаті отримаємо

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_t^k u^k e^{-\lambda t}\,dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\right)u^k - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt = 0. \tag{1.10}$$

Перший член лівої частини рівності (1.10) перетворимо, врахувавши (1.7), отже,

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_t^k u^k e^{-\lambda t}\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega([u^k]^2)_t e^{-\lambda t}\,dxdt =$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int\limits_\Omega[u^k(x,\tau)]^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega[u_0^k(x)]^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega[u^k]^2 e^{-\lambda t}\,dxdt. \tag{1.11}$$

Тоді з (1.10), враховуючи (1.11) та умови (**A1**)-(**A5**), одержимо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Bigg\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}K_\alpha|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}+$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k\Bigg\}e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[u_0^k(x)]^2\,dx. \tag{1.12}$$

На підставі нерівності Юнга $ab\leqslant\varepsilon a^p+M(\varepsilon,p)b^{p'}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ \varepsilon>0,\ p>1,$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, M(\varepsilon,p)=\varepsilon^{-1/(p-1)}p^{-p'}(p-1))$ для кожного $\alpha\,(|\alpha|\leqslant m)$ такого, що $K_\alpha\neq 0$, матимемо

$$\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant\varepsilon_\alpha\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+M(\varepsilon_\alpha,p_\alpha)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|f_\alpha|^{p'_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt, \tag{1.13}$$

де $\varepsilon_\alpha>0$ – довільне число.

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\left|\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega}K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k(x,t)e^{-\lambda t}\,dxdt\right|\leqslant \tag{1.14}$$

$$\leqslant\hat{K}\int\limits_0^{\tau}\Big(\int\limits_{\Omega}|u^k(x,t)|\,dx\cdot\int\limits_{\Omega}|u^k(y,t)|\,dy\Big)e^{-\lambda t}\,dt\leqslant\hat{K}|\Omega|\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt,$$

де $\hat{K}=\operatorname*{ess\,sup}\limits_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(0,T)}|K(x,y,t)|$.

Взявши $\varepsilon_\alpha=\frac{1}{2}K_\alpha$ для кожного α такого, що $K_\alpha\neq 0$ $(|\alpha|\leqslant m)$, з (1.12)-(1.14) отримаємо

$$e^{-\lambda\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx+\lambda\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}K_\alpha|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_1\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|f_\alpha|^{p'_\alpha}e^{-\lambda t}\,dxdt+2\hat{K}|\Omega|\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+\int\limits_{\Omega}[u_0^k(x)]^2\,dx. \tag{1.15}$$

З (1.15), взявши $\lambda=2\hat{K}|\Omega|$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx\leqslant C_2, \tag{1.16}$$

де $C_2>0$ – стала, яка від τ і k не залежить.

Оскільки матриця $(\int\limits_{\Omega} w_i w_j\,dx)_{i,j=1}^{k}$ – додатно визначена, то

$$\int\limits_{\Omega}[u^k(x,\tau)]^2\,dx = \sum_{i,j=1}^{k}\left(\int\limits_{\Omega} w_i w_j\,dx\right) c_i^k(\tau)c_j^k(\tau) \geqslant R_k \sum_{i=1}^{k}|c_i^k(\tau)|^2,$$

де $R_k > 0$ – стала, яка від τ не залежить. Звідси та з (1.16) випливає, що функції c_i^k $(i = 1,\dots,k)$ визначені на відрізку $[0,T]$. Тоді з (1.15) (взявши $\lambda = 2\hat{K}|\Omega|$ і врахувавши, що $\vec{K}$ задовольняє умову повноти) матимемо

$$\int\limits_{\Omega}[u^k(x,t)]^2\,dx \leqslant C_3 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{1.17}$$

$$\iint\limits_{Q_0}|D^\alpha u^k|^{p_\alpha}\,dxdt \leqslant C_4 \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m, \tag{1.18}$$

$$\iint\limits_{Q_0}|a_\alpha(x,t,\delta u^k)|^{p'_\alpha}\,dxdt \leqslant C_5 \quad \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m, \tag{1.19}$$

де $C_3, C_4, C_5 > 0$ – сталі, які від k не залежать.

На підставі оцінок (1.17) – (1.19) доходимо висновку, що існують підпослідовність послідовності $\{u^k\}$ (яку теж позначимо через $\{u^k\}$) і функції $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_0) \cap L_\infty([0,T];L_2(\Omega))$ та $\chi_\alpha \in L_{p'_\alpha}(Q_0)$ $(|\alpha| \leqslant m)$ такі, що

$$u^k \to u \quad \text{*-слабко в } L_\infty([0,T];L_2(\Omega)), \tag{1.20}$$

$$D^\alpha u^k \to D^\alpha u \quad \text{слабко в } L_{p_\alpha}(Q_0) \quad (|\alpha| \leqslant m), \tag{1.21}$$

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u^k(\cdot,\cdot)) \to \chi_\alpha(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в } L_{p'_\alpha}(Q_0) \quad (|\alpha| \leqslant m). \tag{1.22}$$

Покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (1.1) – (1.3). Нехай l – довільне натуральне число і $k \geqslant l$. Візьмемо довільні кусково-гладкі функції $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ такі, що $\gamma_1(T) = 0$, $\gamma_2(T) = 0, \dots, \gamma_l(T) = 0$. Домножимо перше рівняння системи (1.6) на функцію $\gamma_1(t)$, друге рівняння – на $\gamma_2(t)$ і т.д. до l-го рівняння. Підсумуємо одержані рівності та проінтегруємо за t від 0 до T. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0}\left\{-u^k\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha\psi + \left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\right)\psi - \right.$$
$$\left. - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi\right\} dxdt - \int\limits_{\Omega} u_0^k(x)\psi(x,0)\,dx = 0, \tag{1.23}$$

де $\psi(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{l}\gamma_i(t)w_i(x)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, причому $\psi(x,T) = 0$.

Приймемо, що $\psi_1(x,y,t) \overset{\text{def}}{=} \psi(x,t)K(x,y,t)$, $(x,y,t) \in \Omega \times \Omega \times (0,T)$. За теоремою Фубіні

$$\iint\limits_{Q_0}\left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\right)\psi(x,t)\,dxdt = \int\limits_{\Omega} dx \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt. \tag{1.24}$$

Нехай $g_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt$, а $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} u(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt$ для майже всіх $x \in \Omega$. На підставі наших припущень для майже всіх $x \in \Omega$ функція $\psi_1(x,\cdot,\cdot) \in L_2(Q_0)$. Тоді з (1.20) випливає, що для майже всіх $x \in \Omega$ $g_k(x) \to g(x)$ при $k \to +\infty$. Оскільки для майже всіх $x \in \Omega$

$$|g_k(x)| \leqslant \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)||\psi_1(x,y,t)|\,dydt = \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)||\psi(x,y)||K(x,y,t)|\,dydt \leqslant$$

$$\leqslant \hat{K}\Psi \iint\limits_{Q_0} |u^k(y,t)|\,dydt \leqslant \frac{1}{2}\hat{K}\Psi \iint\limits_{Q_0} (|u^k(y,t)|^2+1)\,dydt \leqslant \frac{1}{2}\hat{K}\Psi(C_3+|\Omega|)T,$$

де $\Psi = \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |\psi(x,t)|$, а C_3 – стала з (1.17), то за теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла отримаємо, що g – інтегровна на Ω і $\int\limits_{\Omega} g_k(x)\,dx \to \int\limits_{\Omega} g(x)\,dx$ при $k \to +\infty$. Отже,

$$\iiint\limits_{Q_0}\Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)\psi(x,t)\,dxdt = \int\limits_{\Omega} dx \iint\limits_{Q_0} u^k(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt \to$$

$$\int\limits_{\Omega} dx \iint\limits_{Q_0} u(y,t)\psi_1(x,y,t)\,dydt = \iint\limits_{Q_0}\Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big)\psi(x,t)\,dxdt \qquad (1.25)$$

при $k \to +\infty$. Тепер перейдемо в рівності (1.23) до границі при $k \to \infty$, враховуючи (1.20), (1.22) і (1.25). Одержимо

$$\iint\limits_{Q_0}\Bigg\{-u\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha\psi + \Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big)\psi -$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi\Bigg\}\,dxdt - \int\limits_{\Omega} u_0(x)\psi(x,0)\,dx = 0 \qquad (1.26)$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega\times[0,T]$, $\psi(x,T)=0$, $x\in\Omega$.

Обмежившись функціями ψ з простору $C_0^\infty(Q_0)$, з (1.26) та з леми 2 праці [7] отримаємо, що $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$. Покажемо, що $u(x,0)=u_0(x)$ для майже всіх $x\in\Omega$. В (1.26) приймемо, що $\psi\varphi_\delta$ замість ψ, де $\varphi_\delta(t)=1$ при $t>\delta$, $\varphi_\delta(t)=0$ при $t<0$ і $\varphi_\delta(t)=t/\delta$, коли $t\in[0,\delta]$, де δ – довільне фіксоване число з інтервалу $(0,T)$. Отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0}\Bigg\{-u\psi_t\varphi_\delta + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha\psi\varphi_\delta + \Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)\,dy\Big)\psi\varphi_\delta -$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi\varphi_\delta\Bigg\}\,dxdt - \frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta\Big(\int\limits_{\Omega} u\psi\,dx\Big)dt = 0 \qquad (1.27)$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega\times[0,T]$ і $\psi(x,T)=0$, $x\in\Omega$.

Перейдемо в (1.27) до границі при $\delta \to 0$. В результаті отримаємо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha \psi + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi \right\} dxdt - \int\limits_\Omega u(x,0)\psi(x,0)\, dx = 0 \tag{1.28}$$

для будь-яких $\psi \in C^\infty(\overline{Q_0})$ таких, що $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega \times [0,T]$ і $\psi(x,T) = 0$, $x \in \Omega$.

З (1.27) і (1.28) отримаємо

$$\int\limits_\Omega (u(x,0) - u_0(x))\varphi(x)\, dx = 0$$

для довільних $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Звідси випливає, що $u(x,0) = u_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Покажемо, що

$$\iint\limits_{Q_0} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \chi_\alpha(x,t) D^\alpha \psi\, dxdt = \iint\limits_{Q_0} \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi\, dxdt \tag{1.29}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$. Для цього використаємо метод монотонності [8].

Розглянемо вираз

$$M_k \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta v) - a_\alpha(x,t,\delta u^k))(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \frac{\lambda}{2}(v - u^k)^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u^k(y,t))\, dy \right)(v - u^k) \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt,$$

де $v \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_0)$ – поки що довільна функція; $\theta_\delta(t) = 1$ при $t \leqslant T - \delta$, $\theta_\delta(t) = 0$ при $t \geqslant T$ і $\theta_\delta(t) = \frac{T-t}{\delta}$, коли $t \in [T-\delta, T]$, δ – довільне число з інтервалу $(0,T)$; $\lambda \geqslant 2\hat{K}|\Omega|$.

Зауважимо, що $M_k \geqslant 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Справді, враховуючи (**A3**), маємо

$$M_k \geqslant \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \frac{\lambda}{2}(v - u^k)^2 - \left(\int\limits_\Omega |K(x,y,t)||v(y,t) - u^k(y,t)|\, dy \right)|v - u^k| \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{2} - \hat{K}|\Omega| \right) \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - u^k)^2 e^{-\lambda t}\, dxdt \geqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Перепишемо вираз M_k так

$$M_k = \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\, dxdt -$$

$$-\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha v e^{-\lambda t}\,dxdt+\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta(v-2u^k)ve^{-\lambda t}\,dxdt+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t)-u^k(y,t))\,dy\Big)v-\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)v(y,t)\,dy\Big)u^k\right\}e^{-\lambda t}dxdt$$

$$+\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt. \tag{1.31}$$

Прийнявши в (1.23) $u^k e^{-\lambda t}\theta_\delta$ замість ψ, отримаємо

$$-\iint\limits_{Q_0}u^k u^k_t e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2\theta'_\delta e^{-\lambda t}\,dxdt+\lambda\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2\theta_\delta e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_0}\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k-\right.$$

$$\left.-\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k\right\}e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\int\limits_\Omega[u^k_0(x)]^2\,dx=0.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\iint\limits_{Q_0}u^k_t u^k e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt=\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}([u^k]^2)_t e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[u^k_0(x)]^2\,dx+\frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2e^{-\lambda t}\theta_\delta\,dxdt-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}[u^k]^2e^{-\lambda t}\theta'_\delta\,dxdt,$$

одержимо

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta(t)\left\{\frac{\lambda}{2}[u^k]^2+\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k-\right.$$

$$\left.-\sum_{|\alpha|\leqslant m}f_\alpha D^\alpha u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt-\frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0}\theta'_\delta[u^k]^2e^{-\lambda t}\,dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega[u^k_0]^2\,dx=0,$$

звідки

$$\iint\limits_{Q_0}\theta_\delta\left\{\frac{\lambda}{2}[u^k]^2+\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x,t,\delta u^k)D^\alpha u^k+\Big(\int\limits_\Omega K(x,y,t)u^k(y,t)\,dy\Big)u^k\right\}e^{-\lambda t}\,dxdt=$$

$$= \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2 e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [u_0^k]^2\, dx. \quad (1.32)$$

Отже, з (1.31), враховуючи (1.32), матимемо

$$M_k = \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u^k) e^{-\lambda t}\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u^k) D^\alpha v e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - 2u^k) v e^{-\lambda t}\, dxdt +$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u^k(y,t))\, dy \right) v - \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) v(y,t)\, dy \right) u^k \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u^k e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2 e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega [u_0^k]^2\, dx. \quad (1.33)$$

Оскільки $u^k \to u$ слабко в $L_2((T-\delta, T); L_2(\Omega))$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta [u^k]^2\, dxdt = - \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\delta}^{T} \int\limits_\Omega [u^k]^2\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{\delta} \int\limits_{T-\delta}^{T} \int\limits_\Omega u^2\, dxdt = \iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2\, dxdt.$$

Враховуючи це, а також (1.20)-(1.22), (1.25),(1.30), з (1.33) ми отримаємо

$$0 \leqslant \overline{\lim_{k\to+\infty}} M_k \leqslant \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta v)(D^\alpha v - D^\alpha u) e^{-\lambda t}\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha v e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta (v - 2u) v e^{-\lambda t}\, dxdt +$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t) - u(y,t))\, dy \right) v - \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) v(y,t)\, dy \right) u \right\} e^{-\lambda t} dxdt$$

$$+ \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2 e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_0^2\, dx. \quad (1.34)$$

На підставі леми 2 праці [7] (взявши $\theta = \theta_\delta e^{-\lambda t}$), з (1.26) матимемо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_0^2\, dx - \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta'_\delta u^2 e^{-\lambda t}\, dxdt + \frac{\lambda}{2}\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta u^2 e^{-\lambda t}\, dxdt + \quad (1.35)$$

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \sum_{|\alpha|\leqslant m} \chi_\alpha D^\alpha u + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) u - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha u \right\} e^{-\lambda t} dxdt = 0.$$

Тому з (1.34) і (1.35) одержимо

$$\iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta v(x,t)) - \chi_\alpha(x,t))(D^\alpha v - D^\alpha u)e^{-\lambda t}\,dxdt+ \tag{1.36}$$

$$+\iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2}(v-u)^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)(v(y,t)-u(y,t))\,dy \right)(v-u) \right\} e^{-\lambda t} dxdt \geqslant 0.$$

Приймемо в (1.36) $v = u \pm \mu\psi$, де $\mu > 0$ – будь-яке число, а ψ – довільна функція з $C_0^\infty(Q_0)$. Одержимо

$$\pm\mu \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u + \mu\delta\psi) - \chi_\alpha(x,t))D^\alpha \psi e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\mu^2 \iint\limits_{Q_0} \theta_\delta \left\{ \lambda\psi^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)\psi(y,t)\,dy \right)\psi \right\} e^{-\lambda t}\,dxdt \geqslant 0. \tag{1.37}$$

Поділимо (1.37) на μ і перейдемо до границі при $\mu \to 0$. Врахувавши умови (**A1**)-(**A4**) і теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, отримаємо

$$\pm \iint\limits_{Q_0} (a_\alpha(x,t,\delta u) - \chi_\alpha(x,t))D^\alpha\psi\,dxdt \geqslant 0$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$.

Звідси випливає (1.29). На підставі (1.26) і (1.29) маємо (1.4). Існування узагальненого розв'язку задачі (1.1)-(1.3) доведено.

Доведемо єдиність одержаного розв'язку. Нехай u_1, u_2 – два узагальнені розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Віднімемо від інтегральної тотожності (1.4) для u_1 ту саму тотожність для u_2. В результаті одержимо

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ -w\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2))D^\alpha\psi + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy \right)\psi \right\} dxdt = 0$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q_0)$, де $w = u_1 - u_2$. Застосуємо до отриманої тотожності лему 2 праці [7] з $t_1 = 0$, $t_2 = \tau$, $\theta = e^{-\lambda t}$, де τ – довільне число з $(0,T]$, $\lambda \geqslant 2\hat{K}|\Omega|$. Тоді одержимо

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda\tau} \int\limits_\Omega w^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left\{ \frac{\lambda}{2}w^2 + \left(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy \right) w \right\} e^{-\lambda t}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u_1) - a_\alpha(x,t,\delta u_2))D^\alpha w e^{-\lambda t}\,dxdt = 0. \tag{1.38}$$

Оскільки

$$\iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2} w^2 + \Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t) w(y,t)\, dy \Big) w \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{Q_0} \left\{ \frac{\lambda}{2} w^2 - \Big(\int\limits_{\Omega} |K(x,y,t)||w(y,t)|\, dy \Big) |w| \right\} e^{-\lambda t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\lambda}{2} - \hat{K}|\Omega| \right) \iint\limits_{Q_0} w^2 e^{-\lambda t}\, dxdt \geqslant 0,$$

то другий член лівої частини (1.38) невід'ємний. З умови (**A3**) випливає, що третій член лівої частини (1.38) невід'ємний. Отже, всі члени лівої частини рівності (1.38) дорівнюють нулю. Звідси отримаємо, що $w = 0$. Теорему доведено.

2. Задача Фур'є

Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $0 \leqslant T < +\infty$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$.

Розглядаємо задачу

$$u_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} K(x,y,t) u(y,t)\, dy = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{2.1}$$

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right|_{\Sigma} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{2.2}$$

Нехай m, δu і N такі самі як в §1.

Припустимо, що виконуються умови:

(**A1**) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$ ($|\alpha| \leqslant m$) визначені для майже всіх $(x,t) \in Q$ та всіх векторів $\xi = (\xi_\beta; |\beta| \leqslant m) \in \mathbb{R}^N$ з координатами ξ_β ($|\beta| \leqslant m$) і є каратеодорівськими; $a_\alpha(x,t,0) = 0$ ($|\alpha| \leqslant m$);

(**A2**) існують числа $p_\gamma \geqslant 2$ ($|\gamma| \leqslant m$) такі, що для всіх α ($|\alpha| \leqslant m$), майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ правильні нерівності

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \leqslant h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta| \leqslant m} |\xi_\beta|^{p_\beta / p'_\alpha} + k_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $k_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p'_\alpha} = 1$;

(**A3**) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant 0;$$

(**A4**) $K \in L_\infty(\Omega \times \Omega \times (-\infty, T))$;

(**A5**) $f_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ ($|\alpha| \leqslant m$).

Нехай $Q_{t_1,t_2} \overset{\mathrm{def}}{=} Q \cap \{(x,t) : t_1 < t < t_2\}$ для довільних t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 < +\infty$. Під $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ розумітимемо простір вимірних на Q функцій, звуження яких на Q_{t_1,t_2} для будь-яких чисел t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, належать простору $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_{t_1,t_2})$, який визначений в §1.

Означення 2.1. Узагальненим розв'язком задачі (2.1), (2.2) назвемо функцію $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$, яка справджує інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ -u\psi_t + \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha \psi +$$

$$+ \Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t) u(y,t)\, dy \Big) \psi \Big\}\, dxdt = \iint\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha \psi\, dxdt \tag{2.3}$$

для будь-яких $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Зауважимо, що функції з простору $C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$ можуть зростати при $t \to -\infty$ з довільною швидкістю.

Визначимо умови на коефіцієнти a_α $(|\alpha| \leqslant m)$ рівняння (2.1), при яких узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2)
1) існує для будь-яких функцій $f_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$;
2) єдиний у класі $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$;
3) неперервно залежить від вихідних даних.

Під неперервною залежністю узагальненого розв'язку задачі (2.1),(2.2) від вихідних даних розумітимемо таке. Нехай коефіцієнти a_α $(|\alpha| \leqslant m)$ рівняння (2.1) такі, що задача (2.1),(2.2) має єдиний узагальнений розв'язок для будь-яких $f_\alpha \in L_{p'_{\alpha},\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$. Скажемо, що узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2) неперервно залежить від вихідних даних, якщо для будь-яких послідовностей $\{f_{\alpha,k}\}_{k=1}^\infty \subset L^{p'_\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$ таких, що $f_{\alpha,k} \to f_\alpha$ при $k \to \infty$ в $L^{p'_\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leqslant m)$, відповідна послідовність $\{u^k\}$ збігається до u в $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$. Тут u – узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2), а (для кожного $k \in \mathbb{N}$) u_k – узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (2.1),(2.2) тільки тим, що в правій частині рівняння (2.1) стоять $f_{\alpha,k}$ замість f_α $(|\alpha| \leqslant m)$.

Нагадаємо, що $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $L_{p_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}))$, якщо $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $L^{p_\alpha}(Q_{t_1,t_2})$ $(\overset{o}{W}{}^{m}_{\vec{p}}(Q_{t_1,t_2}))$ для будь-яких чисел t_1, t_2 $(-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T)$ $(|\alpha| \leqslant m)$. Домовимось вважати, що $g_k \to g$ при $k \to \infty$ в $C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$, якщо для довільного відрізка $[t_1,t_2] \subset (-\infty, T]$ маємо $\max\limits_{t\in[t_1,t_2]} ||g_k(t) - g(t)||_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to +\infty$.

Скажемо, що задача (2.1),(2.2) є коректною, якщо виконуються умови 1)-3).

Теорема 2.1. *Нехай існує мультиіндекс* γ $(|\gamma| \leqslant m$ *) такий, що* $p_\gamma > 2$ *і для всіх* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ *та майже всіх* $(x,t) \in Q$ *правильна нерівність*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha} + M_0|\xi_0 - \eta_0|^2. \tag{2.4}$$

Тут K_α $(|\alpha| \leqslant m)$ *– невід'ємні сталі такі, що вектор* $\vec{K} = (K_\alpha; |\alpha| \leqslant m)$ *задовольняє умову повноти,* M_0 *– додатна стала, причому* $M_0 \geqslant \hat{K} \cdot |\Omega|$, *де* $|\Omega|$ *– міра Лебега множини* Ω, *а* $\hat{K} \stackrel{def}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(-\infty,T)} |K(x,y,t)|$. *Додатково припустимо, що* $f_\alpha = 0$, *якщо* $K_\alpha = 0$ $(|\alpha| \leqslant m)$.

Тоді задача (2.1),(2.2) є коректною і її узагальнений розв'язок u *для будь-яких чисел* t_1, t_2, δ *таких, що* $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, $\delta > 0$, *задовольняє оцінку*

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha u|^{p_\alpha}\,dxdt + (M_0 - \hat{K}\cdot|\Omega|) \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} u^2\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{p_\gamma - 2}} + C_2 \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |f_\alpha|^{p'_\alpha}\,dxdt, \quad (2.5)$$

де C_1, C_2 *– деякі додатні сталі, які залежать тільки від* $n, m, \Omega, \gamma, \vec{p}, \vec{K}$.

Далі всюди під γ розумітимемо мультиіндекс, про який йдеться в теоремі.

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 2.1. *Нехай* u *– узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2), а* $\tilde{u}$ *– узагальнений розв'язок задачі, яка відрізняється від задачі (2.1),(2.2) тільки тим, що в правій частині рівняння (2.1) стоять* $\tilde{f}_\alpha$ *замість* f_α $(|\alpha| \leqslant m)$, *де* $\tilde{f}_\alpha \in L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ *і* $\tilde{f}_\alpha = 0$, *якщо* $K_\alpha = 0$ $(|\alpha| \leqslant m)$. *Припустимо, що справджуються умови теореми 2.1.*

Тоді для довільних чисел t_1, t_2, δ *таких, що* $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T, \delta > 0$, *виконується нерівність*

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} \int\limits_\Omega |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha u - D^\alpha \tilde{u}|^{p_\alpha}\,dxdt + \quad (2.6)$$
$$+ (M_0 - \hat{K}\cdot|\Omega|) \iint\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u-\tilde{u})^2\,dxdt \leqslant C_1 \delta^{-\frac{2}{p_\gamma-2}} + C_2 \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,t_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |f_\alpha - \tilde{f}_\alpha|^{p'_\alpha}\,dxdt,$$

де C_1, C_2 *– сталі, які залежать тільки від* n, m, Ω, γ, M_0, $\hat{K}$, $\vec{p}, \vec{K}$.

Доведення. Віднімемо від інтегральної рівності (2.3), записаної для u, ту саму інтегральну рівність, але записану для $\tilde{u}$. В результаті, прийнявши, що $w = u - \tilde{u}$, отримаємо

$$\iint\limits_Q \Bigg\{ -w\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u) - a_\alpha(x,t,\delta\tilde{u}))D^\alpha\psi +$$
$$+ \Bigg(\int\limits_\Omega K(x,y,t)w(y,t)\,dy\Bigg)\psi \Bigg\}\,dxdt = \iint\limits_Q \sum_{|\alpha|\leqslant m} (f_\alpha - \tilde{f}_\alpha)D^\alpha\psi\,dxdt \quad (2.7)$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Візьмемо функцію $\theta_1(t)$ з простору $C^\infty(\mathbb{R}^1)$ з такими властивостями: $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1$, $\theta_1'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$, $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty, -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1,-1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2,0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0,+\infty)$.

Очевидно, що

$$\sup \theta_1'(t)\theta_1^{-\varkappa}(t) \leqslant C_3, \tag{2.8}$$

де $0 < \varkappa < 1$, $C_3 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $\varkappa$.

Нехай t_1, t_2, δ – довільні числа такі, що $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, $\delta > 0$. З (2.7) і леми 2 праці [7], взявши $t_1 - \delta$ замість t_1 і $t_2 = s$, де s – довільне число з інтервалу $[t_1, t_2]$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,s)\,dx + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (a_\alpha(x,t,\delta u) - a_\alpha(x,t,\delta\tilde{u}))D^\alpha w\,dxdt = \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt -$$
$$- 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)w(y,t)\,dy\Big)w\,dxdt + 2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta \sum_{|\alpha|\leqslant m} (f_\alpha - \tilde{f}_\alpha)D^\alpha w\,dxdt. \tag{2.9}$$

Тут $\theta(t) \stackrel{def}{=} \theta_1(\frac{t-t_1}{\delta})$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Оцінимо перший доданок правої частини рівності (2.9) аналогічно як в [7] при доведенні теореми 2. Матимемо

$$\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta'\,dxdt \leqslant \varepsilon_\gamma \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\gamma w|^{p_\gamma}\theta\,dxdt + C_4\,[\delta\,\varepsilon_\gamma]^{-\frac{2}{p_\gamma-2}}, \tag{2.10}$$

де $\varepsilon_\gamma > 0$ – довільне число, $C_4 > 0$ – стала, яка залежить тільки від Ω, γ, p_γ.

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\left|\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y,t)w(y,t)\,dy\Big)w\,dxdt\right| \leqslant \tag{2.11}$$
$$\leqslant \hat{K}\int\limits_{t_1-\delta}^{s} \theta\Big(\int\limits_{\Omega}|w(y,t)|\,dy \cdot \int\limits_{\Omega}|w(x,t)|\,dx\Big)dt \leqslant \hat{K}\cdot|\Omega| \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta\,dxdt.$$

Оцінимо ті члени третього доданку правої частини рівності (2.9), які відмінні від нуля. Використовуючи нерівність Юнга, для кожного α такого, що $K_\alpha > 0$, одержимо

$$2\iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta(f_\alpha - \tilde{f}_\alpha)D^\alpha w\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_\alpha \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\alpha w|^{p_\alpha}\theta\,dxdt + C_\alpha\varepsilon_\alpha^{-1/(p_\alpha-1)} \iint\limits_{Q_{t_1-\delta,s}} |f_\alpha - \tilde{f}_\alpha|^{p'_\alpha}\theta\,dxdt, \tag{2.12}$$

де $\varepsilon_\alpha > 0$ – довільне число, $C_\alpha > 0$ – стала, яка залежить тільки від p_α.

З (2.9) – (2.12) та нерівності (2.4) отримаємо

$$\int_\Omega w^2(x,s)\,dx + 2\iint_{Q_{t_1-\delta,s}} \theta\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m} K_\alpha |D^\alpha w|^{p_\alpha} + M_0 w^2\right\} dxdt \leqslant \tag{2.13}$$

$$\leqslant \varepsilon_\gamma \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\gamma w|^{p_\gamma}\,dxdt + C_4[\delta\varepsilon_\gamma]^{-\frac{2}{p_\gamma-2}} + 2\hat{K}\cdot|\Omega| \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} w^2\theta\,dxdt+$$

$$+\sum_{|\alpha|\leqslant m} \varepsilon_\alpha \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} |D^\alpha w|^{p_\alpha}\theta\,dxdt + \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \varepsilon_\alpha^{-\frac{1}{p_\alpha-1}} \iint_{Q_{t_1-\delta,s}} |f_\alpha - \tilde{f}_\alpha|^{p'_\alpha}\theta\,dxdt.$$

Врахувавши, що $s \in [t_1,t_2]$, і прийнявши $\varepsilon_\alpha = K_\alpha$, коли $\alpha \neq \gamma$ і $K_\alpha > 0$ ($|\alpha| \leqslant |m|$), та $\varepsilon_\gamma = K_\gamma/2$, з (2.13) одержимо (2.6) з $C_1 = C_4$, $C_2 = \max\limits_\alpha C_\alpha \varepsilon_\alpha^{-\frac{1}{p_\alpha-1}}$. Лему доведено.

Доведення теореми 2.1. Єдиність розв'язку задачі (2.1),(2.2) доводиться аналогічно як в [7], використовуючи лему.

Існування. Побудуємо послідовність функцій, які в певному сенсі апроксимують узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2). Нехай $Q_\mu = \Omega \times (T-\mu,T)$, $\Sigma_\mu = \partial\Omega \times (T-\mu,T)$, де $\mu \in \mathbb{N}$. Розглянемо сім'ю початково-граничних задач ($\mu \in \mathbb{N}$)

$$\hat{u}_{\mu t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta\hat{u}_\mu) + \int_\Omega K(x,y,t)\hat{u}_\mu(y,t)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t)\in Q_\mu, \tag{2.1_μ}$$

$$\left.\frac{\partial^j \hat{u}_\mu}{\partial\nu^j}\right|_\Sigma = 0 \qquad (j=0,1,\dots,m-1), \tag{2.2_μ}$$

$$\hat{u}_\mu(x,T-\mu) = 0. \tag{2.3_μ}$$

Функція $\hat{u}_\mu(x,t) \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q_\mu) \cap C([T-\mu,T];L_2(\Omega))$ *називається узагальненим розв'язком задачі* (2.1_μ)*-*(2.3_μ)*, якщо вона справджує умову* (2.3_μ) *та інтегральну рівність*

$$\iint_{Q_\mu}\left\{-\hat{u}_\mu\psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta\hat{u}_\mu)D^\alpha\psi+\right.$$

$$\left.+\left(\int_\Omega K(x,y,t)\hat{u}_\mu(y,t)\,dy\right)\psi\right\} dxdt = \iint_{Q_\mu}\sum_{|\alpha|\leqslant m} f_\alpha D^\alpha\psi\,dxdt \tag{2.4_μ}$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(\overline{Q_\mu})$.

Існування єдиного узагальненого розв'язку $\hat{u}_\mu$ задачі (2.1_μ) – (2.3_μ) доведено в §1. Продовжимо функцію $\hat{u}_\mu$ нулем на $\overline{Q}\setminus\overline{Q}_\mu$ і позначимо це продовження через u_μ. Приймемо, що $f_{\alpha,\mu}(x,t) = f_\alpha(x,t)$ для $(x,t)\in Q_\mu$ і $f_{\alpha,\mu}(x,t) = 0$ для

$(x,t) \in Q \setminus Q_\mu$ ($|\alpha| \leqslant m, \mu \in \mathbb{N}$). Очевидно, що u_μ – узагальнений розв'язок задачі Фур'є

$$u_{\mu t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u_\mu) +$$

$$+ \int_\Omega K(x,y,t) u_\mu(y,t)\, dy = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_{\alpha,\mu}(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (2.5_\mu)$$

$$\left.\frac{\partial^j u_\mu}{\partial \nu^j}\right|_\Sigma = 0 \qquad (j = 0,1,...,m-1), \qquad (2.6_\mu)$$

тобто u_μ належить простору $\overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p}}(Q) \subset \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(Q)$ і справджує тотожність

$$\iint_Q \Bigg\{ -u_\mu \psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u_\mu) D^\alpha \psi +$$

$$+ \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_\mu(y,t)\, dy \right) \psi - \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_{\alpha,\mu}(x,t) D^\alpha \psi \Bigg\}\, dxdt = 0 \qquad (2.7_\mu)$$

для всіх $\psi \in C_0^\infty(Q)$. Аналогічно як в [7] можна показати, що існує підпослідовність $\{u_{\mu_i}\}$ послідовності $\{u_\mu\}$ і функція $u \in \overset{o}{W}{}^{m,0}_{\vec{p},\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L_2(\Omega))$ такі, що

$$u_{\mu_i} \to u \quad \text{в} \quad C((-\infty,T]; L_2(\Omega)), \qquad (2.14)$$

$$a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u_{\mu_i}(\cdot,\cdot)) \to a_\alpha(\cdot,\cdot,\delta u(\cdot,\cdot)) \quad \text{слабко в} \quad L_{p'_\alpha,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \quad (|\alpha| \leqslant m). \qquad (2.15)$$

З (2.14) випливає, що

$$\iint_Q \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_{\mu_i}(y,t)\, dy \right) \psi\, dxdt \to \iint_Q \left(\int_\Omega K(x,y,t) u(y,t)\, dy \right) \psi\, dxdt \qquad (2.16)$$

при $i \to +\infty$ для будь-якої функції $\psi \in C_0^\infty(Q)$.

Покажемо, що u – узагальнений розв'язок задачі (2.1),(2.2). Нехай $\psi \in C_0^\infty(Q)$ – довільна фіксована функція. З (2.7_μ) отримаємо

$$\iint_Q \Bigg\{ -u_{\mu_i} \psi_t + \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,t,\delta u_{\mu_i}) D^\alpha \psi +$$

$$+ \left(\int_\Omega K(x,y,t) u_{\mu_i}(y,t)\, dy \right) \psi \Bigg\}\, dxdt = \iint_Q \sum_{|\alpha|\leqslant m} f_{\alpha,\mu_i} D^\alpha \psi\, dxdt. \qquad (2.17)$$

Перейдемо до границі при $i \to +\infty$ в (2.17), взявши до уваги (2.14)-(2.16) і означення функцій f_{α,μ_i} ($|\alpha| \leqslant m$, $i \geqslant 1$). Отримаємо тотожність (2.3).

Неперервна залежність від вихідних даних доводиться аналогічно як в [7], використовуючи лему. Теорему доведено.

---

1. *Londen S.-O.* On a quasilinear parabolic integro-differential equations //Differential Integral Equations. - 1995. -Vol. 8. - N 2.- P.59-68.
2. *Szarski J.* Uniqueness of solutions of a mixed problem for parabolic differential-functional equations// Ann. Polon. Math. - 1973. - Vol. 5. - N 2.- P.105-126.
3. *Ugovski H.* On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments//Demonstr. Math.- 1973.- Vol. 5. - N 3.- P.143-169.
4. *Ugovski H.* On integro-differential equations of parabolic type with functional arguments in unbounded domains // Demonstr. Math.- 1973.- Vol. 5. - N 3.- P.143-169.
5. *Bokalo M.M,, Dmytriv V.M.* A Fourier problem for quasi-linear parabolic equations of arbitrary order in noncylindric domains// Математ. студії. - 2000. - Т.14. - N 2. - С.175-188.
6. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений// Труды семинара им. И.Г.Петровского. - 1989. - Вып. 14. - С.3-44.
7. *Bokalo M.M., Sikorsky V.M.* The well-posedness of a Fourier problem for quasilinear parabolic equations of arbitrary order in unisotropic spaces// Математ. студії. - 1997. - Т.8. - N 1. - С.53-70.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М., 1972.
9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., 1958.

THE BOUNDARY VALUE PROBLRMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN UNISOTROPIC SPACES

M. Bokalo, V. Dmytriv

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The well-poseness of the Initial Boundary value problem and the Fourier problem have been established. The differential part of these equations is a quasi-linear parabolic operator with different powers of non-linearities by different derivatives. In the case of Fourier problem no conditions on the behaviour of a solution and increasing of the data-in at $t \to -\infty$ are required.

Key words: integro-differential equations, boundary value problems.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.102–115

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.102–115

УДК 517.95

ПАРАБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ В ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Олег БУГРІЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; V – замкнений підпростір: $\overset{o}{H}{}^m(\vee) \subset V \subset H^m(\vee)$, $m \in N$, K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент.

Досліджено таку задачу: для заданих еліптичних операторів $A_1(t)$, $A_2(t)$, $t \in (0,T)$ порядку $2l$ і $2m$ відповідно ($l \in N$, $1 \leqslant l < m$), та функцій $f \in H^1((0,T);L^2(\vee))$, $u_0 \in V$, $u_1 \in K$ знайти таку функцію u, що $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $u_t(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$, u, $u_t \in L^\infty((0,T);V)$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T);L^2(\vee)) \cap L^2((0,T);H^l(\vee))$, $l \in N$,

$$\int_0^\tau \langle u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - f(t), v(t) - u_t(t)\rangle dt \geqslant 0$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, та всіх $v \in L^2((0,T);V)$, $v(t) \in K$ для майже всіх $t \in (0,T)$.

Знайдено достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі, який є границею послідовності розв'язків допоміжних задач для операторних рівнянь зі штрафом.

Ключові слова: параболічні варіаціні нерівності.

Дослідженню еволюційних варіаційних нерівностей присвячено чимало праць (див. [1 - 4] та наведені там посилання). Параболічні варіаційні нерівності з першою похідною за часом у класах обмежених, періодичних та майже періодичних функцій вивчено в [1 – 3]. Багато важливих прикладних задач описано математичними моделями у вигляді варіаційних нерівностей. Для прикладу можна навести таку задачу: в області $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset R^n$ знайти розв'язок рівняння $u_t - \Delta u = f$, який задовольняє умови $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, $u \geqslant 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0$, $u\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$. Узагальнений розв'язок такої задачі задовольняє певну інтегральну нерівність, яку і називають варіаційною (див., наприклад, [1]).

Варіаційні нерівності з другою похідною за часовою змінною розглянуто в [1, 2]. Зокрема, досліджено гіперболічні варіаційні нерівності.

У цій праці вивчено певну еволюційну варіаційну нерівність, частинним випадком якої є параболічна варіаційна нерівність вищого порядку з другою похідною за часом. Одержано певні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку нерівності. Доведення існування розв'язку цієї задачі виконаємо методом штрафу, який детально описано в [2]. Згідно з цим методом розв'язок варіаційної нерівності наближають розв'язками певних еволюційних операторних рівнянь зі штрафом. Наведено приклад варіаційної нерівності зі сталими коефіцієнтами, яка задовольняє умови доведеної теореми, а також два приклади крайових задач, які є наслідком дослідженої варіаційної нерівності.

Розглянемо нашу задачу. Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$.

Нехай V – замкнений підпростір: $\overset{o}{H}{}^m(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m(\Omega)$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення, $m \in N$, K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент.

Норму банахового простору B позначатимемо $||\cdot;B||$. Спряжений простір до B позначимо через B^*, а скалярний добуток між V^* і V через $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Аналогічно як в [5, с.145] розглядатимемо функцію $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q$ як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t) = u(\cdot,t)$.

Дамо означення розв'язку варіаційної нерівності, яку досліджуватимемо.

Означення. Функцію u,

$$u,\ u_t \in L^\infty((0,T);V),\ u_{tt} \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^l(\Omega)),\ l \in N,$$

$u_t(t) \in K$ для майже усіх $t \in (0,T)$ називають розв'язком варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[u_{tt}(v-u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta(v-u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u_t D^\beta(v-u_t) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u(v-u_t) +$$
$$+ \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha(x,t)D^\alpha u_t(v-u_t) - f(x,t)(v-u_t)\Bigg]dxdt \geqslant 0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u(0) = u_0, \qquad (2)$$

$$u_t(0) = u_1, \qquad (3)$$

якщо вона задовольняє (2), (3) і (1) для всіх $\tau \in (0,T]$ та всіх $v \in L^2((0,T);V)$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Зауваження 1. Параболічному випадку відповідає умова $m = 2l$. Проте будемо від чисел m і l вимагати лише виконання умови $m > l \geqslant 1$. Зауважимо, що термін "параболічна нерівність" ми, аналогічно як і в [2], використовуємо тільки для найзагальніших вказівок на характер задачі.

Зауваження 2. З вибору простору V маємо $V \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, де символ $\hookrightarrow\hookrightarrow$ означає неперервне та щільне вкладення. Тому, ототожнивши $L^2(\Omega)$ зі спряженим до нього простором, ми можемо ототожнити його з деяким підпростором простору V^*. Тоді $V \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow V^*$.

Зауваження 3. Простори

$$Z_1^k = \left\{ u : \Omega \to R\ :\ \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^2\Bigg]dx < +\infty \right\},$$

$$Z_2^k = \left\{ u : \Omega \to R\ :\ \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u(x)|^2 dx < +\infty \right\},\ k \in N$$

загалом не збігаються. За умови $\partial\Omega \subset C^1$ маємо $Z_1^k = Z_2^k$ ([6, с. 27]). Тому існує стала S^k залежна від Ω, k, n така, що $\|\cdot; Z_1^k\|^2 \geqslant S^k\|\cdot; Z_2^k\|^2$.

Далі вимагатимемо, щоб коефіцієнти нерівності (1) задовольняли такі умови:

(A) : $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta t}$, $a_{\alpha\beta tt} \in L^\infty(Q)$, $(1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m)$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant a_0 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^2, \ a_0 = \mathrm{const} > 0;$$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m-1} |a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta| \leqslant a_1 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |\eta_\alpha|^2, \ a_1 = \mathrm{const},$$

для всіх наборів $\xi_\alpha \in R\,(|\alpha| = m)$, $\eta_\alpha \in R\,(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1)$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(B) : $b_{\alpha\beta}(x,t) = b_{\beta\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $b_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q)$, $(1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l)$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=l} b_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant b_0 \sum_{|\alpha|=l} |\xi_\alpha|^2, \ b_0 = \mathrm{const} > 0,$$

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l-1} |b_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta| \leqslant b_1 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l-1} |\eta_\alpha|^2, \ b_1 = \mathrm{const},$$

для всіх наборів $\xi_\alpha \in R\,(|\alpha| = l), \eta_\alpha \in R\,(1 \leqslant |\alpha| \leqslant l-1)$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(C) : $c_\alpha, c_{\alpha t} \in L^\infty(Q)\,(0 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$; $c_0(x,t) \geqslant \tilde{c_0} > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(F) : $f, f_t \in L^2(Q)$.

(H) : $h_\alpha, h_{\alpha t} \in L^\infty(Q)\,(0 \leqslant |\alpha| \leqslant l)$, $h_0(x,t) \geqslant \tilde{h_0} > 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q$.

(U) : $u_0 \in V$, $u_1 \in K$.

Позначимо для зручності $\alpha_0 = \min\{a_0, \tilde{c_0}\}$, $\beta_0 = \min\{b_0, \tilde{h_0}\}$.

Визначимо сім'ї операторів $A_1(t), A_2(t) : V \to V^*$, $t \in (0,T)$ так:

$$\langle A_1(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta v + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha(x,t)D^\alpha u v\Big]dx,$$

$$\langle A_2(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta v + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u v\Big]dx,$$

де $u, v \in V$.

Зауваження 4. При виконанні умов **(A)**, **(B)** з зауваження 3 випливають такі оцінки:

$$\int\limits_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u(x)D^\beta u(x) + c_0(x,t)|u(x)|^2\Big]dx \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \int\limits_\Omega \Big[\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 + |u(x)|^2\Big]dx - a_1 \int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |D^\alpha u(x)|^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant (\alpha_0 S^m - a_1) \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x)|^2 dx, \ u \in H^m(\Omega);$$

$$\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}v(x)D^{\beta}v(x)+h_0(x,t)|v(x)|^2\Big]dx\geqslant$$
$$\geqslant(\beta_0S^l-b_1)\int\limits_{\Omega}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^{\alpha}v(x)|^2dx,\ \ v\in H^l(\Omega),\ \ t\in(0,T).$$

Зауваження 5. З нашого означення та з зауваження 2 випливає, що розв'язок задачі (1) – (3) та його похідна за t належать до простору $C([0,T];L^2(\Omega))$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A)-(U)**, $\alpha_0S^m-a_1>0$, $\beta_0S^l-b_1>0$, $A_1(0)u_1+A_2(0)u_0\in L^2(\Omega)$ *і виконується одна з умов: 1)* $u_1\equiv0$, *2)* $\operatorname{int}K\neq\emptyset$, *де* $\operatorname{int}K$ *– внутрішність множини* K. *Тоді задача (1) – (3) має єдиний розв'язок.*

Доведення. (Єдиність). Нехай існує два розв'язки u^1, u^2 задачі (1) – (3). Тоді для довільного $\tau\in(0,T]$ та всіх $v\in L^2((0,T);V)$, $v_t\in L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $v(t)\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$ виконується нерівність

$$\int\limits_0^{\tau}\langle v_t(t)+A_1(t)u_t^i(t)+A_2(t)u^i(t)-f(t),v(t)-u_t^i(t)\rangle dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega}|v(x,\tau)-u_t^i(x,\tau)|^2dx-\frac12\int\limits_{\Omega}|v(x,0)-u_1(x)|^2dx,\ \ i=1,2.$$

Візьмемо $v=(u_t^1+u_t^2)/2$, тобто $v-u_t^1=(u_t^2-u_t^1)/2$, $v-u_t^2=(u_t^1-u_t^2)/2$. Оскільки K – опукла множина, $u_t^1(t)$, $u_t^2(t)\in K$, то вибрана функція $v(t)$ належить до K як середина "відрізка" $[u_t^1(t),u_t^2(t)]$. Додавши дві останні нерівності та позначивши $u=u^1-u^2$, з умови (3) отримаємо

$$\frac12\int\limits_{\Omega}|u_t(x,\tau)|^2dx+\int\limits_0^{\tau}\langle A_1(t)u_t(t)+A_2(t)u(t),u_t(t)\rangle dt\leqslant0. \tag{4}$$

З вибору функції u випливає, що $D^{\alpha}u(x,0)=0$. Тому з зауваження 4 одержимо

$$\int\limits_0^{\tau}\langle A_1(t)u_t(t)+A_2(t)u(t),u_t(t)\rangle dt=\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}D^{\alpha}uD^{\beta}u_t+$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}b_{\alpha\beta}D^{\alpha}u_tD^{\beta}u_t+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}c_{\alpha}D^{\alpha}uu_t+c_0uu_t+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}h_{\alpha}D^{\alpha}u_tu_t+$$
$$+h_0|u_t|^2\Big]dxdt=\frac12\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta}D^{\alpha}uD^{\beta}u+c_0|u|^2\Big]dx\Big|_{t=\tau}+$$
$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[-\frac12\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m}a_{\alpha\beta t}D^{\alpha}uD^{\beta}u+\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}b_{\alpha\beta}D^{\alpha}u_tD^{\beta}u_t+$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}c_{\alpha}D^{\alpha}uu_t-\frac12c_{0t}|u|^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}h_{\alpha}D^{\alpha}u_tu_t+h_0|u_t|^2\Big]dx\geqslant$$
$$\geqslant\frac12(\alpha_0S^m-a_1)\int\limits_{\Omega}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^{\alpha}u(x,\tau)|^2dx+$$

$$+(\beta_0 S^l - b_1 - \varkappa_1)\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u_t|^2 dxdt - C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|^2 + |u_t|^2\Big] dxdt.$$

Позначимо $z(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} [\sum\limits_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x,t)|^2 + |u_t(x,t)|^2] dxdt$. Вибравши $\varkappa_1 > 0$ досить малим, з останньої оцінки та з (4) отримаємо $z'(\tau) - C_2 z(\tau) \leqslant 0$. Тому з леми 1.1 [7, с.152] випливає, що $z(\tau) \leqslant 0$. Але $z(t) \geqslant 0$ при $t \in [0,T]$. Отже, $z(t) = 0$ при $t \in [0,T]$ і тому $u(x,t) = 0$ майже скрізь в Q.

(Існування). Нехай $B : V \to V^*$ – оператор штрафа, $B(u) = J(u - P_K(u))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_K – оператор проектування на K. Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і семінеперервним оператором ([2], с. 384). Розглянемо задачу зі штрафом

$$u_{tt}^k(t) + A_1(t)u_t^k(t) + A_2(t)u^k(t) + kB(u_t^k(t)) = f(t),\ \ t \in (0,T) \tag{5}$$

$$u^k(0) = u_0,\ \ u_t^k(0) = u_1,\ \ k \in N. \tag{6}$$

Розв'язок цієї задачі шукатимемо методом Фаедо - Гальоркіна. Нехай $\{w^\mu\}_{\mu\in N}$ – база простору V, $u^{k,m}(x,t) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} \varphi_\mu^{k,m}(t) w^\mu(x)$, $(x,t) \in Q$, де функції $\varphi_1^{k,m}(t), \ldots, \varphi_m^{k,m}(t)$ шукаємо як розв'язки задач

$$\langle u_{tt}^{k,m}(t), w^\mu\rangle + \langle A_1(t)u_t^{k,m}(t) + A_2(t)u^{k,m}(t) + kBu^{k,m}(t), w^\mu\rangle = \langle f(t), w^\mu\rangle, \tag{7}$$

$$\varphi_\mu^{k,m}(0) = \alpha_\mu^m,\ \varphi_{\mu t}^{k,m}(0) = \beta_\mu^m,\ \ 1 \leqslant \mu \leqslant m, \tag{8}$$

де $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu^m w^\mu \to u_0$, $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \to u_1$ сильно в V при $m \to \infty$, $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \in K$. Зауважимо, що такі β_μ^m існують. Якщо $u_1 \equiv 0$, то це очевидно. Нехай $u_1 \not\equiv 0$, $u_1 \in \operatorname{int} K$. Тоді існує окіл U точки u_1 такий, що $U \subset \operatorname{int} K$. Оскільки функція $u_1 \in V$, то її можна наблизити лінійними комбінаціями елементів $\{w^j\}_{j\in N}$. Починаючи з деякого номера, елементи цієї послідовності належатимуть до $U \subset K$. Якщо $u_1 \in \partial K$, то з того, що K – опукла множина, випливає, що функцію u_1 можна наблизити послідовністю $\{\tilde u_j\}_{j\in N} \subset \{0\} \cup \operatorname{int} K$. Кожну функцію $\tilde u_j$ можна наблизити лінійними комбінаціями функцій з $\{w_\mu\}_{\mu\in N}$. Тому сталі β_μ^m можна вибрати так, щоб $\sum\limits_{\mu=1}^{m} \beta_\mu^m w^\mu \in K$.

Запишемо (7) у вигляді

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_{\mu tt}^{k,m}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} = \Bigg\langle f(t) - A_1(t)\Bigg(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{it}^{k,m}(t) w^i\Bigg) -$$

$$-A_2(t)\Bigg(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^{k,m}(t) w^i\Bigg) - B\Bigg(\sum_{i=1}^{m} \varphi_{it}^{k,m}(t) w^i\Bigg), w^\mu\Bigg\rangle \equiv G_\mu(t, \vec\varphi^{k,m}(t), \vec\varphi_t^{k,m}(t)), \tag{9}$$

де $\vec\varphi^{k,m}(t) = \operatorname{colon}(\varphi_1^{k,m}(t), \ldots, \varphi_m^{k,m}(t))$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$. З лінійної незалежності системи $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в V маємо, що матриця $[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]$ невироджена $(\det[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}] \neq 0)$. Тому система (9) може бути записана у вигляді

$$\vec\varphi_{tt}^{k,m}(t) = [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1} \vec G(t, \vec\varphi^{k,m}(t), \vec\varphi_t^{k,m}(t)). \tag{10}$$

Нехай $\vec{\chi}^{k,m}(t) = \vec{\varphi}_t^{k,m}(t)$, $\vec{z}^{k,m}(t) = \mathrm{colon}(\vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\chi}^{k,m}(t))$,

$$\vec{H}^{k,m}(t, \vec{z}^{k,m}(t)) = \mathrm{colon}(\vec{\chi}^{k,m}(t), [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1}\vec{G}(t, \vec{\varphi}^{k,m}(t), \vec{\chi}^{k,m}(t))).$$

Тоді задача (10), (8) рівносильна такій задачі Коші:

$$\vec{z}_t^{k,m}(t) = \vec{H}^{k,m}(t, \vec{z}^{k,m}(t)), \tag{11}$$

$$\vec{z}^{k,m}(0) = \mathrm{colon}\ (\alpha_1^m, \dots, \alpha_m^m, \beta_1^m, \dots, \beta_m^m). \tag{12}$$

З семінеперервності операторів $A_1(t)$, $A_2(t)$, B випливає, що функція $\vec{H}^{k,m}(t, \vec{y})$, $\vec{y} \in R^{2m}$ є неперервною за $\vec{y}$ для майже всіх $t \in (0, T)$. З теореми Фубіні отримуємо, що вона також є вимірною за t при кожному фіксованому $\vec{y}$. Крім того, для кожного $l > 0$ виконується нерівність $|\vec{H}(t, \vec{y})| \leqslant m(t)$, де $m \in L^1(0, T)$ для всіх $\vec{y} : |\vec{y}| \leqslant l$. Тому з теореми Каратеодорі [8, с. 54] на деякому інтервалі $[0, t_0]$ існує абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (11), (12). Тобто існує $\vec{\varphi}^{k,m} \in [C^1([0, t_0])]^m$, де $\vec{\varphi}_t^{k,m}$ – абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (10), (8). З апріорних оцінок, які одержано нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$.

Помножимо (7) на $\varphi_{\mu t}^{k,m}(t)$, підсумуємо за μ та зінтегруємо за t по відрізку $[0, \tau]$ $(0 < \tau \leqslant t_0)$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}^{k,m} u_t^{k,m} + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} +$$

$$+ \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k,m} u_t^{k,m} + \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_t^{k,m}\Big] dxdt +$$

$$+ k \int\limits_0^\tau \langle B u_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f u_t^{k,m} dxdt.$$

Зробивши перетворення такі, як при доведенні єдиності розв'язку задачі (1) – (3), одержимо оцінку

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \Big[(\alpha_0 S^m - a_1) \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}|^2 + |u_t^{k,m}|^2\Big] dx \Big|_{t=\tau} + (\beta_0 S^l - b_1 - \varkappa_1) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} |D^\alpha u_t^{k,m}|^2 dxdt - C_3 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}|^2 + |u_t^{k,m}|^2\Big] dxdt +$$

$$+ k \int\limits_0^\tau \langle B u_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt \leqslant C_4. \tag{13}$$

Вибираючи $\varkappa_1 > 0$ досить малим та використовуючи монотонність оператора B та лему 1.1 [7, с.152], отримаємо оцінки

$$\int\limits_\Omega \Big[\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}(x, \tau)|^2 + |u_t^{k,m}(x, \tau)|^2\Big] dx \leqslant C_5,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u^{k,m}(x,t)|^2 + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u_t^{k,m}(x,t)|^2 \Big] dxdt \leqslant C_5,$$

$$\int\limits_0^\tau \langle B u_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt \leqslant \frac{1}{k} C_5, \tag{14}$$

де стала C_5 не залежить від k, m.

Продиференціюємо (7) за t, домножимо на $\varphi_{\mu tt}^{k,m}(t)$, підсумуємо за μ та зінтегруємо за t по відрізку $[0,\tau]$ $(0 < \tau \leqslant t_0)$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{ttt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_{tt}^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_{\alpha t} D^\alpha u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + c_{0t} u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + c_0 u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_{\alpha t} D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + h_{0t} u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+ h_0 u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} \Big] dxdt + k \int\limits_0^\tau \langle (B u_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt = \int\limits_{Q_{0,\tau}} f_t u_{tt}^{k,m} dxdt.$$

Оскільки $u_t^{k,m}(0) \in K$, то з (5), (6) отримаємо $u_{tt}^{k,m}(0) = f(0) - A_1(0)u_t^{k,m}(0) - A_2(0)u^{k,m}(0) - kB(u_t^{k,m}(0)) = f(0) - A_1(0)u_t^{k,m}(0) - A_2(0)u^{k,m}(0) \in L^2(\Omega)$. Розглянемо інтеграли

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} u_{ttt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{tt}^{k,m}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_{tt}^{k,m}(x,0)|^2 dx,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} dxdt =$$
$$= \int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} -$$
$$- \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta tt} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}) dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} dxdt,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} c_0 u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c_0 |u_t^{k,m}|^2 dx\Big|_{t=0}^{t=\tau} - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} c_{0t}|u_t^{k,m}|^2 dxdt.$$

Враховуючи ці перетворення, отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg[|u_{tt}^{k,m}|^2 + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + c_0|u_t^{k,m}|^2 +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}\Bigg]dx\Bigg|_{t=\tau} +$$
$$+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Bigg[-3\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} - 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta tt} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_{tt}^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta t} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_{tt}^{k,m} +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_{\alpha t} D^\alpha u^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2c_{0t} u^{k,m} u_{tt}^{k,m} - c_{0t}|u_t^{k,m}|^2 +$$
$$+2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_{\alpha t} D^\alpha u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_{tt}^{k,m} u_{tt}^{k,m} + 2h_{0t} u_t^{k,m} u_{tt}^{k,m} +$$
$$+2h_0|u_{tt}^{k,m}|^2\Bigg]dxdt + 2k\int\limits_0^\tau \langle (Bu_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt = 2\int\limits_{Q_{0,\tau}} f_t u_{tt}^{k,m} dxdt + \int\limits_{\Omega}\Bigg[|u_{tt}^{k,m}|^2 +$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k,m} D^\beta u_t^{k,m} + 2\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta t} D^\alpha u^{k,m} D^\beta u_t^{k,m}\Bigg]dx\Bigg|_{t=0}.$$

З [2, с. 419] одержуємо оцінку $\int\limits_0^\tau \langle (Bu_t^{k,m}(t))_t, u_{tt}^{k,m}(t)\rangle dt \geqslant 0$. З останньої рівності та (14) випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg[|u_{tt}^{k,m}|^2 + (\alpha_0 S^m - a_1 - \varkappa_2)\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u_t^{k,m}|^2\Bigg]dx\Bigg|_{t=\tau} + (2\beta_0 S^l - 2b_1 - \varkappa_3)\times$$
$$\times\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha u_{tt}^{k,m}|^2 dxdt - C_6\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Bigg[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u_t^{k,m}|^2 + |u_{tt}^{k,m}|^2\Bigg]dxdt \leqslant C_7.$$

Вибравши $\varkappa_2, \varkappa_3 > 0$ – досить малими, застосувавши лему 1.1 [7, с.152] та оцінки (14), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(|D^\alpha u^{k,m}(x,\tau)|^2 + |D^\alpha u_t^{k,m}(x,\tau)|^2) + |u_{tt}^{k,m}(x,\tau)|^2\Bigg]dx \leqslant C_8,$$
$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Bigg[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}(|D^\alpha u^{k,m}(x,t)|^2 + |D^\alpha u_t^{k,m}(x,t)|^2) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}|D^\alpha u_{tt}^{k,m}(x,t)|^2\Bigg]dxdt \leqslant C_8,$$
$$\int\limits_0^\tau \langle Bu_t^{k,m}(t), u_t^{k,m}(t)\rangle dt \leqslant \frac{1}{k}C_8, \;\; \tau\in(0,t_0], \tag{15}$$

де стала C_8 не залежить від k, m. З оцінки (15_1) випливає, що розв'язок задачі (10), (8) можна продовжити на весь інтервал $[0,T]$, і оцінки (15) можна отримати для $t_0 = T$. Оцінки (15) гарантують існування підпослідовності $\{u^{k,m_i}\} \subset \{u^{k,m}\}$ такої, що

$$u^{k,m_i} \to u^k,\ u_t^{k,m_i} \to u_t^k \ * - \text{слабко в } L^\infty((0,T);V),$$
$$u_{tt}^{k,m_i} \to u_{tt}^k \ * - \text{слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),$$
$$u^{k,m_i} \to u^k,\ u_t^{k,m_i} \to u_t^k \ - \text{ слабко в } L^2((0,T);V),$$
$$u_{tt}^{k,m_i} \to u_{tt}^k \ - \text{ слабко в } L^2((0,T);H^l(\Omega)),$$

при $i \to \infty$. З одержаних збіжностей випливає, що можемо перейти до границі зразу в (7) і отримати, що функція u^k задовольняє (5) в сенсі простору $D^*((0,T);V^*)$.

Отже, ми одержали послідовність $\{u^k\}_{k\in N}$ розв'язків задач (5), (6). Для цих функцій виконуються оцінки (15). Тому існує підпослідовність $\{u^{k_i}\} \subset \{u^k\}$ така, що $u^{k_i} \to u$, $u_t^{k_i} \to u_t$ $*$ – слабко в $L^\infty((0,T);V)$, $u_{tt}^{k_i} \to u_{tt}$ $*$ – слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, $u^{k_i} \to u$, $u_t^{k_i} \to u_t$ – слабко в $L^2((0,T);V)$, $u_{tt}^{k_i} \to u_{tt}$ – слабко в $L^2((0,T);H^l(\Omega))$, при $i \to \infty$. З [2, с.70] випливає, що $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ сильно в $L^2((0,T);Z_1^{m-1})$, $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ сильно в $L^2((0,T);Z_1^l)$.

Нехай $v \in L^2((0,T);V)$, $v_t \in L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Оскільки $Bv(t) = 0$, то з монотонності оператора B одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[v_t(v - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u^{k_i} D^\beta (v - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta (v - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(v - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(v - u_t^{k_i}) - f(v - u_t^{k_i}) \Bigg] dxdt =$$
$$= k_i \int\limits_0^\tau \langle Bv(t) - Bu^{k_i}(t), v(t) - u^{k_i}(t)\rangle dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,\tau) - u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,0) - u_1(x)|^2 dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,\tau) - u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |v(x,0) - u_1(x)|^2 dx \qquad (16)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$.

З (5) та оцінок (15) випливає, що для довільного $v \in L^2((0,T);V)$

$$\int\limits_0^T \langle Bu_t^{k_i}(t), v(t)\rangle dt = \frac{1}{k_i}\int\limits_0^T \langle f(t) - u_{tt}^{k_i}(t) - A_1(t)u_t^{k_i}(t) -$$
$$- A_2(t)u^{k_i}(t), v(t)\rangle dt \leqslant \frac{C_9}{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

де стала C_9 не залежить від k. Тому з монотонності оператора B, оцінки (15_3) та отриманих нами збіжностей одержимо

$$0 \leqslant \int_0^T \langle Bu_t^{k_i}(t) - Bv(t), u_t^{k_i}(t) - v(t)\rangle dt \xrightarrow[i\to\infty]{} -\int_0^T \langle Bv(t), u_t(t) - v(t)\rangle dt.$$

Візьмемо $v = u_t - \lambda w$, де $w \in L^2((0,T);V)$, $\lambda > 0$. Тоді

$$-\lambda \int_0^T \langle B(u_t(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \geqslant 0.$$

З семінеперервності оператора B отримаємо

$$0 \leqslant -\int_0^T \langle B(u_t(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \xrightarrow[\lambda\to+0]{} \int_0^T \langle Bu_t(t), w(t)\rangle dt$$

для довільного $w \in L^2((0,T);V)$. Отже, $Bu_t(t) = 0$ і $u_t(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Тому можемо в (16) взяти $v = u_t$. Перетворимо ліву частину отриманої нерівності так:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (a_{\alpha\beta}D^\alpha u - a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i}))D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta}D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+(c_0 u - c_0(u - u^{k_i}))(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) - f(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt =$$
$$= G_{k_i}(\tau) - \int_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+c_0(u - u^{k_i})(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt = G_{k_i}(\tau) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u - u^{k_i}) + c_0|u - u^{k_i}|^2\Big] dx\Big|_{t=\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} \Big[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta}D^\alpha(u - u^{k_i})D^\beta(u - u^{k_i}) + c_0|u - u^{k_i}|^2\Big] dxdt \leqslant$$
$$\leqslant G_{k_i}(\tau) - \frac{1}{2}(\alpha_0 S^m - a_1)\int_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx +$$
$$+C_{10}\int_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u - u^{k_i})|^2 dxdt,$$

де

$$G_{k_i}(\tau) \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta (u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ c_0 u(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) - f(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt.$$

Тоді нерівність (16) набуде вигляду

$$G_{k_i}(\tau) + C_{10} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_t(x,\tau) -$$
$$- u_t^{k_i}(x,\tau)|^2 dx + \frac{1}{2}(\alpha_0 S^m - a_1) \int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx.$$

Звідси отримаємо

$$\int\limits_\Omega \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,\tau) - u^{k_i}(x,\tau))|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\Big(\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt + G_{k_i}(\tau)\Big). \tag{17}$$

Перепишемо $G_{k_i}(\tau)$ у вигляді

$$G_{k_i}(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant m} a_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[u_{tt}(u_t - u_t^{k_i}) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} b_{\alpha\beta} D^\alpha u_t^{k_i} D^\beta(u_t - u_t^{k_i}) + c_0 u(u_t - u_t^{k_i}) + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l} h_\alpha D^\alpha u_t^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) -$$
$$- f(u_t - u_t^{k_i})\Big] dxdt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} c_\alpha D^\alpha u^{k_i}(u_t - u_t^{k_i}) dxdt = I_1 + I_2 + I_3.$$

З слабкої збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2((0,T);V)$ отримаємо $I_1 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. З сильної збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2((0,T);Z_1^l)$ випливає, що $I_2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. З слабкої збіжності $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ в $L^2((0,T);V)$, сильної збіжності $u_t^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u_t$ в просторі $L^2(Q)$ та леми 5.2 [5, с. 19] одержимо, що $I_3 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Отже, $G_{k_i}(\tau) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ для $\tau \in (0,T]$. Крім того, $|G_{k_i}(\tau)| \leqslant ||u^{k_i}; L^2((0,T);V)|| + ||u_t^{k_i}; L^2((0,T);Z_1^l)|| + ||u - u^{k_i}; L^2((0,T);V)|| \leqslant C_{12}$. Тому з теореми Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла отримаємо, що $\int\limits_0^\tau G_{k_i}(t)dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$ при

$\tau \in (0,T]$. Тоді з (17) та леми 1.1 [7, с.152]

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} |D^\alpha(u(x,t) - u^{k_i}(x,t))|^2 dxdt \leqslant C_{13} \int\limits_0^\tau G_{k_i}(t)dt \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Отже, $u^{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} u$ сильно в $L^2((0,T);V)$. Аналогічно як (16) одержимо, що функції $\{u^{k_i}\}_{i\in N}$ задовольняють нерівність (1). Спрямувавши $i \to \infty$ отримаємо, що функція u є розв'язком задачі (1) – (3).

Теорема доведена.

Наведемо приклад варіаційної нерівності, для якої виконуються всі умови теореми.

Приклад 1. Нехай у (1) (для спрощення) $m = 2$, $l = 1$, $n = 2$, $f \in H^1((0,T);L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \equiv 0$. Решту коефіцієнтів нерівності (1) виберемо так, щоб

$$\langle A_1(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega [b(u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2}) + huv]dx,$$

$$\langle A_2(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big[u_{x_1x_1}v_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}v_{x_2x_2} + \mu(u_{x_1x_1}v_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}v_{x_1x_1}) +$$
$$+2(1-\mu)u_{x_1x_2}v_{x_1x_2} + cuv\Big]dx, \quad u, v \in V,$$

де $b, c, h, \mu = \text{const}$, $b, c, h > 0$, $\mu \in (0,1)$.

Очевидно, що в цьому випадку умови нашої теореми виконуються, бо згідно з введеними в теоремі позначеннями $a_0 = 1 - \mu$, $b_0 = b$, $a_1 = b_1 = 0$, $\tilde{c}_0 = c$, $\tilde{h}_0 = h$.

За допомогою підбору простору V та множини K ми, аналогічно, як в [2, с. 255] можемо отримати, що розв'язок цієї варіаційної нерівності є розв'язком певної крайової задачі. Проілюструємо це на двох прикладах.

Приклад 2. Нехай виконуються умови попереднього прикладу, $V = H^2(\Omega)$, $K = \{v \in V \mid v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\}$. Тоді, використовуючи формулу інтегрування частинами та формулу Гріна [1, с. 202], отримаємо, що розв'язок задачі (1) – (3) є розв'язком такої задачі:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - b\Delta u_t + hu_t + cu = f \text{ майже скрізь в } Q,$$
$$u(0) = u_0, \ u_t(0) = 0, \ u\big|_\Sigma \geqslant 0, \ M\big|_\Sigma(u) = 0,$$
$$\left(F(u) + b\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\bigg|_\Sigma \geqslant 0, \ \left(F(u) + b\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)u\bigg|_\Sigma = 0,$$

де $\Sigma = \Omega \times (0,T)$,

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}, \ \Delta^2 u = u_{x_1x_1x_1x_1} + 2u_{x_1x_1x_2x_2} + u_{x_2x_2x_2x_2},$$
$$F(u) = -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial \nu} - (1-\mu)\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\nu_1\nu_2(u_{x_2x_2} - u_{x_1x_1}) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)u_{x_1x_2}\right],$$
$$M(u) = -\Delta u - (1-\mu)(2\nu_1\nu_2 u_{x_1x_2} - \nu_2^2 u_{x_1x_1} - \nu_1^2 u_{x_2x_2}),$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор зовнішньої нормалі, а $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ – вектор дотичний до $\partial\Omega$.

Приклад 3. Нехай виконуються умови прикладу 1, $K = V = \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$. Тоді розв'язок задачі (1) – (3) є розв'язком такої класичної задачі:

$$u_{tt} + \Delta^2 u - b\Delta u_t + hu_t + cu = f \text{ майже скрізь в } Q,$$
$$u(0) = u_0, \; u_t(0) = 0, \; u\big|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Sigma = 0.$$

Зауважимо, що аналогічно як в [2, с. 255], можемо отримати як наслідок варіаційної нерівності (1) й інші крайові задачі.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М., 1980.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
3. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – К., 1985.
4. *Friedman A.* Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and applications to stopping time problems// Arch. Rational. Mech. Anal. – 1973. – Vol. 52. –P.134-160.
5. *Гаевский X., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
6. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Ленинград, 1985.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.
8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN BOUNDED DOMAIN

O. Buhrii

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Let $\Omega \subset R^n$ be a bounded domain with the boundary $\partial\Omega \subset C^1$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; V is a closed subspace such the $\overset{o}{H}{}^m(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^m(\Omega)$, $m \in N$, K a convex closed subset of V which includes zero. The problem to be studied is: for given eliptic operators $A_1(t)$, $A_2(t)$, $t \in (0,T)$ of order $2l$ and $2m$ respectively ($l \in N$, $1 \leqslant l < m$), for given functions $f \in H^1((0,T); L^2(\Omega))$, $u_0 \in V$, $u_1 \in K$ find a function u such that $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $u_t(t) \in K$ for almost all $t \in (0,T)$, u,

$u_t \in L^\infty((0,T);V)$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);H^l(\Omega))$, $l \in N$,

$$\int_0^\tau \langle u_{tt}(t) + A_1(t)u_t(t) + A_2(t)u(t) - f(t), v(t) - u_t(t)\rangle dt \geqslant 0$$

for all $\tau \in (0,T]$, and for each $v \in L^2((0,T);V)$, $v(t) \in K$ for almost all $t \in (0,T)$.

Under some additional hypotheses the author proves that this problem has a unique solution which is the limit of a sequence of approximating initial-value boundary problems.

Key words: parabolic variational inequality.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.116–125

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.116–125

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Галина ДОМАНСЬКА
Центр математичного моделювання ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України
вул.Дудаєва, 15. 79005 Львів, Україна

Розглянуто мішану задачу для лінійної псевдопараболічної системи з періодичними крайовими умовами в області, яка є $(n+1)$-вимірним паралелепіпедом. Одержано достатні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку.

Ключові слова: лінійні псевдопараболічні системи.

Чимало задач хімії, фізики та механіки описують псевдопараболічними рівняннями [1–4]. Починаючи з 50-х років минулого століття, дослідженню різноманітних задач для рівнянь та систем зазначеного типу присвячено багато праць. У. Ранделл [5] показав, що єдиність розв'язку задачі Коші для псевдопараболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зберігається лише в класі функцій, які зростають як $e^{\alpha|x|}$, де стала α залежить від коефіцієнтів рівняння. Припускають, що права частина та початкові функції зростають на нескінченності не швидше, ніж зазначена експонента. Аналогічні результати отримали і в працях Г.Хількевич [6, 7]. У. Шоуолтер [8], використовуючи метод груп стискуючих операторів, досліджував задачу Коші для абстрактних псевдопараболічних рівнянь.

Розглядаючи функціонально-аналітичне формулювання задач із крайовими і початковими умовами, у монографії [9] псевдопараболічні рівняння зведено до звичайних операторних диференціальних рівнянь, для яких одержано класи коректності.

Для знаходження наближеного розв'язку псевдопараболічного рівняння використовують зокрема метод Гальоркіна [9–11].

У цій праці розглянуто мішану задачу для лінійної псевдопараболічної системи в обмеженій області, яка є $(n+1)$-вимірним паралелепіпедом. Крайові умови вибрано періодичними. Використовуючи метод Гальоркіна, доведено існування узагальненого розв'язку. Одержано також достатні умови єдиності узагальненого розв'язку.

Нехай $\Pi_\nu = \{(x_1, ..., x_n) : |x_i| < \nu, i = \overline{1,n}\}$ $(\nu > 0)$. Розглянемо в області $Q = \Pi_\nu \times (0,T)$ систему рівнянь

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x,t)u_{x_i t})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x,t)u_{x_i} + D(x,t)u = F(x,t), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (2)$$

та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &u(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\ =&u(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &u_{x_j}(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\ =&u_{x_j}(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i,j \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{4}$$

де A_{ij}, B_{ij}, C_i, D – квадратні матриці розміру $m \times m$; $u = (u_1,...,u_m)^T$, $F = (F_1,...,F_m)^T$. Нехай надалі $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, а $|\cdot|$ – модуль в $\mathbb{R}^m$. Якщо йтиметься про просторову змінну x, то через $|\cdot|$ будемо також позначати і норму в $\mathbb{R}^n$.

Через $W^{k,r}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu)$ ($k \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant r \leqslant \infty$) позначатимемо простір вектор-функцій $f = \left(f_1,...,f_m\right)^T$, всі узагальнені похідні яких до порядку k включно належать до простору $L^r(\Pi_\nu)$, а узагальнені похідні до порядку $k-1$ включно задовольняють умови (3).

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) називатимемо функцію u, яка володіє такими властивостями:

1) $u \in H^1\left((0,T); W^{1,2}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu)\right)$;
2) функція u задовольняє умову (2) майже скрізь в Π_ν;
3) функція u задовольняє тотожність

$$\begin{gathered} \int_0^T\int_{\Pi_\nu}\left[(u_t,v) + \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)u_{x_it},v_{x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i},v_{x_j}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \left(C_i(x,t)u_{x_i},v\right) + (D(x,t)u,v)\right] dxdt = \int_0^T\int_{\Pi_\nu} (F(x,t),v)\,dxdt \end{gathered} \tag{5}$$

для довільної функції $v \in L^2\left((0,T); W^{1,2}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu)\right)$.

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови:

(A) : $a_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right) \leqslant a^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2$, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $a^0 = \mathrm{const}$;
$A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t)$, $A_{ij}(x,t) = A^T_{ij}(x,t)$ $\forall i,j \in \{1,...,n\}$;
$A_{ij}, A_{ijt} \in L^\infty(Q)$ $\forall i,j \in \{1,...,n\}$;

(B) : $b_0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right) \leqslant b^0\sum_{i=1}^n|\xi^i|^2$, $b_0 = \mathrm{const} > 0$, $b^0 = \mathrm{const}$;
$B_{ij} \in L^\infty(Q)$ $\forall i,j \in \{1,...,n\}$;

(C) : $C_i \in L^\infty(Q)$ $\forall i \in \{1,...,n\}$;

(D) : $d_0|\xi|^2 \leqslant (D(x,t)\xi,\xi) \leqslant d^0|\xi|^2$, $d_0 = \mathrm{const}$, $d^0 = \mathrm{const}$; $D \in L^\infty(Q)$

для довільних векторів ξ, ξ^i, ξ^j з $\mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ та для майже всіх точок (x,t) з Q.

Для спрощення подальших записів введемо кілька позначень

$$\widehat{A} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \sup_{Q} \|A_{ij}(x,t)\|^2, \quad \widehat{B} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} \sup_{Q} \|B_{ij}(x,t)\|^2,$$
$$\widehat{C} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{Q} \|C_i(x,t)\|^2, \quad \widehat{D} = \sup_{Q} \|D(x,t)\|^2.$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A), (B), (C), (D). *Тоді задача (1) - (4) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Доведення. Нехай задача (1) – (4) має два розв'язки u^1 і u^2. Запишемо для кожного з них інтегральну тотожність (5) та віднімемо ці тотожності. Прийнявши, що $u = u^1 - u^2$, $v = (u_t + u)e^{-\mu t}$ ($\mu = \text{const} > 0$), одержимо

$$\int_0^T \int_{\Pi_\nu} \Bigg[(u_t, (u_t + u)) + \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}, (u_t+u)_{x_j}\right) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t)u_{x_i}, (u_t+u)_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} (C_i(x,t)u_{x_i}, (u_t+u)) +$$
$$+ (D(x,t)u, (u_t+u)) \Bigg] e^{-\mu t} dxdt = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} (F(x,t), (u_t+u))\, e^{-\mu t} dxdt. \qquad (6)$$

Оцінимо кожен із доданків рівності (6)

$$I_1 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} (u_t + D(x,t)u, u_t + u)\, e^{-\mu t} dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int_{\Pi_\nu} |u|^2 e^{-\mu T} dx \Bigg|_{t=T} +$$
$$+ \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\frac{1}{2}|u_t|^2 + \left(\frac{\mu}{2} + d_0 - \frac{\widehat{D}}{2} \right) |u|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$
$$I_2 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x,t)u_{x_it} + B_{ij}(x,t)u_{x_i}, u_{x_jt} + u_{x_j}\right) e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\left(a_0 - \frac{n\varkappa}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} |u_{x_it}|^2 + \left(b_0 + \frac{\mu a_0}{2} - \frac{a^1}{2} - \frac{n\widehat{B}}{2\varkappa}\right) \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$
$$I_3 = \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x,t)u_{x_i}, u_t + u)\, e^{-\mu t} dxdt \geqslant$$
$$\geqslant - \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[\frac{\widehat{C}}{\delta_0} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + \frac{n\delta_0}{2}|u_t|^2 + \frac{n\delta_0}{2}|u|^2 \right] e^{-\mu t} dxdt,$$

де стала a^1 визначається з умови

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ijt}(x,t)\xi^i, \xi^j\right) \leqslant a^1 \sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2 \quad \forall \xi^i, \xi^j \in \mathbb{R}^m \quad (i,j \in \{1,...,n\}),$$

δ_0, $\varkappa$ – додатні числа. Виберемо μ, δ_0 та $\varkappa$ такими, щоб виконувалися умови

$$a_0 = n\varkappa,$$

$$\frac{1}{2} - n\delta_0 \geqslant 0,$$

$$\mu - 1 + 2d_0 - \widehat{D} - n\delta_0 \geqslant 0,$$

$$b_0 + \mu a_0 - a^1 - \frac{n\widehat{B}}{\varkappa} - \frac{2\widehat{C}}{\delta_0} \geqslant 0,$$

тобто

$$\varkappa = \frac{a_0}{n},$$

$$\mu > \left\{ 1 + \widehat{D} - 2d_0,\ \frac{1}{a_0}\left(4n\widehat{C} + a^1 + \frac{n^2\widehat{B}}{a_0} - b_0\right),\ 0,\right.$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \widehat{D} - 2d_0 + \frac{1}{a_0}\left(a^1 + \frac{n^2\widehat{B}}{a_0} - b_0\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\left(2d_0 - 1 - \widehat{D} + \frac{1}{a_0}\left(a^1 + \frac{n^2\widehat{B}}{a_0} - b_0\right)\right)^2 + \frac{8n\widehat{C}}{a_0}}\right)\right\},$$

$$\frac{2\widehat{C}}{b_0 + \mu a_0 - a^1 - \dfrac{n^2\widehat{B}}{a_0}} < \delta_0 < \min\left\{\frac{1}{2n},\ \frac{\mu - 1 - \widehat{D} + 2d_0}{n}\right\}.$$

З рівності (6) та оцінок інтегралів I_1, I_2, I_3 випливає нерівність

$$\min\left\{\frac{1}{2}, a_0, b_0\right\} \int_0^T \int_{\Pi_\nu} \left[|u_t|^2 + |u|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i t}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2\right] dxdt \leqslant 0,$$

тобто $\|u\|_{H^1(\Pi_\nu \times (0,T))} = 0$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A), (B), (C), (D); $F \in L^2(Q)$, $u_0 \in W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu)$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) – (4).*

Доведення. Для одержання умов існування розв'язку задачі (1) – (4) розглянемо в Q допоміжну задачу

$$\varepsilon u^\varepsilon_{tt} + u^\varepsilon_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_i t}\right)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} C_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i} + D(x,t)u^\varepsilon = F(x,t), \quad \varepsilon > 0, \tag{7}$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0, \tag{8}$$
$$u_t^\varepsilon|_{t=0} = 0, \tag{9}$$
$$u^\varepsilon(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\ = u^\varepsilon(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$
$$u_{x_j}^\varepsilon(x_1,...,x_{i-1},-\nu,x_{i+1},...,x_n,t) = \\ = u_{x_j}^\varepsilon(x_1,...,x_{i-1},\nu,x_{i+1},...,x_n,t) \quad \forall i,j \in \{1,...,n\}, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (7) – (11) називатимемо функцію u^ε, яка має такі властивості:

1) $u^\varepsilon \in H^1((0,T);W^{1,2}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu))$; $u_t^\varepsilon \in C([0,T];L^2(\Pi_\nu))$;

2) функція u^ε задовольняє (7) та рівність

$$\int_0^T\int_{\Pi_\nu}\Bigg[-\varepsilon\left(u_t^\varepsilon,v_t\right)+\left(u_t^\varepsilon,v\right)+\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_it},v_{x_j}\right)+\sum_{i,j=1}^n\left(B_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_i},v_{x_j}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i},v\right)+\left(D(x,t)u^\varepsilon,v\right)\Bigg]\,dxdt+\varepsilon\int_{\Pi_\nu}\left(u_t^\varepsilon,v\right)dx\Bigg|_{t=T}=$$
$$=\int_0^T\int_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),v\right)dxdt \tag{12}$$

для довільної функції v такої, що $v \in L^2\left((0,T);W^{1,2}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu)\right)$, $v_t \in L^2(Q)$.

Зауваження 1. Якщо $u^\varepsilon \in H^1((0,T);W^{1,2}_{\mathrm{per}}(\Pi_\nu))$, то

$$u_t^\varepsilon \in L^2\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right),\ D(x,t)u^\varepsilon \in H^1\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right),$$
$$\sum_{i,j=1}^n\left(A_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_it}+B_{ij}(x,t)u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j} \in L^2\left((0,T);H^{-1}(\Pi_\nu)\right),$$
$$\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u^\varepsilon_{x_i}\right) \in H^1\left((0,T);L^2(\Pi_\nu)\right).$$

Тоді з (7) випливає, що $u_{tt}^\varepsilon \in L^2\left((0,T);L^2(\Pi_\nu)+H^{-1}(\Pi_\nu)\right)$. Це включення разом з $u_t^\varepsilon \in L^2\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right)$ свідчить про те, що $u_t^\varepsilon \in C\left([0,T];L^2(\Pi_\nu)\right)$ [6, с. 20].

Доведемо існування розв'язку задачі (7) – (11) методом Гальоркіна. Нехай $\{\phi^\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ – база в просторі $L^2(\Pi_\nu)$, де $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $|\alpha|=|\alpha_1|+...+|\alpha_n|$. Приймемо, що $u^{\varepsilon,N}=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(t)\phi^\alpha(x)$, де коефіцієнти $c_\beta^N(t)$ ($|\beta|\leqslant N$) визначають із задачі

$$\varepsilon\sum_{|\alpha|\leqslant N}\left(c_\alpha^N(t)\right)''\int_{\Pi_\nu}\left(\phi^\alpha(x),\phi^\beta(x)\right)dx=-\int_{\Pi_\nu}\Bigg[\Bigg(\sum_{|\alpha|\leqslant N}\left(c_\alpha^N(t)\right)'\phi^\alpha(x),\phi^\beta(x)\Bigg)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^n\Bigg(A_{ij}(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N}\left(c_\alpha^N(t)\right)'\phi^\alpha_{x_i}(x)+B_{ij}(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(t)\phi^\alpha_{x_i}(x),\phi^\beta_{x_j}(x)\Bigg)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha^N(t)\phi_{x_i}^\alpha(x),\phi^\beta(x)\right)+ \tag{13}$$

$$+\left(D(x,t)\sum_{|\alpha|\leqslant N} c_\alpha^N(t)\phi^\alpha(x),\phi^\beta(x)\right)-\left(F(x,t),\phi^\beta(x)\right)\Bigg]\,dx,$$

$$c_\beta^N(0)=\int\limits_{\Pi_\nu}\left(u_0,\phi^\beta\right)dx,\qquad \left(c_\beta^N(0)\right)'=0,\quad (|\beta|\leqslant N). \tag{14}$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (13) є лінійною з неперервними коефіцієнтами, а тому вона має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (14). Доможимо рівність (13) на $\left[\left(c_\beta^N(t)\right)'+c_\beta^N(t)\right]e^{-\mu t}$ $(\mu>0)$, підсумуємо за $|\beta|\leqslant N$ та зінтегруємо по відрізку $[0,t_0]$, $0<t_0\leqslant T$. Результатом зазначених перетворень буде рівність

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\Bigg[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+\left(u_t^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_{x_jt}^{\varepsilon,N}+u_{x_j}^{\varepsilon,N}\right)+ \tag{15}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)\Bigg]e^{-\mu t}dxdt=$$

$$=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt.$$

За допомогою оцінок

$$I_4=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{4}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{\mu-2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}-\frac{\varepsilon\mu}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{\mu^2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_5=\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_{x_jt}^{\varepsilon,N}+u_{x_j}^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{a_0}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}-\frac{a^0}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_it}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left(b_0+\frac{\mu a_0}{2}-\frac{a^1}{2}-\frac{n^2\widehat{B}}{2a_0}\right)\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_6=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(u_t^{\varepsilon,N}+D(x,t)u^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Big|_{t=t_0}-\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Big|_{t=0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{2}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\left(d_0+\frac{\mu}{2}-\frac{\widehat{D}}{2}\right)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_7=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\sum_{i=1}^n\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\geqslant$$

$$\geqslant-\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{\widehat{C}}{\delta_1}\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{n\delta_1}{2}\left(\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right)\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

$$I_8=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left(F(x,t),u_t^{\varepsilon,N}+u^{\varepsilon,N}\right)e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{\delta_1}\left|F(x,t)\right|^2+\frac{\delta_1}{2}\left(\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right)\right]e^{-\mu t}dxdt,$$

приходимо до нерівності

$$\frac{1}{2}\int_{\Pi_\nu}\left[a_0\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Big|_{t=t_0}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Pi_\nu}\left[\frac{1}{2}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+(\mu-2)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dx\Big|_{t=t_0}+$$

$$+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\varepsilon\left(\frac{\mu}{2}-1\right)\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\frac{\varepsilon\mu^2}{2}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{(n+1)\delta_1}{2}\right)\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\right.$$

$$+\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^n\left|u_{x,t}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left(b_0+\mu\frac{a_0}{2}-\frac{a^1}{2}-\frac{n^2\widehat{B}}{2a_0}-\frac{\widehat{C}}{\delta_1}\right)\sum_{i=1}^n\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+$$

$$\left.+\left(d_0+\frac{\mu}{2}-\frac{\widehat{D}}{2}-\frac{(n+1)\delta_1}{2}\right)\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\frac{\varepsilon\mu}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}|F(x,t)|^2e^{-\mu t}dxdt, \tag{16}$$

де δ_1 та μ – такі додатні числа, що

$$\mu\geqslant 2,$$

$$\frac{1}{2}-(n+1)\delta_1\geqslant 0,$$

$$\mu-1+2d_0-\widehat{D}-(n+1)\delta_1\geqslant 0,$$

$$b_0+\mu a_0-a^1-\frac{n^2\widehat{B}}{a_0}-\frac{2\widehat{C}}{\delta_1}\geqslant 0.$$

Тоді з (16) випливає, що

$$\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2e^{-\mu t}dx\Bigg|_{t=t_0}+$$

$$+\min\left\{a_0,b_0,\frac{1}{2}\right\}\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Pi_\nu}\left[\left|u_t^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i t}^{\varepsilon,N}\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2\right]e^{-\mu t}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\frac{2C_1(F)}{\delta_1}+\varepsilon\mu\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}, \tag{17}$$

де

$$C_1(F)=\int\limits_0^{T}\int\limits_{\Pi_\nu}|F(x,t)|^2e^{-\mu t}dxdt.$$

Оскільки $u^{\varepsilon,N}\big|_{t=0}=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}c_\alpha^N(0)\phi^\alpha\to u_0$ в $L^2(\Pi_\nu)$ (тобто виконується умова (8)), то

$$\int\limits_{\Pi_\nu}\left[a^0\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^{\varepsilon,N}\right|^2+\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2\right]dx\Bigg|_{t=0}+\varepsilon\mu\int\limits_{\Pi_\nu}\left|u^{\varepsilon,N}\right|^2dx\Bigg|_{t=0}\leqslant M_0=\mathrm{const},$$

де M_0 не залежить від N.

Отже, з послідовності $\{u^{\varepsilon,N}\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{\varepsilon,N_k}\}$, що $u^{\varepsilon,N_k}\to u^\varepsilon$ слабко в $H^1\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right)$.

Покажемо, що знайдена функція u^ε є узагальненим розв'язком задачі (7) – (11). Домножимо (13) на довільну функцію $d_\beta(t)$, для якої d_β'' є абсолютно неперервною функцією, додамо одержані рівності за всіма β такими, що $|\beta|\leqslant N$, а результат зінтегруємо по відрізку $[0,T]$. Матимемо рівність

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\left(u_t^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon,N}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},\Phi_{x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon,N},\Phi\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon,N},\Phi\right)\right]dxdt+\varepsilon\int_{\Pi_\nu}\left(u_t^{\varepsilon,N},\Phi\right)dx\Bigg|_{t=T}=$$

$$=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}(F(x,t),\Phi)\,dxdt, \tag{18}$$

де $\Phi=\sum\limits_{|\beta|\leqslant N}d_\beta(t)\phi^\beta(x)$. Позначимо через $\mathbb{M}_N$ множину всіх таких Φ. Сукупність $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\mathbb{M}_p$ щільна в просторі $H^1\left((0,T);H^1(\Pi_\nu)\right)$. Перейшовши в (18) до границі при фіксованому Φ з $\mathbb{M}_p$, одержимо

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}\left[\varepsilon\left(u_{tt}^{\varepsilon},\Phi\right)+\left(u_t^{\varepsilon},\Phi\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\left(A_{ij}(x,t)u_{x_it}^{\varepsilon}+B_{ij}(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon},\Phi_{x_j}\right)+\right. \tag{19}$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(C_i(x,t)u_{x_i}^{\varepsilon},\Phi\right)+\left(D(x,t)u^{\varepsilon},\Phi\right)\right]dxdt=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_\nu}(F(x,t),\Phi)\,dxdt$$

для всіх $\Phi\in\mathbb{M}_p$. Оскільки $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\mathbb{M}_p$ щільна в просторі $H^1\left(\Pi_\nu\times(0,T)\right)$, то тотожність (19) правильна і для всіх Φ із $H^1\left(\Pi_\nu\times(0,T)\right)$, тобто u^ε задовольняє (12). Виконання умови (10) випливає з зображення розв'язку, а тому функція u належить до простору $H^1((0,T);W^{1,2}_{\text{per}}(\Pi_\nu))$.

Легко бачити, що оцінка (17) є правильною і для функції u^ε, тобто $u^\varepsilon\to u$ при $\varepsilon\to+0$ в просторі $H^1(\Pi_\nu\times(0,T))$. Тому в рівності (12) можна перейти до границі при $\varepsilon\to+0$, враховуючи, що

$$\varepsilon\int_{\Pi_\nu}(u_t^\varepsilon,v)\,dx\leqslant\varepsilon\left(\int_{\Pi_\nu}\left|u_t^\varepsilon\right|^2dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\Pi_\nu}|v|^2dx\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^{\frac43}}{2}\int_{\Pi_\nu}\left|u_t^\varepsilon\right|^2dx+\frac{\varepsilon^{\frac23}}{2}\int_{\Pi_\nu}|v|^2dx\to0,\quad\text{якщо }\varepsilon\to0.$$

Отже, знайдена функція u є узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) в Q. Теорему доведено.

Зауваження 2. *Оскільки граничні умови є періодичними, то при підвищенні гладкості коефіцієнтів системи (1) та початкової функції u_0, можна довести існування розв'язку майже скрізь та класичного розв'язку задачі (1), (2) в смузі $\mathbb{R}^n\times[0,T]$.*

---

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5.– С. 852–864.
2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. "География и геофизика". – 1948. – Т. 12. – №1. – С. 27–45.
3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М., 1976.
4. *Majchrowski M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equatons and pseudoparabolic equations // Demonstr. math. – 1993. – Vol. 26. – №1. – P. 255–275.
5. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol. 76. – №2. – P. 253–257.
6. *Хилькевич Г.И.* Аналог принципа Сен-Венана, задача Коши и первая краевая задача в неограниченной области для псевдопараболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36. – №3. – С. 229–230.
7. *Хилькевич Г.И.* О поведении решений псевдопараболических уравнений в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности // Дифференциальные уравнения и их приложения. – М., – 1984. – С. 170–175.
8. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations. – Texas: Austin, 1994.
9. *Гаевский Х., Грегѐр К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
10. *Ляшко С.І.* Аналог методу Гальоркіна для розв'язання псевдопараболічних рівнянь // Доп. АН УРСР. – 1991. – №8. – С. 54–55.
11. *Ляшко И.И., Ляшко С.И., Томашевская Т.В.* Приближенный метод решения псевдопараболических уравнений // Доп. АН України. – 1994. – №9. – С. 56–58.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR PSEUDOPARABOLIC SYSTEM

G. Domans'ka

Centre of Mathematical Modelling of Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics named after Ya.S.Pidstrygach of Ukrainian NAS
15 Dudayev Str. 79005 Lviv, Ukraine

The initial boundary value problem for linear pseudoparabolic system in $(n+1)$-dimensional parallelepiped is considered. The initial conditions are periodical. Sufficient conditions of existence and uniqueness of generalized solution are obtained.

Key words: linear pseudoparabolic system.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2001

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.126–138 Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.126–138

УДК 517.956

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Уляна ЖИДИК, Галина ЛОПУШАНСЬКА
Українська академія друкарства, вул.Підголоско, 19 79020 Львів, Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано умови, при яких регулярний всередині області розв'язок квазілінійного еліптичного рівняння $A(x, D)u = f(x, u, u_x)$ набуває на межі S узагальнених значень $F \in (C^\infty(S))'$.

Ключові слова: узагальнена функція, узагальнені граничні значення, квазілінійні еліптичні рівняння.

На підставі теорем про гомеоморфізми [1] у праці [2] вивчені граничні задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь у шкалі просторів Соболєва. У праці [3] виявлено, що регулярний всередині кулі в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ додатний розв'язок рівняння $\Delta u = u^q$ може набувати на межі кулі узагальнених значень, які є мірами при $q \in (1, 1 + \frac{2}{n-1})$, а при більших q узагальнених граничних значень-мір може не існувати.

У [4] в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ обмеженій замкненою поверхнею S класу C^∞, розглянута в двох еквівалентних формулюваннях задача Діріхле

$$A(x, D)u = f(x, u),\ x \in \Omega \tag{1}$$

$$u_{|S} = F, \tag{2}$$

де $A(x, D) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x)$ – еліптичний диференціальний оператор з гладкими коефіцієнтами, f – неперервна функція, $F \in D'(S) = (C^\infty(S))'$.

Нехай $\varrho(x)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в Ω функція, яка дорівнює нулю на S, а біля S має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega$ до поверхні S;
$m(\Omega) = \{u : \text{існує таке}\, k \geqslant 0, \text{що} \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx < \infty\}$,
$m_k(\Omega) = \{u : ||u|| = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx < \infty\}$,
$M(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m(\Omega)$, $M_k(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m_k(\Omega)$,
$m_{k,C} = \{u \in m_k(\Omega) : \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx \leqslant C\}$, $m_{k,C}$– замкнена підмножина повного метричного простору $m_k(\Omega)$.

Формулювання 1 задачі. Знайти в області Ω розв'язок $u \in M(\Omega)$ рівняння (1), який набуває на S узагальнених граничних значень $F \in D'(S)$, тобто задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi u dS =< \varphi, F >, \varphi \in D(S), \tag{3}$$

де S_ε – паралельна до S поверхня, розміщена на відстані ε від S, $x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu(x) \in S_\varepsilon$ при $x \in S$, вважаємо $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, $< \varphi, F >$ – результат дії узагальненої функції F на основну функцію φ.

У [5] доведено, що розв'язок відповідного (1) лінійного однорідного рівняння, який задовольняє граничну умову (3), належить класу $M(\Omega)$.

Нехай $Bu = B(x,D)u = a_0(x)\frac{\partial u}{\partial N_x} + \beta(x)$, $a_0(x) = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x))^2\right]^{1/2}$,

$\nu(x)$ – орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці x, $N_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_j(x)}{a_0(x)}$, $N = (N_1,\ldots,N_n)$ – конормаль для оператора A, $\beta \in C^\infty$, $\hat{B}u = Bu + \sum\limits_{j=1}^{n} e_i(x)\nu_i(x)$, $e_i(x) = a_i(x) - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}$.

Також використовуватимемо позначення: $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$, $D_0(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D(\overline{\Omega}) : \psi|_S = 0\}$, $X(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D_0(\overline{\Omega})$: існує таке $k \geqslant 0$, що $A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x)), x\to x_0 \in S\}$, $X_k(\overline{\Omega}) = \{\psi \in D_0(\overline{\Omega}) : A^*\psi(x) = O(\varrho^k(x)), x \to x_0 \in S\}$.

Формулювання 2 задачі. Знайти функцію $u \in m(\Omega)$, яка задовольняє тотожність

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)u(x)dx = \int\limits_\Omega \psi(x)f(x,u(x))dx - < \hat{B}\psi, F >, \psi \in D_0(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

Можна довести, що функція $u \in M_k(\Omega)$ тоді і тільки тоді є розв'язком задачі (1), (2) у формулюванні 1, коли вона задовольняє (4) при довільній $\psi \in X_k(\Omega)$. Звідси випливає необхідна умова розв'язності задачі

$$\int\limits_\Omega \psi(x)f(x,u(x))dx < \infty, \psi \in X_k(\overline{\Omega}), u \in m_k(\Omega). \tag{5}$$

У [4] доведено, що за умови (5) одночасно розв'язок u рівняння (1) класу $M(\Omega)$ та Bu набувають узагальнених граничних значень, а якщо існує неперервна та невід'ємна $\frac{\partial f}{\partial u}$, то задача (1)-(2) має не більше одного розв'язку. Зауважимо, що для єдиності розв'язку задачі достатньо, щоб $a(x) \leqslant 0$, $x \in \Omega$, та функція f була монотонно зростаючою за аргументом u.

Позначимо через $G(x,y)$ функцію Гріна задачі Діріхле для оператора A. Відомо [6], що при умовах

$$a(x) \leqslant 0, a(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial e_i(x)}{\partial x_i} \leqslant 0, x \in \Omega, \tag{6}$$

функція Гріна існує і єдина. Для деяких операторів A (наприклад, оператора Лапласа)

$$G(x,y) \leqslant 0, x,y \in \overline{\Omega}. \tag{7}$$

В [4] показано, що функція $u \in M(\Omega)$, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y,u(y))dy = - < \hat{B}(y,D)G(x,y), F >, x \in \Omega, \tag{8}$$

є розв'язком задачі (1)-(2) в обох формулюваннях.

У цій праці покращуємо визначені в [4] достатні умови розв'язності задачі (1)-(2).

Припускаємо виконаними умови (5) та (6).

Лема 1. *Нехай $\Phi = \Phi(x,u)$ визначена для $x \in \Omega, u \in m_k(\Omega)$, диференційовна за u,*

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|\Phi(x,u(x))|dx < \infty, \, u \in m_k(\Omega), \tag{9}$$

існують такі сталі m, M, що

$$0 < m \leqslant \Phi_u(x,u(x)) \leqslant M, \, u \in m_k(\Omega). \tag{10}$$

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння

$$\Phi(x,u) = 0 \tag{11}$$

у просторі $m_k(\Omega)$.

Доведення. Розглянемо оператор $Pu = u - \frac{1}{M+1}\Phi(x,u)$. Із (9) та означення простору $m_k(\Omega)$ одержуємо $\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|Pu(x)|dx < \infty, \, u \in m_k(\Omega)$, так що $P : m_k \to m_k$.
Для $u_1, u_2 \in m_k(\Omega)$ маємо
$||Pu_1 - Pu_2|| = \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|Pu_1(x) - Pu_2(x)|dx =$
$= \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|(u_1(x) - u_2(x)) - \frac{1}{M+1}(\Phi(x,u_1(x)) - \Phi(x,u_2(x)))|dx =$
$= \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|(u_1(x) - u_2(x))(1 - \frac{1}{M+1}\int\limits_0^1 \Phi_u(x, u_2(x) + \theta(u_1(x) - u_2(x)))d\theta)|dx \leqslant$
$\leqslant \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u_1(x) - u_2(x)|dx(1 - \frac{m}{M+1}) = M_1 \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u_1(x) - u_2(x)|dx,$
де $M_1 = \frac{M+1-m}{M+1} < 1$, а отже оператор P стиснений. За теоремою Банаха існує єдиний розв'язок $u \in m_k(\Omega)$ рівняння $Pu = u$, а отже, рівняння (11).

Лема 2. *Нехай $\Phi = \Phi(x,u)$ визначена для $x \in \Omega, u \in m_k(\Omega)$, диференційовна за u, $\Phi(x,u) \geqslant \Phi_1(x,u) + a_0 u$, $a_0 > 0$,*

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u(x))|dx \leqslant C_1, \, u \in m_{k,C}(\Omega), \tag{9'}$$

і виконується умова (10) для $u \in m_{k,C}(\Omega)$. Тоді рівняння (11) має єдиний розв'язок у просторі $m_{k,C}(\Omega)$ при $C > \frac{C_1}{a_0}$.

Доведення. Розглянемо оператор $Pu = u - \frac{1}{M+N}\Phi(x,u)$, $N > 0$. Оскільки $u - \frac{1}{M+N}\Phi(x,u) \leqslant u - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u) - \frac{a_0}{M+N}u = u(1 - \frac{a_0}{M+N}) - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u)$, то $||Pu|| \leqslant \int\limits_{\Omega} \varrho^k(x)|u(1 - \frac{a_0}{M+N}) - \frac{1}{M+N}\Phi_1(x,u)|dx \leqslant ||u||(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{C_1}{M+N}$. Виберемо N таким, щоб $a_0 < M + N$. Тепер для $u \in m_{k,C}(\Omega)$ маємо $||Pu|| \leqslant C(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{C_1}{M+N}$,

$||Pu|| < C$, якщо $C > \frac{C_1}{a_0}$. Отже, $P : u \in m_{k,C}(\Omega) \to u \in m_{k,C}(\Omega)$ при $C > \frac{C_1}{a_0}$. Як при доведенні леми 1 показуємо, що оператор P стиснений, і застосовуємо теорему Банаха.

Зауваження 1. Твердження леми 2 залишається правильним, якщо умову (9') замінити умовою

$$||\Phi_1|| = \int_\Omega \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u)|dx \leqslant A + B||u||^\alpha,\ A > 0,\ B > 0, \tag{9"}$$

$$0 < \alpha < 1, \text{ або } \alpha = 1 \text{ та } B < 1, \text{ або } \alpha > 1, \text{ та існує } \min_{0 \leqslant s < \infty}(Bs^\alpha - s) \leqslant -A.$$

Справді, тоді $||Pu|| \leqslant ||u||(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{A+B||u||^\alpha}{M+N} \leqslant C(1 - \frac{a_0}{M+N}) + \frac{A+BC^\alpha}{M+N} < C$ для $u \in m_{k,C}(\Omega)$ при досить великому C.

Зауваження 2. Якщо

$$|\Phi_1(x,u)| \leqslant A + B|u|^q,\ \ x \in \Omega,\ \ u \in m_{k,C}(\Omega),\ A \geqslant 0,\ B > 0,\ q \in (0,1), \tag{9"'}$$

то $||\Phi_1|| \leqslant A_0 + B_0||u||^q$, $A_0, B_0 > 0$.

Справді, $\int_\Omega \varrho^k(x)|\Phi_1(x,u)|dx \leqslant \int_\Omega \varrho^k(x)dx(A+ \ +B\int_\Omega \varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{1/s}\varrho^{k-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_0 + B||u||^{1/s}(\int_\Omega \varrho^k(x)dx)^{(s-1)/s} = A_0 + B_0||u||^q$ при $q = \frac{1}{s}$, де $A_0 = A\int_\Omega \varrho^k(x)dx$, $B_0 = B(\int_\Omega \varrho^k(x)dx)^{(s-1)/s}$.

Якщо $A_0 = 0$, то спочатку за нерівністю Гельдера оцінимо $B|u|^q \leqslant \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{|u|^{qr}}{r}$, $r, r' > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Одержуємо $|\Phi_1| \leqslant A_0 + B_0||u||^{qr}$ при $A_0 = \int_\Omega \varrho^k(x)dx(A + B^{r'}/r')$, $B_0 = \frac{1}{r}\left(\int_\Omega \varrho^k(x)dx\right)^{(s-1)/s}$, $s = \frac{1}{qr}$. Для $q \in (0,1)$ можна завжди вибрати $s > 1$ $(1 < r < \frac{1}{q})$.

Лема 3. *Для довільного мультиіндексу* α

$$D^\alpha \int_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx = O(\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y) + 1),\ y \in \Omega;$$

для довільних точок $y, x_0 \in S, k \geqslant 0,\ |\alpha| \leqslant k$

$$D^\alpha \int_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx = O(|y - x_0|^{k+3-n-|\alpha|} + 1).$$

Доведення. Нехай $y \in \Omega$, $v_\alpha(y) = D_y^\alpha \int_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx$. Функцію $v_\alpha(y)$ подамо у вигляді суми $v_{1\alpha}(y) + v_{2\alpha}(y) + v_{3\alpha}(y)$ трьох доданків відповідно до розбиття області Ω на $\Omega_1 = \{x \in \Omega : d(x) < \frac{d(y)}{2} < \frac{\varepsilon}{4}\}$, $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |x - y| < \frac{d(y)}{2}\}$, $\Omega_3 = \Omega \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. Нехай $\varepsilon > 0$, $h(x) = \begin{cases} 1, & d(x) \leqslant \varepsilon \\ 0, & d(x) > 2\varepsilon \end{cases}$, $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Для $x \in \Omega_1$ маємо $|x - y| \geqslant \frac{1}{2}d(y), 1 - h(x) = 0$. Тому $|v_{1\alpha}(y)| = \int_{\Omega_1} \varrho^k(x)D_y^\alpha\big(h(y)G(x,y)\big)dx = \int_{\Omega_1} h(x)\varrho^k(x)D_y^\alpha\big(h(y)G(x,y)\big)dx$. $|h(x)\varphi(x)| \leqslant$

$d^k(x)\varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in C(\overline{\Omega}_1)$. Згідно з [7], для довільного мультиіндексу α $|D^\alpha G(x,y)| = = |\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} G(x,y)| \leqslant C_\alpha(|x-y|^{2-n-|\alpha|}+1)$. Тоді $|v_{1\alpha}(y)| \leqslant C'_{1\alpha}(d^{2-n-|\alpha|}(y)+1)\int\limits_{\Omega_1} d^k(x)\varphi_0(x)dx$; $\int\limits_{\Omega_1} d^k(x)\varphi_0(x)dx \leqslant \int\limits_S dS \int\limits_0^{\frac{1}{2}d(y)} \xi^k d\xi\tilde{\varphi}_0(y) = C'_1 d^{k+1}(y)\tilde{\varphi}_0(y)$. Отже, $|v_{1\alpha}(y)| \leqslant C"_{1\alpha}(d^{k+1+2-n-|a|}(y) + d^{k+1}(y))\tilde{\varphi}_{1\alpha}(y) \leqslant (\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y)+1)\varphi_{1\alpha}(y)$, $\varphi_{1\alpha} \in C(\overline{\Omega})$.

Для $x \in \Omega_2$ маємо $\frac{1}{2}d(y) < d(x) < \frac{3}{2}d(y)$, тому $|D^\alpha(h(x)\varrho^k(x))| \leqslant d^\alpha(y)\varphi_\alpha(y)$, $\varphi_\alpha \in C(\overline{\Omega})$. Нехай $\delta > 0$-настільки мале, що $K_\delta(y) = \{x : |x-y| < \delta\} \subset \Omega_2$, $\Omega_{2\delta} = \Omega_2 \setminus K_\delta(y)$, $S_\delta(y) = \{x : |x-y| = \delta\}$. Тоді $v_{2\alpha}(y) = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\delta}} \varrho^k(x) D_y^\alpha(G(x,y)h(y))dx =$
$= \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega_{2\delta}} \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\varrho^k(x)(-D_x)^\beta(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx =$
$= \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\lim\limits_{\delta\to 0}\{\int\limits_{\Omega_{2\delta}} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx +$
$\sum\limits_{|\gamma|\leqslant|\beta|}\int\limits_{|x-y|=\delta} \varrho^k(x)\nu^\gamma(x)(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}D_x^\gamma(h(y)G(x,y))dS\}$.
У локальній розпрямляючій системі координат на сфері $\{x : |x-y| = \delta\}$

$$D_x^\gamma = \begin{cases} \sum\limits_{t\leqslant|\gamma|} R'_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t, & |\gamma| < 2 \\ \sum\limits_{t\leqslant 1} R_{\gamma t}(\xi, D')(\frac{\partial}{\partial\nu})^t + M_\gamma A(x,D), & 2i \leqslant |\gamma| < 2(i+1),\ i = 1, 2, \ldots \end{cases},$$

$R'_{\gamma t}(\xi, D') = \sum\limits_{|q|\leqslant|\gamma|-t} R'_{\gamma tq}(\xi)(D')^q$, $R_{\gamma t}(\xi, D') = \sum\limits_{|q|\leqslant|\gamma|-t-2i} R_{\gamma tq}(\xi)(D')^q$, оператор M_γ має порядок $|\gamma| - 2i$, $M_\gamma AG\,|_S = 0$. Тоді

$$v_{2\alpha}(y) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\lim_{\delta\to 0}\{\int\limits_{\Omega_{2\delta}} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dx +$$

$$\sum_{2i\leqslant|\gamma|\leqslant|\beta|<2(i+1)}\ \sum_{t=0}^{\min[|\gamma|-2i,1]}\ \sum_{|q|\leqslant|\gamma|-t-2i}\int\limits_{S_\delta}(D')^{*q}(\varrho^k(x)\nu^\gamma(x))R_{\gamma tq}(\xi)\times$$

$$\times\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^t(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G(x,y))dS\},$$

$(D')^{*q}$ – оператор, спряжений до D' на S_δ.

Оскільки $\varrho \in C^\infty(\Omega_2)$, а оператор $(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}$ не збільшує порядку особливості функції при $x = y$, то перша група доданків у виразі для $v_{2\alpha}(y)$ набуває вигляду
$\sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}\int\limits_{\Omega_2} D_x^\beta(\varrho^k(x))(D_x+D_y)^{\alpha-\beta}(h(y)G_0(x,y))dx$ з оцінкою
$\sum\limits_{|\beta|\leqslant|\alpha|} C_{\alpha\beta}(d^2(y)+1)d^{k-\beta_\nu}(y)h(y)\tilde{\varphi}_{2\alpha}(y) \leqslant (\varrho^{k+2-|\alpha|}(y)+1)\varphi_{2\alpha}(y)$, $\varphi_{2\alpha} \in C(\overline{\Omega})$.
Друга група доданків (інтегралів за сферою $\{x : |x-y| = \delta\}$) має оцінку $\delta^{2-t}\mu_\alpha(y)$, $\mu_\alpha \in C(\overline{\Omega})$, $t \leqslant 1$, а тому має границею при $\delta \to 0$ неперервну функцію.

Для $x \in \Omega_3$ підінтегральний вираз в $v_{3\alpha}$ є нескінченно диференційовною функцією y, тому $v_{3\alpha} = \varphi_{3\alpha} \in C(\overline{\Omega})$. Одержуємо $|v_\alpha(y)| \leqslant (\varrho^{k+3-n-|\alpha|}(y)+1)\varphi_\alpha(y)$, $\varphi_\alpha \in C(\overline{\Omega})$.

Нехай $\Phi(x,u) = u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u(y))dy + g(x) = u(x) + \Phi_1(x,u)$.

Маємо
$\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\Phi(x,u(x))|dx \leqslant \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|u(x)|dx + \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx +$
$+\int\limits_\Omega |\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx||f(y,u(y))|dy.$

Відомо, що існує єдиний розв'язок ψ задачі

$$A^*\psi(x) = \varrho^k(x),\ x \in \Omega,\ \psi|_S = 0,$$

$\psi \in X_k(\overline{\Omega}) \subset X(\overline{\Omega}) \subset D_0(\overline{\Omega})$ і має зображення $\psi(y) = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx$.

За лемою 3 $\psi(y) = O(\varrho^{k+3-n}(y)+1)$, $y \to x_0 \in S$ при $n > 2$.

Нехай Ω_ε – область обмежена поверхнею S_ε. У виразі
$\int\limits_\Omega |\psi(y)f(y,u(y))|dy = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy$
маємо $\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\psi(y)f(y,u(y))|dy \leqslant C\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} (\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy$ за лемою 3. Припускаючи, що

$$\int\limits_\Omega (\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy < \infty,\ u \in m_k(\Omega), \tag{12}$$

одержуємо скінченність $\int\limits_\Omega |\psi(y)f(y,u(y))|dy$ для довільних $\psi \in X_k(\overline{\Omega})$, $u \in m_k(\Omega)$. Отже, з (12) випливає (5).

Якщо умову (12) замінити умовою

$$\int\limits_\Omega (\varrho^{k+3-n}(y)+1)|f(y,u(y))|dy \leqslant C',\ u \in m_{k,C}(\Omega), \tag{12'}$$

то одержимо, що $\int\limits_\Omega |\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx||f(y,u(y))|dy \leqslant C''$ для $u \in m_{k,C'}(\Omega)$. Крім того, при $||g|| \leqslant C'''$ матимемо $||\Phi_1|| \leqslant C'' + C''' = C_1$. Отже, з (12') та обмеженості $||g||$ випливає виконання умови (9').

Маємо $\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u(y))dy|dx \leqslant \int\limits_\Omega (-\int\limits_\Omega \varrho^k(x)G(x,y)dx|)|f(y,u(y))|dy = -\int\limits_\Omega \psi(y)|f(y,u(y))|dy < \infty$, якщо виконуються умови (7) та (12). Якщо, крім того, $||g||_k < \infty$, то виконується умова (9) леми 1 для вибраної функції Φ.

Нехай $(Pu)(x) = u(x) - \frac{1}{N}(u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u)dy)$. Якщо виконується умова (7) та $f'_u \geqslant 0$ для $u \in m_k(\Omega)$, то $||Pu_1 - Pu_2|| \leqslant \frac{1}{N}[(N-1)||u_1-u_2|| + \int\limits_{\Omega'}(-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega'} \varrho^k(x)G(x,y)dx)f'_u(y,u)|u_1(y)-u_2(y)|dy]$, де $\Omega' \subset \Omega$, $u_1 - u_2$ зберігає знак в Ω'. В $\Omega\setminus\Omega' \times \Omega'$ функція G неперервна. Вибираючи значення $\varrho(x)$ досить малим при $d(x) \geqslant \varepsilon$, одержуємо $(-\int\limits_{\Omega\setminus\Omega'} \varrho^k(x)G(x,y)dx) = O(\varepsilon)$ для довільного $y \in \Omega'$. Тому якщо існує така стала $L_1 > 0$, що

$$|\varrho^{-k}(y)f_y(y,u)| \leqslant L_1,\ y \in \Omega,\ u \in m_k(\Omega),\ \ L(\varepsilon)L_1 < 1, \tag{13}$$

то $||Pu_1 - Pu_2|| \leqslant \frac{N-1+L_2\varepsilon}{N}||u_1-u_2|| \leqslant N_1||u_1-u_2||$, $N_1 < 1$. З теореми Банаха одержуємо такий висновок.

Теорема 1. *Нехай функція f неперервна, виконуються умови (7) та (12), $f'_v(x,v) \geqslant 0\,(x \in \Omega,\, v \in m_k(\Omega))$ та задовольняє (13), $g \in m_k(\Omega)$. Існує єдиний розв'язок $u \in m_k(\Omega)$ інтегрального рівняння*

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y, u(y))dy + g(x) = 0. \tag{14}$$

Якщо виконана умова (12') замість (12) та $g \in m_{k,C'''}(\Omega)$, то існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (14) $\;u \in m_{k,C}(\Omega)$ при $C > C'' + C'''$.

Зауваження 3. Якщо

$$|f(x,u)| \leqslant A + B|u|^q,\ A \geqslant 0,\ B > 0,\ l \in N,\ k \geqslant n - l,\ 0 < q < \frac{1}{k+1}, \tag{12"}$$

то $\int\limits_{\Omega}(1 + \varrho^{k+l-n}(x))|f(x,u(x))|dx \leqslant A_0 + B_0||u||^{\alpha}$, причому $A_0 > 0$, $B_0 > 0$, $\alpha = qr = q_1 r_1 < 1$.

Справді, як у зауваженні 2, використаємо нерівність Гельдера $B|u|^q \leqslant \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{|u|^{qr}}{r}$, $r, r' > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ та позначимо $qr = \frac{1}{s}$. Тоді $\int\limits_{\Omega}(A + B|u|^q)dx \leqslant A + \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega} \varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{\frac{1}{s}}\varrho^{-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_1 + \frac{1}{r}||u||^{\frac{1}{s}}(\int\limits_{\Omega}\varrho^{-\frac{k}{s-1}}(x)dx)^{\frac{s-1}{s}} \leqslant A_1 + B_1||u||^{\frac{1}{s}}$, якщо $(s-1)(s-k-1) > 0$; $\int\limits_{\Omega}\varrho^{k+l-n}(x)(A + \frac{B^{r'}}{r'} + \frac{1}{r}|u|^{\frac{1}{s}})dx \leqslant A_2 + \frac{1}{r}\int\limits_{\Omega}\varrho^{\frac{k}{s}}(x)|u|^{\frac{1}{s}}\varrho^{k+l-n-\frac{k}{s}}(x)dx \leqslant A_2 + \frac{1}{r}||u||^{\frac{1}{s}}(\int\limits_{\Omega}\varrho^{\frac{s(k+l-n)-k}{s-1}}(x)dx)^{\frac{s-1}{s}} \leqslant A_2 + B_2||u||^{\frac{1}{s}}$, якщо $(s-1)\big(s(k+l+1-n)-(k+1)\big) > 0$. При $k \geqslant n-l$ існує $s > k+1$, яке задовольняє обидві умови, так що $\int\limits_{\Omega}(1+\varrho^{k+l-n}(x))(A+B|u|^q)dx \leqslant (A_1+A_2)+(B_1+B_2)||u||^{\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{s} = qr$.

Оскільки додаткових умов на r немає, то такий самий результат одержуємо при наявності доданків вигляду $B_1||v||^{q_1}$ в оцінці функції f: вибираємо r_1 так, щоб $q_1 r_1 = qr$ і одержуємо

$$\int\limits_{\Omega}(1 + \varrho^{k+l-n}(x))(A + B|u|^q + B_1|v|^{q_1})dx \leqslant A_0 + B_0||u||^{\alpha} + B_{10}||v||^{\alpha},$$

$A, A_0 \geqslant 0$, $B, B_1, B_0, B_{10} > 0$, $l \in N$, $k \geqslant n - l$, $0 < q, q_1 < \frac{1}{k+1}$, $\alpha = qr = q_1 r_1 < 1$.

Функція f, яка задовольняє умову (12") при $l = 3$ або для якої $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C'$, також задовольняє умови (12') та (12) при $k \geqslant n - 3$.

Зауваження 4. Якщо $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C_1$ та існує таке $r > \frac{n}{2}$, що $\int\limits_{\Omega}|f|^r \leqslant C_2$ для $u \in m_{k,C}(\Omega)$, то $-\int\limits_{\Omega}\varrho^k(x)G(x,y)dx|)|f(y,u(y))|dy \leqslant C_1$ для $x \in \Omega$, $u \in m_{k,C}(\Omega)$.

Справді, $\int\limits_{\Omega}|x-y|^{2-n}|f(y,u)|dy \leqslant \int\limits_{\Omega}[\frac{|x-y|^{(2-n)r'}}{r'} + \frac{|f|^r}{r}]dy \leqslant C'$ при $r'(2-n) > -n$, тобто $r > \frac{n}{2}$.

Наслідок 1. *Якщо функція f задовольняє (12") або існують такі додатні сталі C'_1, C'_2 та $r \in \left(1, 1 + \frac{n}{k+1-n}\right)$, що $\int\limits_{\Omega}|f|dy \leqslant C'_1$, $\int\limits_{\Omega}|f|^r \leqslant C'_2$ для довільної*

$u \in m_{k,C}(\Omega)$; виконуються умови (7),(13), $f_u \geqslant 0$, $g \in m_{k,C_3'}(\Omega)$, то існує єдиний розв'язок рівняння (14) у класі $m_{k,C}(\Omega)$.

Нехай тепер $g(x) =< B_y G(x,y), F >$. За властивостями функції Гріна $g \in C^\infty(\Omega)$. Узагальнена функція F має скінченний порядок сингулярності на S, тому існують такі число $p \in N$ та функції $f_\alpha \in L_1(S)$, що $< \varphi, F >= \sum\limits_{|\alpha| \leqslant p} \int\limits_S D^\alpha \varphi f_\alpha dS$ для довільної $\varphi \in D(S)$. Тоді $\int\limits_\Omega \varrho^k(x) g(x) dx =$ $= \int\limits_\Omega \varrho^k(x) < B_y G(x,y), F > dx =< \int\limits_\Omega \varrho^k(x) B_y G(x,y) dx, F >=$ $= \sum\limits_{|\alpha| \leqslant p} \int\limits_S D_y^\alpha \big(\int\limits_\Omega \varrho^k(x) \hat{B}_y G(x,y) dx \big) f_\alpha(y) dS_y$. За лемою 3 $D_y^\alpha \int\limits_\Omega \varrho^k(x) \hat{B}_y G(x,y) dx \leqslant \tilde{C}$, якщо $k + 2 - n \geqslant |\alpha|$ при $|\alpha| \leqslant p$. Тому $\int\limits_\Omega \varrho^k(x) g(x) dx \leqslant \tilde{C}' \int\limits_S \sum\limits_{|\alpha| \leqslant p} |f_\alpha(y)| dS \leqslant$ $\tilde{C}" < \infty$ при $k \geqslant p - 2 + n$. Отож, при $s(F) \leqslant p$, $k \geqslant p - 2 + n$ існує така стала $C"'$, що $\int\limits_\Omega \varrho^k(x) |g(x)| dx \leqslant C"'$. В умовах теореми 1 одержуємо розв'язність інтегрального рівняння (14) у $m_{p-2+n}(\Omega)$ чи $m_{p-2+n,C}(\Omega)$ для $g(x) =< B_y G(x,y), F >$ при $s(F) \leqslant p$.

З'ясуємо, коли цей розв'язок належить $C^2(\Omega)$. Нехай $\varepsilon > 0$, $h(x) = \begin{cases} 1, \, d(x) \leqslant \varepsilon \\ 0, \, d(x) > 2\varepsilon \end{cases}$, $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Маємо $(1 - h(x)) u(x) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (1 - h(x)) G(x,y) f\big(y, u(y)\big) dy$ $+ \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (1 - h(x)) G(x,y) f\big(y, u(y)\big) dy + (1 - h(x)) g(x)$, де $g(\cdot) =< B_y G(\cdot, y), F > \in$ $C^\infty(\Omega)$. Функція $G_1(x,y) = (1 - h(x)) G(x,y) \neq 0$ при $x \in \Omega_\varepsilon, y \in \Omega$, тому $G_1 \in C^\infty(\Omega_\varepsilon \times \Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$, $G_1 \mid_{y \in S} = 0$, а отже, $G_1(x, \cdot) \in D_0(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega_\varepsilon$. У припущенні (6) $A_y^* G_1(x,y) = 0$ і тому $G_1(x, \cdot) \in D_0(\overline{\Omega})$ для довільних $x \in \Omega_\varepsilon$ та k. За умовою (5) $w_\varepsilon(x) = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} G_1(x,y) f\big(y, u(y)\big) dy < \infty$ при $u \in m_k(\Omega)$ і $w_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. За доведеним вище $g \in C^\infty(\Omega)$. Тому функція u задовольняє рівняння

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (1 - h(x)) G(x,y) f\big(y, u(y)\big) dy + g_1(x, u(x)), \; x \in \Omega_\varepsilon,$$

де $g_1(\cdot, u) = \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} G_1(\cdot, y) f\big(y, u(y)\big) dy + g(\cdot) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ для довільної $u \in m_k(\Omega)$.

Тепер з (5), властивостей функції G_1 та об'ємного потенціалу випливає, що $u \in C(\Omega_\varepsilon)$ при неперервній f, а якщо f неперервно диференційовна, то $u \in C^2(\Omega_\varepsilon)$ для довільного $\varepsilon > 0$. Отже, теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $F \in D'(S)$, $s(F) \leqslant p$, $p \geqslant 0$, функція f неперервно диференційовна, виконана умова (7). Якщо*

$$\int\limits_\Omega |f(y, u(y))| dy < \infty, \; u \in m_{p-2+n}(\Omega), \tag{12"'}$$

$f_v'(x,v) \geqslant 0$, $x \in \Omega$, $v \in m_{p-2+n}(\Omega)$ та задовольняє умову (13), то існує єдиний розв'язок $u \in M_{p-2+n}(\Omega)$ узагальненої задачі Діріхле. Якщо замість (12"') маємо

$$\int\limits_\Omega |f(y, u(y))| dy \leqslant C', \; u \in m_{p-2+n,C}(\Omega),$$

(13) виконується для довільної $u \in m_{p-2+n,C}(\Omega)$, *то існує єдиний розв'язок узагальненої задачі Діріхле* $u \in M_{p-2+n,C}(\Omega)$ *при досить великому* $C > 0$.

Наслідок 2. *Нехай* $F \in D'(S)$, $s(F) \leqslant p$, $p \geqslant 0$, *функція* f *неперервно диференційовна, виконана умова (7) та умови наслідку 1 при* $k = p+n-2$. *Існує єдиний розв'язок* $u \in M_{p-2+n,C}(\Omega)$ *узагальненої задачі Діріхле (1)-(2).*

Приклад 1. Перевіримо виконання умов теореми 2 для задачі

$$\Delta u = \mu|u|^q \operatorname{sign} u \text{ в } \Omega,\ \mu q > 0 \tag{15}$$

$$u_{|S} = F. \tag{16}$$

Для оператора Лапласа умова (7) виконується; $f_u = \mu q|u|^{q-1}\operatorname{sign}^2 u \geqslant 0$ при $\mu q > 0$; якщо існують такі додатні сталі C, C', L, що $\int\limits_\Omega |u|^q dy \leqslant C'$ та $|\varrho^{2-p-n}(y) f_u(y,u)| \leqslant L$ для $u \in m_{p-2+n,C}(\Omega)$, то за теоремою 2 існує єдиний розв'язок задачі (15)-(16) у класі $m_{p-2+n,C}(\Omega)$.

Нехай $\tilde{m}_{p-2+n}(\Omega) = \{u \in m_{p-2+n}(\Omega) : u(x) = O(\varrho^l(x)) \text{ біля } S\}$. $\int\limits_\Omega |u(y)|^q dy < \infty$ для $u \in \tilde{m}_{p-2+n}(\Omega)$, якщо $p-2+n+l > -1$ та $ql > -1$; $\varrho^{2-p-n}(y) f_u(y,u) = O(\varrho^{2-p-n+(q-1)l}(y))$ і обмежена при $2-p-n+(q-1)l \geqslant 0$. Бачимо, що таке l існує при $q > 1$, $q \in (0, \frac{1}{p+n-1})$, $q < -\frac{1}{p+n-1}$ і при таких q існує єдиний розв'язок задачі (15)-(16) у класі $\tilde{m}_{p-2+n}(\Omega)$; $u \in C^2(\Omega) \cap \tilde{m}_{p-2+n}(\Omega) = \tilde{M}_{p-2+n}(\Omega)$ при $q > 1$.

Введемо нормовані функціональні простори $m^1(\Omega) = \{u : \text{існує таке } k \geqslant 0, \text{що} ||u||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)[|u(x)| + \sum\limits_{i=1}^n |u_{x_i}|]dx < \infty\}$ та відповідно $m^1_k(\Omega) = \{u : ||u||_k < \infty\}$, $M^1(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m^1(\Omega)$, $M^1_k(\Omega) = C^2(\Omega) \cap m^1_k(\Omega)$, $m^1_{k,C} = \{u \in m^1_k(\Omega) : ||u||_k \leqslant C\}$, $m^1_{k,C}$ – обмежена замкнена випукла підмножина банахового простору $m^1_k(\Omega)$.

Нехай $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, функція $f = f(x, u, u_x)$ визначена для $x \in \Omega$, $u \in m^1(\Omega)$ та неперервно диференційовна. Розглянемо узагальнену задачу Діріхле для рівняння

$$Au(x) = f(x, u, u_x),\ x \in \Omega \tag{17}$$

у таких самих формулюваннях, як задачу (1),(2), замінивши умову $u \in M(\Omega)$ (у задачі (1),(2)) умовою $u \in M^1(\Omega)$. Існування розв'язку цієї задачі випливає з існування розв'язку інтегродиференціального рівняння

$$u(x) - \int\limits_\Omega G(x,y) f(y, u, u_y) dy = - < \hat{B}_y G(x,y), F >,\ x \in \Omega \tag{18}$$

у просторі $M^1(\Omega)$.

Використаємо принцип Шаудера [9, с.291] та наслідок з теореми Шаудера-Тихонова [10]: якщо у топологічному просторі E замкнена випукла оболонка довільної компактної множини є компактна, оператор P – цілком неперервний і обмежену замкнену випуклу множину K відображає в обмежену замкнену випуклу множину $P(K) \subset E$, то в E існує нерухома точка оператора P.

Введемо оператор $Pu(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy + g(x)$ та оцінимо $||Pu||_k$:

$$||Pu||_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|Pu(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|(Pu)_{x_j}|dx = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy+$$
$$+g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|(\int\limits_\Omega G(x,y)f(y,u,u_y)dy)_{x_j} + g_{x_j}|dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega (\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|G(x,y)|dx)|f(y,u,u_y)|dy + \int\limits_\Omega (\int\limits_\Omega \varrho^k(x) \sum_{j=1}^n |G_{x_j}(x,y)|dx)|f(y,u,u_y)|dy+$$
$$+\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g_{x_j}|dx \leqslant \tilde{C} \int\limits_{\Omega_\varrho} (\varrho^{k+2-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy+$$
$$+\int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g(x)|dx + \sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|g_{x_j}|dx.$$

Бачимо, що при умовах

$$g \in m^1_{k,C}(\Omega),\ \int\limits_\Omega (\varrho^{k+2-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy \leqslant C_4,\ u \in m^1_{k,C}(\Omega) \tag{19}$$

попередні оцінки є правильними і оператор P діє з простору $m^1_k(\Omega)$ в себе, більше того, обмежену замкнену випуклу підмножину $m^1_{k,C}(\Omega)$ простору $m^1_k(\Omega)$ він відображає в обмежену замкнену випуклу підмножину $m^1_{k,C_1}(\Omega)$ цього простору.

Якщо функція f задовольняє умову

$$\begin{gathered}|f(x,u,u_x)| \leqslant A + A_0|u|^{q_0} + \sum_{j=1}^n A_j|u_{x_j}|^{q_j},\\ h \geqslant 0,\ h_j > 0,\ q_j < \frac{1}{k+1},\ k \geqslant n-2,\ j=\overline{0,n},\end{gathered} \tag{19'}$$

то з попередніх зауважень випливає, що $||Pu||_k \leqslant H + B||u||^\alpha$, $H, B > 0$, $\alpha < 1$, так що така f задовольняє умову (19) і при $k \geqslant n-2$ оператор P діє з $m^1_{k,C}(\Omega)$ в $m^1_{k,C}(\Omega)$.

Оскільки $\varrho^k u$, $\varrho^k u_{x_i} \in L_1(\Omega)$ для $u \in m^1_k(\Omega)$, то за теоремою Ріса [9, с. 242] множина $K \subset m^1_k(\Omega)$ компактна тоді і тільки тоді, коли:

1') існує така стала C, що $||u||_k \leqslant C$ для довільної $u \in K$;

2') для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для таких $z \in \Omega$, що $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in K$

$$\int\limits_\Omega \left|\varrho^k(x+z)u(x+z) - \varrho^k(x)u(x)\right|dx+$$
$$\sum_{j=1}^n \int\limits_\Omega \left|\varrho^k(x+z)u_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)u_{x_j}(x)\right|dx \leqslant \varepsilon.$$

Для довільних натурального n, $u_i \in m^1_k(\Omega)$, таких чисел $\alpha_i \geqslant 0$, що $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, також $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i u_i \in m^1_k(\Omega)$; якщо u_i задовольняють умови 1) та 2), то також $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i u_i$ задовольняє ці умови, так що замкнена випукла оболонка довільної компактної множини $K \subset m^1_k(\Omega)$ компактна.

Покажемо, що P – компактний оператор на $m_k^1(\Omega)$. Для цього за теоремою Ріса необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) існує така стала C_1, що $||Pu||_k \leqslant C_1$ для довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для таких $z \in \Omega$, що $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \left|\varrho^k(x+z)(Pu)(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)(x)\right|dx+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega} \left|\varrho^k(x+z)(Pu)_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)_{x_j}(x)\right|dx \leqslant \varepsilon.$$

З (19) випливає виконання умови 1. Доведемо 2. Розглянемо

$$\int\limits_{\Omega}|\int\limits_{\Omega}[\varrho^k(x+z)G(x+z,y) - \varrho^k(x)G(x,y)]f(y,u,u_y)dy|dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}|\int\limits_{\Omega}[\varrho^k(x+z)G_{x_j}(x+z,y) - \varrho^k(x)G_{x_j}(x,y)]f(y,u,u_y)dy|dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}|\varrho^k(x+z)g(x+z) - \varrho^k(x)g(x)|dx + \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}|\varrho^k(x+z)g_{x_j}(x+z) - \varrho^k(x)g_{x_j}(x)|dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega}|\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)d\alpha\, z_l\, f(y,u,u_y)dy|dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}|\int\limits_{\Omega}\sum_{l,j=1}^{n}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)G_{x_j}(x+\beta z,y)\big)d\alpha\, z_l\, f(y,u,u_y)dy|dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}|\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)g(x+\alpha z)\big)d\alpha\, z_l\,|dx + \int\limits_{\Omega}|\sum_{l,j=1}^{n}\int\limits_{0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)g_{x_j}(x+$$
$$\beta z)\big)d\alpha\, z_l\,|dx \leqslant \sum_{l=1}^{n}\{\int\limits_{\Omega}\Big[\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{0}^{1}|\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)|d\alpha\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\Big(\int\limits_{0}^{1}|\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)G_{x_j}(x+\beta z,y)\big)|d\alpha\Big)dx\Big]|f(y,u,u_x)|dy+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{0}^{1}|\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)g(x+\alpha z)\big)|d\alpha\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{0}^{1}|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\beta z)g_{x_j}(x+\beta z)\big)|d\alpha\Big)dx\}|z_l|,\ |z| \leqslant \delta.$$

За лемою 3 $\int\limits_{\Omega}|\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G(x+\alpha z,y)\big)|dx \leqslant C_l'(\varrho^{k+2-n}(y+\alpha z)+1)$,

$\int\limits_{\Omega}|\frac{\partial}{\partial x_l}\big(\varrho^k(x+\alpha z)G_{x_j}(x+\alpha z,y)\big)|dx \leqslant C_{lj}'(\varrho^{k+1-n}(y+\alpha z)+1)$.

Якщо $g \in m_{k-1}^1(\Omega)$, $g_{x_j} \in m_k^1(\Omega)$ та існує така стала C', що

$$\int\limits_{\Omega}(\varrho^{k+1-n}(y)+1)|f(y,u,u_y)|dy \leqslant C',\ u \in m_{k,C}^1(\Omega), \tag{20}$$

одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \frac{\varepsilon}{C"}$ ($C"$ – певна додатна стала, яка виражається через $C, C', C_1', C_{1j}', sup|\varrho_{x_j}|$), що для $z \in \Omega$, $|z| \leqslant \delta$, та довільної $u \in m_{k,C}^1(\Omega)$ маємо

$\int\limits_{\Omega}\left|\varrho^k(x+z)(Pu)(x+z) - \varrho^k(x)(Pu)(x)\right|dx+$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\left|\varrho^k(x+z)(Pu)_{x_j}(x+z)-\varrho^k(x)(Pu)_{x_j}(x)\right|dx\leqslant C"\delta=\varepsilon,$$

тобто виконується 2). Зауважимо, що друга з умов (19) випливає з (20).

Ми показали, що при умовах (20) та $g\in m^1_{k-1,c_1}(\Omega)$, $g_{x_j}\in m^1_{k,c_2}(\Omega)$ оператор P є компактний. З'ясуємо, коли він є неперервним.

Нехай $u_1,u_2\in m^1_k(\Omega)$. Розглянемо

$$\int_{\Omega}\varrho^k(x)\big[\big|\int_{\Omega}G(x,y)\big(f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})\big)dy\big|+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\big[\big|\int_{\Omega}G_{x_j}(x,y)\big(f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})\big)dy\big|\big]dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\Omega}\big[\int_{\Omega}\varrho^k(x)|G(x,y)|dx+\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\varrho^k(x)|G_{x_j}(x,y)|dx\big]|f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})|dy.$$

Припускаючи, що f задовольняє умову Гельдера за $u,u_{x_1},\dots,u_{x_1}$ з показником $\alpha<\frac{1}{k+1}$ або умову

$$|f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})|\leqslant L\big[|u_1-u_2|^{\alpha_0}+\sum_{j=1}^{n}|u_{1y_j}-u_{2y_j}|^{\alpha_j}\big]$$
$$y\in\Omega,\ u_1,u_2\in m^1_{k,C}(\Omega)\ \alpha_j\in\left(0,\frac{1}{k+1}\right)\tag{21}$$

та враховуючи зауваження 3, одержуємо

$||Pu_1-Pu_2||_k\leqslant C_6||u_1-u_2||^{\alpha}_k$, $u_1,u_2\in m^1_{k,C}(\Omega)$, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$, при $k\geqslant n-1$, тобто оператор P є неперервним в $m^1_{k,C}(\Omega)$ при $k\geqslant n-1$.

У припущенні диференційовності f за $u,u_{x_1},\dots,u_{x_1}$ матимемо

$$f(y,u_1,u_{1y})-f(y,u_2,u_{2y})=$$
$$=\int_0^1 f'_u(y,u_2+\alpha(u_1-u_2),u_{2y}+\alpha(u_{1y}-u_{2y}))d\alpha(u_1-u_2)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 f'_{u_{y_j}}(y,u_2+\alpha(u_1-u_2),u_{2y}+\alpha(u_{1y}-u_{2y}))d\alpha(u_{1\,y_j}-u_{2\,y_j}),$$

тому якщо існує така стала $L_1>0$, що

$$\big(\varrho^{-k}(y)+\varrho^{1-n}(y)\big)|f_u|\leqslant L_1,\ \big(\varrho^{-k}(y)+\varrho^{1-n}(y)\big)|f_{u_{y_j}}|\leqslant L_1,$$
$$u\in m^1_k(\Omega),\ j=\overline{1,n},\tag{22}$$

то з попередних нерівностей: $||Pu_1-Pu_2||_k\leqslant C_7||u_1-u_2||_k$, $u_1,u_2\in m^1_k(\Omega)$, тобто оператор P є неперервним в $m^1_k(\Omega)$.

Ми показали, що для $g\in m^1_{k-1,c_1}(\Omega)$, $g_{x_j}\in m^1_{k,c_2}(\Omega)$, $k\geqslant n-1$, при умові (21) за теоремою Шаудера існує розв'язок рівняння (18) у просторі $m^1_{k,C}(\Omega)$ (C – досить велике число), а при умовах (20) та (22) за наслідком теореми Шаудера-Тихонова існує розв'язок рівняння (18) у просторі $m^1_k(\Omega)$.

З попередніх зауважень при $g(x)=<B_yG(x,y),F>$ випливає теорема.

Теорема 3. *Нехай $F\in D'(S)$, $s(F)\leqslant p$, $p\geqslant 0$, функція f неперервно диференційовна, існує така стала C', що $\int_{\Omega}|f(y,u,u_y)|dy\leqslant C'$ при $u\in m^1_{p+n,C}(\Omega)$. Крім того, якщо f задовольняє умову (21) при $k=p+n$, то існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (17), (2) у класі $M^1_{p+n,C}(\Omega)$ при досить великих C, якщо виконуються умови (22) при $k=p+n$, то існує розв'язок узагальненої задачі*

Діріхле (17), (2) у класі $M^1_{p+n}(\Omega)$. *Зокрема, якщо* $f = f(x,u)$, *задовольняє умову Гельдера за* u *з показником* $\alpha < \frac{1}{p+n}$, *то при досить великих* C *існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (17), (2) у класі* $M_{p-1+n,C}(\Omega)$; *якщо існують такі сталі* $C_1, L > 0$, *що*

$$\int\limits_{\Omega} |f(y,u)|dy \leqslant C_1, \ \left(\varrho^{1-p-n}(y) + \varrho^{2-n}(y)\right)|f'_u| \leqslant L, \, y \in \Omega, \, u \in m_{p-1+n,C}(\Omega),$$

то існує розв'язок узагальненої задачі Діріхле (1), (2) у класі $M_{p-1+n}(\Omega)$.

---

1. *Березанский Ю.М., Крейн С.Г., Ройтберг Я.А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений// Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148. – N 4. – С.745-748.
2. *Крейн С.Г., Симонов А.С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения//Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167. – N 6. – С.1226-1229.
3. *Veron L.* The boundary traces of positive solutions of some nonlinear elliptic equations// Book of Abstr. of Int. conf. "Nonlinear partial diff. equat." – Donetsk. – 1997. – P.169.
4. *Лопушанська Г.П.* Задача Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння у просторів розподілів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип.34. – С.26-31.
5. *Гупало Г.С.* Про узагальнену задачу Діріхле для диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1969. – Вип.4. – С.59-41.
6. *Кошляков Н.С. и др.* Уравнения в частных производных математической физики. – М., 1970.
7. *Красовский Ю.П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач// Изв. АН СССР. – 1969. – Т.33. – N 1. – С.109-137.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ (Теория и приложения). – М., 1969.

A GENERALIZED BOUNDARY TRACES OF SOLUTIONS OF SECOND ORDER QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION

U. Zhydyk, H. Lopushanska

Ukrainian Academiy of Printing, 19 Pidgolosko Str. 79020 Lviv, Ukraine
Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The conditions at which regular interior to the domain solution of second order quasilinear elliptic equation $A(x,D)u = f(x,u,u_x)$ reaches generalized values $F \in (C^\infty(S))'$ onto boundary S are obtained.

Key words: quasilinear elliptic equation.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2000
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.139-147

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.139–147

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Маріанна ОЛІСКЕВИЧ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

У праці розглянуто задачу для системи гіперболічних рівнянь вигляду

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)u_{ix} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + g_i(x,t,u_1,\ldots,u_n) = f_i(x,t)$$

в області $\{0 < x < a,\ 0 < t < T\}$ з початковою умовою $u_i(x,0) = u_i^0(x)$, $i = 1,\ldots,n$. За умов, що $\lambda_i(0,t) = 0$ і g_i, $i = 1,\ldots,n$ є функціями Каратеодорі доведено існування та єдиність узагальненого (в сенсі інтегральної тотожності) розв'язку цієї задачі.

Мішані задачі для лінійних і квазілінійних систем гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними вивчали багато авторів [1–11]. Для дослідження цих задач здебільшого використовували метод характеристик, який є ефективним у випадку, коли нелінійності задовольняють умову Ліпшиця. У праці [11] одержано також певні умови розв'язності мішаної задачі у випадку нелінійностей степеневого характеру.

Значна кількість праць [12–23] присвячена дослідженню гіперболічних систем першого порядку, які вироджуються на певних частинах межі області, в якій розглядають задачу. Зокрема, у працях [12–16] вивчено випадки виродження системи на множині задання початкових даних. Праці [17–23] присвячено дослідженню гіперболічних систем першого порядку з багатьма незалежними змінними, які вироджуються певним чином на множині задання крайових умов. У праці [23] вивчено мішану задачу для лінійної системи гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними у випадку виродження системи за просторовою змінною.

У цій праці одержано певні умови розв'язності мішаної задачі для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними у випадку степеневих нелінійностей та виродження системи за просторовою змінною. Для дослідження цієї задачі застосовано метод Гальоркіна.

Нехай $Q = \{(x,t) : 0 < x < a,\ 0 < t < T\}$. Розглянемо в області Q систему гіперболічних рівнянь вигляду

$$U_t - \Lambda(x,t)U_x + A(x,t)U + G(x,t,U) = F(x,t), \tag{1}$$

де Λ, A – квадратні матриці порядку n, $U(x,t) = \mathrm{colon}(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t))$, $G = \mathrm{colon}(g_1,\ldots,g_n)$, $F(x,t) = \mathrm{colon}(f_1(x,t),\ldots,f_n(x,t))$, причому матриця Λ є діагональною, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$.

Позначимо через $L^r_\gamma(Q)$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$ простір функцій, який одержано як замикання множини функцій $C(\overline{Q})$ за нормою

$$\|v\|_{L^r_\gamma(Q)} = \left(\int\limits_Q \gamma(x)|v(x)|^r \, dx\, dt \right)^{1/r},$$

якщо $1 \leqslant r < +\infty$ і

$$\|v\|_{L^\infty_\gamma(Q)} = \operatorname*{ess\,sup}_Q |\gamma(x)v(x,t)|,$$

якщо $r = +\infty$, а функція γ має такі властивості:

$$\gamma \in C^1([0,a]); \quad \gamma(x) > 0, \quad x \in (0,a], \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(a) = 1.$$

Нехай, крім того,

$$\widehat{C}^1_n(Q) = \{ w(x,t) = (w_1(x,t), \dots, w_n(x,t)) \,:\, w_i \in C^1(\overline{Q}),$$
$$w_i(x,T) = 0, \; w_i(a,t) = 0, \; i = 1, \dots, n \}.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (Λ), (G), якщо:

(Λ) : $\lambda_i \in C([0,T]; C^1([0,a]))$; $\dfrac{\lambda_i \gamma'}{\gamma} \in C(\overline{Q})$;

$\lambda_i(x,t) < 0, \quad (x,t) \in (0,a] \times [0,T]; \quad \lambda_i(0,t) = 0, \; t \in [0,T], \; i = 1, \dots, n;$

(G) : функція $\tau \to G(x,t,\tau)$ є неперервною в $\mathbf{R}^n$ майже для всіх $(x,t) \in Q$;

функція $(x,t) \to G(x,t,\tau)$ є вимірною в Q для всіх $\tau \in \mathbf{R}^n$;

існує число $p > 2$ і додатні сталі g_0, g^0 такі, що

$\langle G(x,t,\xi) - G(x,t,\eta), \xi - \eta \rangle \geqslant g_0 |\xi - \eta|^p$,

$|g_i(x,t,\tau)| \leqslant g^0 \sum\limits_{j=1}^n |\tau_j|^{p-1}, \; i = 1, \dots, n$

для майже всіх $(x,t) \in Q$ і всіх $\xi, \eta, \tau \in \mathbf{R}^n$,

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено скалярний добуток в $\mathbf{R}^n$.

Для системи (1) задамо початкову умову

$$U(x,0) = U^0(x). \tag{2}$$

Означення. *Функцію U з простору*

$$V = \prod_{i=1}^n \left(L^\infty_\gamma((0,T); L^2(0,a)) \bigcap L^p_\gamma(Q) \right)$$

назвемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо вона задовольняє рівність

$$\int\limits_Q [-\langle U, V_t - \Lambda(x,t)V_x \rangle \gamma(x) + \langle (\gamma(x)\Lambda(x,t))_x U, V \rangle + \langle A(x,t)U + G(x,t,U) -$$

$$-F(x,t), V \rangle \gamma(x)] \, dx\, dt = \int\limits_0^a \langle U^0(x), V(x,0) \rangle \gamma(x) dx \tag{3}$$

для довільної функції $V \in \widehat{C}^1_n(\overline{Q})$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (Λ), (G) *і, крім того,* $a_{ij} \in L^\infty(Q))$, $i,j = 1,\dots,n$; $f_i \in L^{p'}_\gamma(Q)$, $i = 1,\dots,n$, $1/p' + 1/p = 1$; $u_i^0 \in L^2_\gamma(0,a)$, $i = 1,\dots,n$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Розглянемо послідовності функцій

$$u_i^N(x,t) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^N(t) w_i^j(x), \quad i = 1,\dots,n, \quad N = 1,2,3,\dots,$$

де

$$w_i^j(x) = \sin\frac{(2j-1)\pi x}{2a}, \quad i = 1,\dots,n,$$

а функції c_{ij}^N є розв'язком задачі Коші

$$\int_0^a \Bigg[(u_{it}^N(x,t) - \lambda_i(x,t)u_{ix}^N(x,t))w_i^l(x) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j^N(x,t)w_i^l(x) +$$

$$+ g_i(x,t,U^N(x,t))w_i^l(x) - f_i(x,t)w_i^l(x)\Bigg]\gamma(x)dx = 0, \tag{4}$$

$$c_{ij}^N(0) = u_{ij}^{0,N},\ i = 1,\dots,n,\ l = 1,\dots,N, \tag{5}$$

$$u_i^{0,N}(x) = \sum_{j=1}^N u_{ij}^{0,N} w_i^j(x),$$

причому

$$\lim_{N\to\infty} \|u_i^{0,N} - u_i^0\|_{L^2_\gamma(0,a)} = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

З умов теореми випливає, що система звичайних диференціальних рівнянь (4) задовольняє умовам теореми Каратеодорі [24]. Отже, існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (4), (5), визначений на деякому проміжку $[0,h]$, $h > 0$. З апріорних оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $h = T$. Тому вважатимемо, що розв'язок задачі (4), (5) визначений на $[0,T]$. Помноживши рівняння (4) відповідно на функції $c_{il}^N(t)$, підсумувавши їх за індексами l від 1 до N та i від 1 до n й зінтегрувавши проміжком $[0,\tau]$, $0 < \tau < T$, одержимо рівність

$$\int_Q \langle U_t^N - \Lambda(x,t)U_x^N + A(x,t)U^N + G(x,t,U^N) - F, U^N\rangle\gamma(x)dx\,dt = 0. \tag{6}$$

На підставі умов теореми щодо матриць Λ і A існують такі сталі $\lambda_0 > 0$, λ_1, a_0, що

$$-\langle\Lambda(a,t)\xi,\xi\rangle \geqslant \lambda_0|\xi|^2 \quad \text{для всіх } t \in [0,T] \text{ і } \xi \in \mathbf{R}^n,$$

$$\langle A(x,t)\xi,\xi\rangle \geqslant a_0|\xi|^2 \quad \text{для майже всіх } (x,t) \in Q \text{ і всіх } \xi \in \mathbf{R}^n,$$

$$\langle(\Lambda_x(x,t) + \gamma'(x)\gamma^{-1}(x)\Lambda(x,t))\xi,\xi\rangle \geqslant \lambda_1|\xi|^2 \quad \text{для всіх } (x,t) \in \overline{Q} \text{ і всіх } \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Враховуючи умови теореми та оцінки (7), з рівності (6) легко одержати нерівність

$$\int_0^a |U^N(x,\tau)|^2\gamma(x)dx + \lambda_0\int_0^\tau |U^N(a,t)|^2dt + g_0\int_{Q_\tau} |U^N(x,t)|^p\gamma(x)dx\,dt+$$
$$+(\lambda_1+2a_0)\int_{Q_\tau}|U^N(x,t)|^2\gamma(x)dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant \mu_1\left(\int_Q |F(x,t)|^{p'}\gamma(x)dx\,dt + \int_0^a |U^0(x)|^2\gamma(x)dx\right) \tag{8}$$

для всіх $\tau\in[0,T]$, де стала μ_1 залежить від g_0, p, а $Q_\tau=(0,a)\times(0,\tau)$.

На підставі леми Гронуолла-Белмана з (8) матимемо оцінки

$$\int_0^a |U^N|(x,t)|^2\gamma(x)dx\leqslant\mu_2,\quad t\in[0,T].$$
$$\int_0^T |U^N(a,t)|^2dt\leqslant\mu_2,$$
$$\int_Q |U^N(x,t)|^p\gamma(x)dx\leqslant\mu_2,$$

де стала μ_2 не залежить від N. Крім того, з умови (G) випливатиме оцінка

$$\int_Q |g_i(x,t,U^N)|\gamma(x)dx\,dt\leqslant\mu_2,\quad i=1,\dots,n.$$

Отже, існує підпослідовність $\{U^s(x,t)\}$ послідовності $\{U^N(x,t)\}$ така, що:

$$\begin{aligned}
&u_i^s\to u_i\quad *-\text{слабко в}\quad L^\infty((0,T);L^2_\gamma(0,a)),\\
&u_i^s\to u_i\quad\text{слабко в}\quad L^p_\gamma(Q),\\
&g_i(\cdot,\cdot,U^s)\to\theta_i\quad\text{слабко в}\quad L^{p'}_\gamma(Q)\\
&u_i^s(\cdot,T)\to\omega_i\quad\text{слабко в}\quad L^2_\gamma(0,a),\\
&u_i^s(a,\cdot)\to\varkappa_i\quad\text{слабко в}\quad L^2(0,T),\\
&i=1,\dots,n\quad\text{при}\quad s\to\infty.
\end{aligned}$$

Тому, використовуючи (4), (5), прийдемо до рівності

$$\int_0^a \omega_i(x)v_i(x,T)\gamma(x)dx + \int_Q \Big[-u_i(v_{it} - \lambda_i(x,t)v_{ix})\gamma(x) +$$

$$+ (\lambda_{ix}(x,t)\gamma(x) + \lambda_i(x,t)\gamma'(x))u_iv_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_jv_i\gamma(x) +$$

$$+ \theta_i(x,t)v_i\gamma(x) - f_i(x,t)v_i\gamma(x)\Big]dx\,dt - \int_0^T \varkappa_i(t)v_i(a,t)dt = \tag{10}$$

$$= \int_0^a u_i^0(x)v_i(x,0)\gamma(x)dx, \quad i = 1,\dots,n$$

для довільної функції $V \in C_n^1(\overline{Q})$.

Вибравши в (10) функції v_i з простору $C_0^1(\overline{Q})$, одержимо

$$\int_Q [v_{it}^\gamma - \lambda_i(x,t)v_{ix}^\gamma]u_i dx\,dt = \int_Q z_i(x,t)v_i^\gamma dx\,dt, \tag{11}$$

$i = 1,\dots,n$, де $v_i^\gamma(x,t) = v_i(x,t)\gamma(x)$,

$$z_i(x,t) = \lambda_i(x,t)u_i(x,t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j(x,t) + \theta_i(x,t) - f_i(x,t).$$

Нехай $x = \rho_i(t,x_0,\tau)$ – розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x,t), \quad x(\tau) = x_0.$$

Розглянемо відображення

$$\begin{cases} x = \rho_i(\tau,\xi,T), \\ t = \tau, \end{cases} \tag{12}$$

якобіан якого $J_i(\tau,\xi)$ має вигляд

$$J_i(\tau,\xi) = \frac{\partial\rho_i}{\partial\xi} = \exp\Big(\int_\tau^T \lambda_{ix}d\eta\Big).$$

Крім того,

$$J_{i\tau}(\tau,\xi) = -\lambda_{ix}(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)J_i(\tau,\xi), \; i = 1,\dots,n.$$

Нехай при відображенні (12) область D_i переходить в Q. Тоді з (11) одержимо рівність

$$\int_{D_i} \frac{\partial}{\partial\tau}[v_i^\gamma(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)]J_(\tau,\xi)u_i(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)d\tau\,d\xi =$$

$$- \int_{D_i} [\lambda_{ix}(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)u_i(\rho_i(\tau\xi,T),\tau) - z_i(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)]J_i(\tau,\xi)v_i^\gamma(\rho_i(\tau\xi,T),\tau)d\tau\,d\xi.$$

Звідси випливає, що майже для кожного фіксованого $\xi \in (0, a)$

$$\frac{du_i(\rho_i(\tau\xi, T), \tau)}{d\tau} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\rho_i(\tau\xi, T), \tau) u_j(\rho_i(\tau\xi, T), \tau) - \tag{13}$$
$$- \theta_i(\rho_i(\tau\xi, T), \tau) + f_i(\rho_i(\tau\xi, T), \tau), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Нехай i-та характеристика системи (1) для фіксованого $\xi \in (0, a)$ є визначеною на відрізку $[0, t_0] \subset [0, T]$. Тоді з (13) випливає, що

$$\frac{du_i}{d\tau} \in L^2(0, t_0) + L^{p'}(0, t_0).$$

Отже, функція u_i є неперервною вздовж цієї характеристики. Оскільки через кожну точку області Q проходять n характеристик системи (1), то майже у кожній точці цієї області функція $U(x, t)$ задовольняє систему рівнянь

$$U_t - \Lambda(x, t) U_x + A(x, t) U + \Theta(x, t) = F(x, t).$$

Крім того, майже у кожній точці (x, T), (a, t) функція U має слід. Використовуючи рівності (10), легко довести, що $U(x, T) = \omega(x)$, $U(a, t) = \varkappa(t)$. Отже, рівності (10) мають сенс і для $V(x, t) = U(x, t)$. Далі на підставі монотонності G аналогічно як в [25, с.172] можна довести, що $\Theta(x, t) = G(x, t, U(x, t))$. Отже, $U(x, t)$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Доведемо тепер єдиність розв'язку. Нехай існують два розв'язки U^1, U^2 задачі (1), (2). Тоді для функції $U = U^1 - U^2$ матиме рівність

$$\int_Q [-\langle U, V_t^\gamma - \Lambda(x, t) V_x^\gamma \rangle + \langle \Lambda_x(x, t) U + A(x, t) U, V^\gamma \rangle +$$
$$+ \langle G(x, t, U^1) - G(x, t, U^2), V^\gamma \rangle] dx\, dt = 0, \tag{14}$$

де $V^\gamma(x, t) = V(x, t)\gamma(x)$, $V \in \widehat{C}_n^1(\overline{Q})$. Виберемо в (14) $V = U^\eta x e^{-\nu t}$, де u_i^η є розв'язком задачі

$$-\eta \left(\frac{\partial u_i^\eta}{\partial t} - \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i^\eta}{\partial x} \right) + u_i^\eta = u_i,$$
$$u_i^\eta(x, T) = 0, \quad u_i^\eta(a, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \eta > 0.$$

Зазначимо, що $u_i^\eta \to u_i$ слабко в $L_\gamma^p(Q)$ при $\eta \to 0$. Тоді

$$-\int\limits_Q u_i[v_{it}^\gamma - \lambda_i(x,t)v_{ix}^\gamma]dx\,dt = \int\limits_Q \{\eta[u_{it}^\eta - \lambda_i(x,t)u_{ix}^\eta]^2 x\gamma(x)e^{-\nu t}+$$

$$+\nu x\gamma(x)u_i^\eta[u_i^\eta - \eta(u_{it}^\eta - \lambda(x,t)u_{ix}^\eta)]e^{-\nu t} + \lambda_i(x,t)\gamma(x)u_i u_i^\eta e^{-\nu t}+$$

$$+x\gamma'(x)\lambda_i(x,t)u_i u_i^\eta e^{-\nu t} - u_i^\eta[u_{it}^\eta - \lambda_i(x,t)u_{ix}^\eta]x\gamma(x)e^{-\nu t}\}dx\,dt =$$

$$= \int\limits_Q \Big\{\eta[u_{it}^\eta - \lambda_i(x,t)u_{ix}^\eta]^2 x\gamma(x)e^{-\nu t} + \frac{1}{2}[\nu x\gamma(x) - \nu^2\eta x\gamma(x) - \nu\eta(x\gamma\lambda_i)_x -$$

$$-(x\gamma\lambda_i)_x)](u_i^\eta)^2 e^{-\nu t} + (\gamma\lambda_i + x\gamma'\lambda_i)u_i u_i^\eta e^{-\nu t}\Big\}dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^a [x\gamma(x) + \nu\eta x\gamma(x)](u_i^\eta(x,0))^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_Q \{[\nu x\gamma(x) - \nu^2\eta x\gamma(x) - \nu\eta(x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x - (x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x](u_i^\eta)^2+$$

$$+2[\gamma(x)\lambda_i(x,t) + x\gamma'(x)\lambda_i(x,t)]u_i u_i^\eta\}e^{-\nu t}dx\,dt, \quad i = 1,\dots,n.$$

Отже, враховуючи умову (G), з рівності (14) одержимо нерівність

$$Y_\eta = \int\limits_Q [\nu x\gamma(x) - \nu^2\eta x\gamma(x) - (\nu\eta+1)(x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x]((u_i^\eta)^2)e^{-\nu t}dx\,dt+$$

$$+2\int\limits_Q \left[(x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x u_i u_i^\eta + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j u_i^\eta x\gamma(x)\right]e^{-\nu t}dx\,dt \leqslant 0$$

при досить малих η. Вибравши

$$\nu > \max_Q |\lambda_{ix}(x,t) + x^{-1}\lambda_i(x,t) + \gamma'(x)\gamma^{-1}(x)\lambda_i(x,t)|,$$

одержимо

$$0 \geqslant \liminf Y_\eta \geqslant \int\limits_Q [\nu x\gamma(x) + (x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x]u_i^2 e^{-\nu t}dx\,dt+$$

$$+2\int\limits_Q \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j u_i x\gamma(x)e^{-\nu t}dx\,dt, \; i = 1,\dots,n.$$

Підсумувавши останні нерівності за індексом i від 1 до n, матимемо оцінку

$$\int\limits_Q \left\{\sum_{i=1}^n [\nu x\gamma(x) + (x\gamma(x)\lambda_i(x,t))_x]u_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_j u_i x\gamma(x)\right\}e^{-\nu t}dx\,dt \leqslant 0.$$

Звідси, збільшивши у разі потреби ν, одержуємо, що

$$\int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_i^2 e^{-\nu t}dx\,dt \leqslant 0.$$

Отже, $u_i(x,t) = 0$ майже всюди в Q, де $i = 1, \ldots, n$. Теорему доведено.

1. *Аболиня В.Е., Мышкис А.Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости// Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – N 4. – С.423-442.
2. *Вагабов А.И.* Решение одномерных смешаных задач для гиперболической системы первого порядка // Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1963. – N 4. – С.11-17.
3. *Вагабов А.И.* Условия корректности одномерных смешанных задач для гиперболических систем// Докл. АН СССР. – 1964. – Т.155. – N 6. – С.1247-1249.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М., 1964.
5. *Мельник З.О.* Об одном способе решения смешаной задачи для гиперболического уравнения с разрывными коефициентами// Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2. – N 4. – С.560-570.
6. *Мельник З.О.* Общие смешанные задачи для двухмерных гиперболических систем// Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2. – N 7. – С.958-966.
7. *Мельник З.О.* О гиперболических уравнениях с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения. – 1974. –Т. 10. – N 8. – С.1530-1532.
8. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М., 1978.
9. *Потапов М.М.* Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы первого порядка// Дифференциальные уравнения. – 1983. –Т. 19. – N 10. – С.1826-1828.
10. *Кучеренко Е.И.* О сходимости метода Галеркина для задачи Коши систем нелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4. – N 3. – С.553-555.
11. *Barbu Viorel.* Nonlinear boundary-value problems for a class of hyperbolic systems// Rev. roum. math. pures et appl. – 1977. – Vol. 22. – N 2. – P.155-168.
12. *Дерябина А.В.* О растущих решениях сильно вырождающихся гиперболических систем // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – С.447–463.
13. *Терсенов С.А.* К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа// Сибирский матем. журн. – 1961. Т. 2. – С.913-935.
14. *Терсенов С.А.* О задаче с данными на линии вырождения для системы гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 155. – С.285-288.
15. *Терсенов С.А.* О сингулярной задаче Коши для некоторой системы гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205. – С.1046-1049.
16. *Hidetoshi Tahara.* Singular hyperbolic systems. I. Existence, uniqueness ad differentiability// J. Fac. Sci. Univ. Tokio. – 1979. – Sec. 1A. – Vol. 26. – P.213-238.
17. *Ohno Mayumi, Shizuta Yasushi, Yanagisava Taku.* The initial-boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary // Proc. Japan Acad. – Ser. A. – 1991. – Vol. 67. – N 6. – P.191-196.

18. *Yamamoto Yoshitaka.* Regularity of solutions of initial boundary value problems for symmetric hyperbolic systems with boundary characteristic of constant multiplicity. Regularity blowup and related properties of solutions to nonlinear evolution equations. – Kyoto, 1998. – N 1045. – P.1-25.

19. *Nishitani Tatsuo, Takayama Masahiro.* Characteristic initial-boundary value problems for symmetric hyperbolic systems// Osaka J. Math. – 1998. – Vol. 35. – N 3. – P.629-657.

20. *Ohno Mayumi, Shizuta Yasushi, Yanagisava Taku.* The initial-boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic of constant multiplisitty// J. Math. Kyoto Univ. – 1995. – Vol. 35. – N 2. – P.143-210.

21. *Secchi Paolo.* Linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary // Math. Methods Appl. Sci. – 1995. – Vol. 18. – N 11. – P.855-870.

22. *Secchi Paolo.* The initial-boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplisitty// Differ. and Integ. Equat. – 1996. – Vol. 9. – N 4. – P.671-700.

23. *Lavrenyuk S., Zareba L.* The initial-boundary value problem for the first order degenerated hyperbolic systems// Demonstratio Math. – 2000. – Vol. 33. – N 1. – P.75-82.

24. *Коддингтон Е.А., Левингтон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

25. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

THE MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR HYPERBOLIC DEGENERATED SYSTEM

S. Lavrenyuk, M. Oliskevych

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In the article there is considered the system of hyperbolic equations

$$u_{it} - \lambda_i(x,t)u_{ix} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + g_i(x,t,u_1,\dots,u_n) = f_i(x,t)$$

in the domain $\{0 < x < a,\ 0 < t < T\}$ with the initial conditions $u_i(x,0) = u_i^0(x)$, $i = 1,\dots,n$. Under the conditions that $\lambda_i(0,t) = 0$ and g_i, $i = 1,\dots,n$ are the Carateodory functions the existence and uniqueness of a weak solution is proved.

Key words: system of hyperbolic equations of the first order.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.2001

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2001. Вип. 59. С. 148–157 Ser. Mech-Math. 2001. Vol. 59. P. 148–157

УДК 517.95

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

Наталія ПРОЦАХ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

У цій праці в обмеженій циліндричній області $Q = \Omega \times (0,T)$ досліджено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часовою змінною, яке містить доданки вигляду $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. Методом Гальоркіна доведено таке: якщо коефіцієнти рівняння обмежені, права частина рівняння належить до простору $L^2(Q)$, то розв'язок мішаної задачі існує і належить до узагальненого простору Соболєва $W^{1,p(x)}(\Omega)$ за просторовими змінними. Єдиність узагальненого розв'язку отримано за додаткової умови на коефіцієнти рівняння і для деякого проміжку зміни функції $p(x)$.

Задачі для нелінійних рівнянь і систем параболічного типу досліджувало багато авторів. Зокрема, у працях [1 – 5] доведено розв'язність мішаних задач для певного класу нелінійних параболічних рівнянь вищого порядку з першою похідною за часом та досліджено певні властивості їхніх розв'язків. У працях [6, 7] виділено класи єдиності розв'язку мішаних задач, які залежать від геометрії області, необмеженої за просторовими змінними.

Порівняно невелика кількість праць присвячена вивченню задач для нелінійних еволюційних рівнянь і систем високих порядків з другою похідною за часом. Згадаємо тут лише праці [8 – 11].

У праці [12] запроваджено простори функцій, всі узагальнені похідні яких до порядку k включно, інтегровні за Лебегом зі степенем $p(x)$ в області Ω, де $p \in L^\infty(\Omega)$. Такі простори названо узагальненими просторами Соболєва і позначено через $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Зокрема, $W^{0,p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ є узагальненим простором Лебега. Це дало змогу узагальнити нелінійні диференціальні рівняння. У працях [13 – 15] досліджено задачі для нелінійних параболічних рівнянь з першою похідною за часом в узагальнених просторах Соболєва.

У цій праці досліджено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для одного нелінійного параболічного диференціального рівняння з другою похідною за часовою змінною, яке містить доданки вигляду $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. Розв'язність задачі в узагальнених просторах Соболєва доведено для певних проміжків зміни функції $p(x)$. Зауважимо, що для випадку сталого показника p існування розв'язку розглянутої мішаної задачі доведено у праці [11].

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^2$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t_1 t_2} = \Omega \times (t_1,\ t_2)$, $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, $Q_\tau = Q_{0\tau}$; $p \in L^\infty(\overline{\Omega})$.

$S = \partial\Omega\times(0,T)$, $2 < p_1 = \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} p(x) \leqslant \operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega} p(x) = p_2$; $1/p(x)+1/p'(x) = 1$, $x \in \overline{\Omega}$.
Розглянемо простори $L^{p(x)}(\Omega)$ та $W^{k,2}(\Omega)$ з нормами

$$\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} |v|^{p(x)}/\lambda^{p(x)} dx < 1\right\},$$

$$\|v; W^{k,2}(\Omega)\| = \left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^{\alpha}u|^2\right)dx\right)^{1/2}, \ k = 1,2$$

відповідно, де через D^{α} позначено оператор диференціювання $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^{k,2}(\Omega)$ замикання множини $C_0^{\infty}(\Omega)$ стосовно норм простору $W^{k,2}(\Omega)$, $k = 1,2$. Для функцій $v \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)$ виконується оцінка Фрідріхса [16, с.44]

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=j} |D^{\alpha}v|^2\, dx \leqslant \gamma_{2,j}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2} |D^{\alpha}v|^2\, dx, \quad j = 0,1,$$

де стала $\gamma_{2,j}$ залежить лише від n і Ω. Позначимо через $\Gamma_2 = \gamma_{2,0} + \gamma_{2,1} + 1$.

В області Q розглянемо мішану задачу

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u) - \sum_{i=1}^{n}(k_i(x,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i} +$$

$$+c(x,t)u_t - \sum_{i,s=1}^{n}(b_{is}(x,t)u_{x_it})_{x_s} + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u = f(x,t), \tag{1}$$

$$D^{\alpha}u|_S = 0, \ |\alpha| \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x). \tag{3}$$

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(A) $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta t} \in L^{\infty}(Q)$, $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$, $(x,t) \in Q$;

$$a_0\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}u|^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}uD^{\beta}u\, dx \leqslant$$

$$\leqslant a^0\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=2}|D^{\alpha}u|^2\, dx \text{ для майже всіх } t \in (0,T), \ \forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega),$$

$a_0 = \text{const} > 0$, $a^0 = \text{const}$;

(B) $b_{is} \in L^{\infty}(Q)$, $i,s = \overline{1,n}$, $\int\limits_{Q}\sum\limits_{i,s=1}^{n} b_{is}(x,t)u_{x_i}u_{x_s}dxdt \geqslant b_0\int\limits_{Q}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\, dx\, dt$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, $b_0 = \text{const} > 0$;

(K) $k_i \in L^{\infty}(Q)$, $0 < k_0 \leqslant k_i(x,t) \leqslant k^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $i = \overline{1,n}$, $k_0 = \text{const}$, $k^0 = \text{const}$;

(C) $c \in L^{\infty}(Q)$, $c(x,t) \geqslant c_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $c_0 = \text{const}$;

(**D**) $d_\alpha \in L^\infty(Q)$, $d_0 < d_\alpha(x,t) < d^0$, $|\alpha| \leqslant 2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $d_0 = \text{const}$, $d^0 = \text{const}$;

(**F**) $f \in L^2(Q)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$, $u_0 \in W^{2,2}(\Omega_0)$.

Нехай $d_2 = \max\limits_{|\alpha|\leqslant 2} \sup\limits_{\Omega} |d_\alpha(x,0)|^2$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3) назвемо функцію* $u \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega))$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_Q \Big[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^n k_i(x,t) |u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ c(x,t) u_t v + \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t) u_{x_i} v_{x_s} + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u v \Big] \, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,t) v \, dx\, dt + \int\limits_{\Omega_0} u_1 v \, dx \tag{4}$$

для довільної функції $v \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$, $v(x,T) = 0$ *та початкову умову* (3_1).

Твердження 1. *Для функцій* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *виконуються нерівності*

1) $\int\limits_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \leqslant \|f; L^{p(x)}(\Omega)\|^s$, *де* $s = \begin{cases} p_1, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ p_2, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$

2) $\|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f|^{p(x)}\, dx \right)^{1/s}$, *де* $s = \begin{cases} p_2, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ p_1, & \text{якщо } \|f; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$

Твердження 2. *Для функцій* $u \in L^{q(x)s(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$ *виконується нерівність* $\||u|^{q(x)}; L^{s(x)}(\Omega)\| \leqslant \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\|^{s_1}$, *де* $s_1 = \frac{s_3}{s_2}$;

$$s_2 = \begin{cases} \min\limits_\Omega s(x), & \text{якщо } \|u; L^{s(x)}(\Omega)\| \geqslant 1, \\ \max\limits_\Omega s(x), & \text{якщо } \|u; L^{s(x)}(\Omega)\| < 1. \end{cases}$$

$$s_3 = \begin{cases} \min\limits_\Omega q(x)s(x), & \text{якщо } \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| \leqslant 1, \\ \max\limits_\Omega q(x)s(x), & \text{якщо } \|u; L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$$

Доведення тверджень випливає з означення узагальнених просторів Лебега [12].

2. Існування та єдиність розв'язку

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A)–(F) і, крім того,* $p_2 \leqslant np_1/(n-p_1)$, *якщо* $n > p_1$. *Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(3).*

Доведення. Доведемо існування розв'язку задачі (1)-(3) методом Гальоркіна. Нехай $\{\varphi^j\}$ – база простору $\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)$. $u^j(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{j} c_{kj}(t)\varphi^k(x)$, де коефіцієнти $c_{kj}(t)$ є розв'язками систем наближень Гальоркіна

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u_{tt}^j\varphi^l + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha\varphi^l + \sum_{i=1}^n k_i(x,t)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j\varphi_{x_i}^l + \tag{5}$$
$$+c(x,t)u_t^j\varphi^l + \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)u_{x_it}^j\varphi_{x_s}^l + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t)D^\alpha u^j\varphi^l\Big]\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x,t)\varphi^l\,dx,$$

$$c_{kl}(0) = u_{0l}^j,\ c_{kl}'(0) = u_{1l}^j,\ 1\leqslant l\leqslant j, \tag{6}$$

$$u_0^j(x) = \sum_{l=1}^j u_{0l}^j\varphi^l(x),\ u_1^j(x) = \sum_{l=1}^j u_{1l}^j\varphi^l(x),$$
$$\lim_{j\to\infty}\|u_0 - u_0^j\|_{W^{2,2}(\Omega)} = 0,\ \lim_{j\to\infty}\|u_1 - u_1^j\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Доведемо існування розв'язку задач (5) - (6). Запишемо (5) у вигляді

$$\sum_{k=1}^j c_{jk}''(t)\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx = -\sum_{k=1}^j c_{kj}(t)\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}\int\limits_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\varphi^k D^\alpha\varphi^l\,dx +$$
$$+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\int\limits_{\Omega} d_\alpha(x,t)D^\alpha\varphi^k\varphi^l\,dx\Big] - \sum_{k=1}^j c_{jk}'(t)\int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)\varphi_{x_i}^k\varphi_{x_s}^l + c(x,t)\varphi^l\Big]\,dx -$$
$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n k_i(x,t)\Big|\sum_{k=1}^j c_{kj}(t)\varphi_{x_i}^k(x)\Big|^{p(x)-2}\sum_{k=1}^j c_{kj}(t)\varphi_{x_i}^k(x)\varphi_{x_i}^l(x)\,dx + \int\limits_{\Omega} f(x,t)\varphi^l\,dx, \tag{7}$$

або $\vec{c}_j''(t) = \Big[\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx\Big]^{-1}\vec{G}_j(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}_j'(t))$, де через $G_{jl}(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}_j'(t))$ позначено праву частину попередньої рівності. Запишемо еквівалентну систему рівнянь

$$\vec{c}_{1j}'(t) = \vec{c}_{2j}(t), \qquad \vec{c}_{2j}'(t) = \Big[\int\limits_{\Omega}\varphi^k\varphi^l\,dx\Big]^{-1}\vec{G}_j(t,\vec{c}_1(t),\vec{c}_2(t)).$$

На підставі умов теореми 1 функція $\vec{G}_j(t,\vec{y})$ є неперервною за $\vec{y}$ у просторі $\mathbb{R}^{2j+1}$ для майже всіх $t\in(0,T)$ і вимірною за t при кожному фіксованому $\vec{y}$. Крім того, $|\vec{G}_j(t,\vec{y})|\leqslant\mu(t)$, де $\mu\in L^1(0,T)$ для всіх $\vec{y}:\ |\vec{y}|\leqslant r_0$. Отже, згідно з теоремою Каратеодорі [17, с.54] існує неперервно диференційовна на $[0,t_1]$, $t_1\leqslant T$ функція, яка є розв'язком задачі (5)-(6).

Апріорні оцінки. Домножимо (5) на $c_{lj}'(t)$, підсумуємо за l, домножимо на $e^{-\nu t}$, зінтегруємо за t від 0 до τ, $0<\tau<t_1$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^ju_t^j + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^jD^\alpha u_t^j + \sum_{i=1}^n k_i(x,t)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^ju_{x_it}^j + c(x,t)|u_t^j|^2 +$$
$$+\sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)u_{x_it}^ju_{x_st}^j + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t)D^\alpha u^ju_t^j\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f(x,t)u_t^je^{-\nu t}\,dx\,dt \tag{8}$$

Перетворимо кожний доданок рівності (8). На підставі умов теореми матимемо такі оцінки:

$$\tau_1 = \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^j u_t^j e^{-\nu t} dx dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |u_1^j|^2\, dx + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_2 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^j D^\alpha u_t^j e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{1}{2}(\nu a_0 - a_1)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu\tau}\, dx - \frac{a^0}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0^j|^2\, dx;$$

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n k_i(x,t) |u_{x_i}^j|^{p(x)-2} u_{x_i}^j u_{x_i t}^j e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{k_0}{p_2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^j|^{p(x)} e^{-\nu\tau}\, dx -$$
$$- \frac{k^0}{p_1}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^j|^{p(x)}\, dx + \frac{\nu k_0 - k_1}{p_2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^j|^{p(x)} e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_\tau} c(x,t) |u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_5 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t) u_{x_i t}^j u_{x_s t}^j e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant b_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_6 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u^j u_t^j e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{(d^0)^2}{2}\Gamma_2 \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 + \frac{|u_t^j|^2}{2}\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\tau_7 = \int\limits_{Q_\tau} f(x,t) u_t^j e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{|f(x,t)|^2}{2} + \frac{1}{2}|u_t^j|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt,$$

де сталі a_1, k_1 залежать від функцій $a_{\alpha\beta t}$, k_{it}.

На підставі цих оцінок з (8) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(\frac{|u_t^j|^2}{2} + \frac{a_0}{2}\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 + \frac{k_0}{p_2}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^j|^{p(x)}\right) e^{-\nu\tau}\, dx + b_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(-\frac{\nu}{2} - c_0 + 1\right)|u_t^j|^2 + \left(\frac{a_1 - \nu a_0}{2} + \frac{(d^0)^2\Gamma_2}{2}\right)\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^j|^2 -\right.$$
$$\left. - \frac{\nu k_0 - k_1}{p_2}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^j|^{p(x)}\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2}|u_1^j|^2 + \frac{a^0}{2}\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u_0^j|^2 + \frac{k^0}{p_1}\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^j|^{p(x)}\right) dx. \tag{9}$$

Вибравши $\nu = \max\{2(-c^0+1), \sup\limits_{[0,\tau]}\{(a_1/a_0 + (d^0)^2\Gamma_2/a_0); k_1/k_0\}$ з (9) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big(|u_t^j|^2+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u^j|^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}\Big)\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big(|u_t^j|^2+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u^j|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}+\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^j|^2\Big)\,dx\,dt\leqslant M_1\int\limits_Q|f(x,t)|^2\,dx\,dt+\int\limits_{\Omega_0}\Big(|u_1^j|^2+$$
$$+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u_0^j|^2+\sum_{i=1}^n|u_{0x_i}^j|^{p(x)}\Big)\,dx<M, \tag{10}$$

в якій стала M не залежить від j. Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^j(x,t)\}$ (збережемо за нею те саме позначення) така, що

$$\begin{aligned}
&u_t^j\to u_t\quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega));\\
&D^\alpha u^j\to D^\alpha u\quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\quad |\alpha|\leqslant 2;\\
&u_t^j\to u_t \text{ слабко в } L^2(0,T;\ W^{1,2}(\Omega));\\
&u_{x_i}^j\to u_{x_i}\quad -\ast\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^{p(x)}(\Omega)),\quad i=\overline{1,n},
\end{aligned}\tag{11}$$

при $j\to\infty$ і розв'язок задачі (5), (6) можна продовжити на весь інтервал $[0,T]$.

Згідно з теоремою 5.1 [8, с.70] можемо вважати, що $u_{x_i}^j\to u_{x_i}$, $i=\overline{1,n}$ сильно в $L^2(Q)$ і майже всюди на Q. Тому за лемою 1.3 [8, с.25] $|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j\to|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}$, $i=\overline{1,n}$ слабко в $L^{p'(x)}(Q)$.

Покажемо, що u – розв'язок задачі (1)-(3). З (5) можна отримати рівність

$$-\int\limits_{\Omega_0}u_1^jv^{j_0}\,dx+\int\limits_Q\Big[-u_t^jv_t^{j_0}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^jD^\alpha v^{j_0}+$$
$$+\sum_{i=1}^n k_i(x,t)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^jv_{x_i}^{j_0}+c(x,t)u_t^jv^{j_0}+\sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)u_{x_it}^jv_{x_s}^{j_0}+$$
$$+\sum_{|\alpha|\leqslant 2}d_\alpha(x,t)D^\alpha u^jv^{j_0}\Big]\,dx\,dt=\int\limits_Q f(x,t)v^{j_0}\,dx\,dt,$$

яка виконується для всіх $v^{j_0}=\sum\limits_{k=0}^{j_0}z_{kj_0}(t)\varphi^k(x)$, $z_{kj_0}\in C([0,T])$, $z_{kj_0}(T)=0$.

Сукупність таких функцій v^{j_0} є всюди щільна в просторі $L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega)\cap W^{1,p(x)}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$. У попередній тотожності перейдемо до границі за вибраною вище послідовністю. Одержимо, що u задовольняє (4). За лемою 1.2 [8, с.20] $u\in C(0,T;L^2(\Omega))$. Отже, початкова умова (3_1) також буде виконуватися. Тому функція u є узагальненим розв'язком задачі (1) - (3).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(A)-(F)$, $a_0-2\sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}}>0$, $d_{\alpha t}$, c_t, $b_{ist}\in L^\infty(Q)$, $i,s\in\overline{1,n}$, $|\alpha|\leqslant 2$. *Якщо* $2<p(x)<\frac{2n-2}{n-2}$ *при* $n>2$ *і* $2<p(x)<+\infty$ *при* $n\leqslant 2$, *то узагальнений розв'язок задачі (1)-(3) єдиний.*

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(3) має два узагальнені розв'язки $u^1(x,t)$,

$u^2(x,t)$. За означенням функція $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t)(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2}u^1_{x_i} - |u^2_{x_i}|^{p(x)-2}u^2_{x_i})v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,s=1}^{n} b_{is}(x,t) u_{x_i t} v_{x_s} + c(x,t) u_t v + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} d_\alpha(x,t) D^\alpha u v\Big] e^{-\nu t}\, dx\, dt = 0 \qquad (12)$$

для довільної функції $v \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,p(x)}(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$, $v(x,T) = 0$ і умову $u(x,0) = 0$.

Виберемо функцію $v(x,t)$ у вигляді

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x,\theta) d\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Оцінимо кожний доданок рівності (12)

$$\tau_1 = -\int\limits_{Q_\tau} u_t v_t \, dx\, dt = \int\limits_{Q_\tau} u_t u \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\, dx;$$

$$\tau_2 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u \int\limits_t^\tau D^\alpha u\, d\theta\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) \int\limits_0^\tau D^\beta u\, d\theta \times$$

$$\times \int\limits_0^\tau D^\alpha u\, d\theta\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}(x,t) \int\limits_t^\tau D^\beta u\, d\theta \int\limits_t^\tau D^\alpha u\, d\theta\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\, d\theta\Big|^2 dx - \tau a_1 \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=2} \Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\, d\theta\Big|^2 dx -$$

$$- a_1 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \Big|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\, d\theta\Big|^2 dxdt.$$

Нехай

$$M_2 = \sup_{[0,T]} \Big(\int\limits_{\Omega_t} (|u^1_{x_i}|^{p(x)-2} + |u^2_{x_i}|^{p(x)-2})^{q_4}\, dx\Big)^{1/q_4}.$$

За теоремою 2.8 [12], твердженнями 1,2 та теоремами вкладення при $1/q_3 + 1/q_4 = 1/2$ та $p_2 = (2n-2)/(n-2)$ для $n > 2$, далі матимемо

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t)(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2}u^1_{x_i} - |u^2_{x_i}|^{p(x)-2}u^2_{x_i}) \int\limits_t^\tau u_{x_i}\, d\theta\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant k^0(p_2 - 1)\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}| |(|u^1_{x_i}|^{p(x)-2} + |u^2_{x_i}|^{p(x)-2})| \Big|\int\limits_t^\tau u_{x_i}\, d\theta\Big|\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant k^0(p_2-1)r_p\int_0^\tau\left(\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n\left||u^1_{x_i}|^{p(x)-2}+|u^2_{x_i}|^{p(x)-2}\right|^{q_4}dx\right)^{1/q_4}\times$$

$$\times\left(\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^n\left|\int_t^\tau u_{x_i}(x,\theta)\,d\theta\right|^{q_3}\right)^{1/q_3}dt\leqslant\frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2.1}\tau}{\delta}\times$$

$$\times\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx\,dt+\frac{2k^0(p_2-1)r_p\gamma_{2,1}M_2}{\delta}\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx\,dt+$$

$$\left.+\,\delta k^0(p_2-1)r_pM_2\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx\,dt\right];$$

$$\tau_4=\int_{Q_\tau}c(x,t)u_t\int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt\geqslant(c_0-c^1)\int_{Q_\tau}u^2\,dx\,dt-$$

$$-\,2\tau c^1\gamma_{2,0}\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx+2\gamma_{2,0}c^1\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx;$$

$$\tau_5=\int_{Q_\tau}\sum_{i,s=1}^n b_{is}(x,t)u_{x_it}\int_t^\tau u_{x_s}d\theta\,dxdt\geqslant b_0\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2\,dx\,dt-\int_{Q_\tau}\left[b_1\delta_1\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^2+\right.$$

$$\left.+\,\frac{\gamma_{2,1}}{\delta_1}\left|\int_0^t\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u|\,d\theta\right|^2\right]dx\,dt-\frac{\tau b_1}{\delta_1}\int_{\Omega_0}\left|\int_0^\tau\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u|\,d\theta\right|^2dx;$$

$$\tau_6=\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant2}d_\alpha(x,t)D^\alpha u\int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt=\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|\leqslant2}d_\alpha(x,t)\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\int_0^\tau u\,d\theta\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant2}d_{\alpha t}(x,t)\int_t^\tau D^\alpha u\,d\theta\int_t^\tau u\,d\theta\,dx\,dt-\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant2}d_\alpha(x,t)\int_t^\tau D^\alpha u\,d\theta u\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}}\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx+\tau\sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2.0}}\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx+$$

$$+\sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}}\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx+\delta_2d^0\tau\Gamma_2\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx+$$

$$+\,\delta_2d^0\Gamma_2\int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2dx\,dt+\frac{1}{\delta_2}\int_{Q_\tau}|u|^2\,dx\,dt,$$

де сталі b_1, c_1, d_1 залежать відповідно від функцій b_{ijt}, c_t, $d_{\alpha t}$.

З оцінок інтегралів $\tau_1 - \tau_6$ матимемо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\,dx + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}\tau}{\delta} - \tau a_1 - 2\tau c^1\gamma_{2,0} - \frac{\tau b_1}{\delta_1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}} - \tau\sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}} - \delta_2\Gamma_2\tau d^0\right)\int\limits_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau}\left[\left(|a_1| + \frac{2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}}{\delta} + 2\gamma_{2,0}c^1 + \frac{\gamma_{2.1}}{\delta_1} + \delta_2\Gamma_2 d^0 + \sqrt{d_1\Gamma_2\gamma_{2,0}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^t D^\alpha u\,d\theta\right|^2 + \left(c^1 - c_0 + \frac{d^0}{\delta_2}\right)|u|^2\right]dx\,dt -$$

$$-\left(b_0 - b_1\delta_1 - \delta k^0(p_2-1)r_pM_2\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt. \tag{13}$$

Виберемо τ та δ з умов $a_0/2-(2k^0(p_2-1)r_pM_2\gamma_{2,1}\tau)/\delta-\tau a_1-2\tau c^1\gamma_{2,0}-\tau b_1/\delta_1-\sqrt{d_2\Gamma_2\gamma_{2,0}}-\tau\sqrt{d_1\Gamma_2\tau_{2,0}}-\delta_2\Gamma_2\tau d^0 \geqslant 0$; $b_0-b_1\delta_1-\delta k^0(p_2-1)r_pM_2 > 0$.

Тоді з нерівності (13), застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^2\,dx + \int\limits_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=2}\left|\int\limits_0^\tau D^\alpha u\,d\theta\right|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Тому $u = 0$ майже всюди в Q_τ. Аналогічно можна довести, що $u = 0$ майже всюди в $Q_{\tau T}$.

---

1. *Лаптев Г.Г.* Априорные оценки сильных решений полулинейных параболических уравнений// Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – N 4. – С.564-572.
2. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных параболических уравнениях высшего порядка с гельдеровыми решениями //Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т.29. – N 3. – С.501-514.
3. *Скрыпник И.В., Наумова М.А.* Нелинейные параболические задачи в областях с тонкими полостями. //Доп. НАН України. Матем.,природозн., тех. науки – 1998. – N 4. – С.59-63.
4. *Скрыпник И.В.* Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – N 3. – С.72-86.
5. *Шишков А.Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Український матем. журн. – 1995. – Т.47. – N 2. – С.277-290.
6. *Шишков А.Е.* Классы единственности обобщенных решений краевых задач для параболических уравнений в неограниченных нецилиндрических областях // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т.26. – N 9. – С.1627-1634.
7. *Акулов В.Ф., Шишков А.Е.* О единственности решений смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограничен-

ными коэффициентами. // Український матем. журн.. – 1992. – Т.44. – N 2. – С.149-155.

8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
9. *Masayoshi Tsutsumi and Riichi Iino* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equation // Proc. of the Japan Academy. – 1969. – Vol.45. – N 6. – P.466-469.
10. *Хлуднев А.М.* О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14. – N 11. – С.2026-2037.
11. *Барабаш Г.* Мішана задача для одного нелінійного параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.15-26.
12. *Kováčik O. and J. Rákosnik* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol.41. – N 4. – P. 592-618.
13. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32. – N 5. – С.643-651.
14. *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С.85-98.
15. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.33-43.
16. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– М., 1978.
17. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М., 1958.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR ONE PARABOLIC NONLINEAR EQUATION

N. Protsakh

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In this work is investigated the existence and the uniqueness of the weak solution of the mixed problem for one nonlinear differential parabolic equation with the second time derivative which contains a nonlinear terms $(|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i})_{x_i}$. The equation is considered in a bounded cylindrical domain $Q = \Omega\times(0,T)$. It is proved by the Galerkin method that if the coefficients of the equation are bounded, the right-hand side of the equation belongs to the space $L^2(Q)$, then the solution of the mixed problem exists and belongs to the generalized Sobolev space $W^{1,p(x)}(\Omega)$ on the space variables. The uniqueness of the weak solution is obtained under the additional condition about coefficients of the equation and for some variation interval of function $p(x)$.

Key words: higher order nonlinear parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.158–175 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.158–175*

НІКЛІБОРЦ ВЛАДИСЛАВ МИХАЙЛО (1899-1948)

Георгій СУЛИМ, Збігнєв Станіслав ОЛЕСЯК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна
Варшавський університет, вул.Банаха,2 Варшава, Польща

Розглянуто життєвий шлях і наукову діяльність видатного польського математика і механіка Владислава Михайла Нікліборца, спеціаліста в галузі диференціальних рівнянь, теорії функцій, теоретичної механіки та гідромеханіки. Завідував кафедрами у Львівській політехніці, Львівському університеті, був професором Варшавського університету і Варшавської політехніки.

Ключові слова: Нікліборц Владислав Михайло, математик, механік, диференціальні рівняння, теорія функцій, теоретична механіка, гідромеханіка, задача трьох тіл.

1. Життєвий шлях. Відомий польський математик та механік Владислав Михайло Нікліборц народився 2 січня 1899 р. у Вадовіцах (Wadowicach) у сім'ї відомого у місті судді окружного суду Щепана (Szczepana) та Михалини (Michaliny) з дому Жароффе (Żaroffe). Численна родина мешкала у Вадовіцах у будинку 15 на вул. М. Вадовіти (M.Wadowity) та на Кальварії Зебжидовській (Kalwaria Zebrzydowska) у батькового брата Яна Нікліборца, який був лікарем. У 1978 р. світ довідався про Вадовіце, бо Папою обрали польського кардинала Кароля Войтилу (Ян Павло II) родом з цього міста. Середню освіту здобував послідовно у Бєльску Бялей (початкова школа), Жешові (три перші гімназіальні класи) та рідних Вадовіцах (четвертий – восьмий класи 1912-1913 – 1916-1917). У класичній гімназії вивченню математики та природничих наук не надавали важливого значення, проте Владислава цікавила саме математика. Велика заслуга вчителя Яна Гечко (Jan Heczko), який працював з Владиславом чотири останні роки. Цікаво, що відомий у Польщі математик-педагог Францішек Урбаньчик (Franciszek Urbańczyk) через рік закінчив ту саму гімназію. Разом з відомим літературним критиком, поетом та перекладачем (знаменитих творів Р. Грейвса "Я, Клавдій" та "Клавдій і Мессаліна") Стефаном Ессмановскім (Stefanem

Рис. 1. Фото В. Нікліборца та його власноручний підпис на акті про присудження звання звичайного професора Варшавської політехніки

**Примітка.* Для відтворення тогочасної мовної ситуації в Галичині автори вважають за потрібне дотримуватися в тексті відповідної лексики та синтаксису.

Essmanowskim) брав активну участь у праці літературно-наукового гуртка. Владислав виголошував реферати, друкував замітки у журналі, який видавали гуртківці.

У 1916 р. склав випускні іспити, записався на філософський факультет (фізико-математичні науки) Ягеллонського університету, призупинив навчання, бо вступив до польського Легіону під командування генерала Юзефа Галлера, який воював на стороні центральних держав.

Вже 16 грудня 1916 р. студентом вступив до Легіону та за два тижні до завершення 18 років добровольцем розпочав військову службу у другій батареї польових гармат 1-го полку артилерії австрійської армії. У липні-серпні 1917 р. після арешту Юзефа Пілсудського та відмови легіоністів скласти присягу на вірність Австрії Легіон ліквідували. Частину В.Нікліборца перенесли до сьомої австроугорської армії і послали воювати на румунський фронт до Трансильванії і у північну Італію. 1 квітня 1918 р. його як колишнього легіоніста відправили на курси офіцерів артилерії до Оломоуца (тепер Словаччина). У ранзі капрала 31 липня 1918 р. В.Нікліборц закінчив ці курси і прибув до батареї резерву. Наприкінці вересня 1918 р. його демобілізували.

Як військовий у жовтні записався на навчання до Ягеллонського університету, проте вже 1 листопада вступив у групу артилерії підполковника Бжезіни (Brzeziny). Невдовзі 11 грудня звільнився з війська, щоб продовжити навчання у Кракові.

10 липня 1920 р. знову добровольцем вступив до польської армії. Спочатку перебував у збірному таборі студентів-добровольців у Рембертові під Варшавою, після чого його перевели на курси добровольців до артилерійської школи підхорунжих у Познані. 20 листопада став лейтенантом запасу польської армії (підпоручником резерву).

Є свідчення про те, що брав участь у польсько-радянській війні 1920 р., однак письмових згадок про це не збереглося. В автобіографії від 1920 р., яка зберігається у центральному військовому архіві Польщі, про це жодної згадки немає. Як видно з послужного списку, у цей час перебував добровольцем у складі польської армії, однак прямої участі у боротьбі на фронті не брав.

У В. Нікліборца був молодший брат Ян. Він у 1929 р. закінчив Львівську політехніку, де здобув фах фізика-експериментатора. До 1935 р. як доктор технічних наук працював старшим асистентом кафедри фізичної хімії Львівської політехніки і потім до 1944 (можливо 1945)р. – ад'юнктом кафедри фізики "B". Працював у Львівській ветеринарній академії. У 1939 р. його нагородили Золотим хрестом заслуги. У групі 17-ти провідних вчених Львівської політехніки, які на скликаних директором 4 січня 1945 р. зборах у присутності делегації прорадянського Комітету народного визволення з Любліна, відмовився підписати резолюцію, в якій засуджувалась діяльність польського еміграційного уряду в Лондоні та армії крайової попри недвозначну погрозу вважати відмовників гітлерівцями з усіма наслідками, які випливали би з такого кваліфікування.

Після війни Ян Нікліборц (1945 р.) став професором Університету та Політехніки у Вроцлаві, а також Вищої Педагогічної Школи в Ополе.

З листопада 1918 р. до червня 1922 р. В.Нікліборц вивчав математику на філософському факультеті Ягеллонського університету (Краків), де співпрацював з Стефаном Зарембою (Stefan Zaremba). К. Куратовський зазначав, що тоді це був провідний краківський математик, головною заслугою якого було те, що він вивчив математиків такого рангу, як Тадеуш Важевськицй та Владислав Нікліборц, який досконало знав математичний аналіз. У студентському каталозі біля імені В. Нікліборца помічено, що він отримав звільнення з війська на неозначений час (urlopowany z wojska na czas nieokreślony).

У 1922 р. В. Нікліборц закінчив Краківський університет і отримав звичний тоді для такої освіти фах учителя математики. З 1 жовтня 1922 р. розпочав працювати у Львові молодшим асистентом,

старшим асистентом (1923–1925 н. р.), ад'юнктом (до 1932 р.) II кафедри математики Львівської політехнічної школи, яку очолював у 1920–1941 рр. проф. Антоні Маріян Ломніцький (Antoni Marian Łomnicki – 1881–1941, якого розстріляли фашисти 4.07 на Вулецьких пагорбах). На цій кафедрі тоді працював С. Банах – у 1920–1921 н. р. асистентом, у 1921–1923 н. рр. старшим асистентом. Згодом став професором університету.

У 1924 р. сенат Львівського університету на підставі праці "Нове доведення фундаментального твердження Коші про існування інтегралів звичайних диференціальних рівнянь" (Wiadomości matematyczne, 1924) присвоїв йому ступінь доктора філософії в галузі математики.

19 квітня 1925 р. В. Нікліборц і Софія Мусял у краківському колегіаті (костелі без кафедри) св. Анни взяли шлюб. (Zofia Musiał – народилася 15 травня 1898 р. у м. Стрию у сім'ї Юзефа та Анни з дому Вінковських - Winkowska). Дітей у них не було. 11 березня 1948 р. (майже відразу після смерті чоловіка) вдова В. Нікліборца брала з книги шлюбів витяг (том VI, с. 13, 27), який був потрібний для якихось спадкових справ. Однак можна припустити, що перед смертю В. Нікліборца подружжя мешкало окремо, оскільки згадувана братаниця В. Нікліборца вважала, що її стрийко помер вдівцем.

У 1927 р. на основі габілітаційної праці "Про гіпергармонічні функції" (Compt. Rend. de l'Acad. de Sci. de Paris, 1925, 1926) здобув затверджене 16.01.1928 р. право викладання (veniam legendi) як доцент математики у Львівському університеті (тоді Яна Казимира) і працював до 1937 р. Проте основне місце роботи було в Львівській політехніці. Тоді мешкав на вул. Листопада (тепер Євгена Коновальця), 44а.

З жовтня 1928 р. до серпня 1929 р. як стипендіат Фонду народної культури удосконалював свою освіту в університетах Ляйпціга (Lipsk), Геттінгена, Парижа. Відвідував (за даними з особових справ Львівських політехніки та університету) Лозанну у Швейцарії та італійську Болонью.

З жовтня 1929 р. до вересня 1930 р. (в особовій справі у Львівській політехніці і у хроніці Польської Академії Умінь за 1945–1946 рр. та інших джерелах, певне через помилку, зазначено рік пізніше) вже як стипендіат заснованого у 1913 р. наукового Фонду Рокфеллера (Rockefeller) проводить у Ляйпцігу в одного з найзнаменитіших математиків – проф. Л. Ліхтенштейна. Цілеспрямовано вивчав механіку небесних тіл у Ляйпцігському університеті. Результатом підвищення наукової кваліфікації в галузі теоретичної механіки була, між іншим, праця про сплющування урівноваженої фігури обертання обертової гравітаційної рідини (1931).

У 1921/1922 н. р. М. Т. Губер (M. T. Huber) був ректором Львівської політехніки (у 1925–1928 рр. – голова львівського відділення польського математичного товариства, 1926–1928 рр. – віце-голова Польського математичного товариства) і запрошував Л. Ліхтенштейна переїхати з Варшави до Львова, щоб очолити кафедру механіки. Проте Л. Ліхтенштейн надав перевагу кафедрі математики у Ляйпцігу, де здобув широке міжнародне визнання. У 1924 р. на І Конгресі з прикладної механіки у голландському місті Делфт М. Т. Губер пропонував переїхати визначному голландському механіку, майбутньому класику теорії пластичності Г. Генкі (H. Hencky), який будучи одруженим з росіянкою, добре знав російську мову і, на думку М. Губера, міг швидко оволодіти також і польською. Ця пропозиція, на жаль, не була прийнята.

В. Нікліборц у 1930/1931 н. р. повернувся до Львова і працював у політехніці старшим асистентом на кафедрі математики II (якщо ця відомість неточна, то тоді справді у цей час перебував у Ляйпцігу). У 1931 р. (деякі джерела подають 1933/34 н. р. разом з В. Бужиньским) на основі праці "Про верхню границю кутової швидкості рівноважних фігур обертових гравітаційних рідин" додатково габілітується на право викладання (veniam legendi) як доцент теоретичної механіки кафедри теоретичної механіки на Факультеті інженерії наземної та водної у Політехнічній школі. Це дало змогу стати доцентом теоретичної механіки. Працював доцентом математики в Університеті. До 1937 р. в обох високих школах він читав лекції з теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії квадратичних форм, варіаційного числення, диференціальної геометрії та теоретичної механіки та низки інших предметів.

У 1921/1922 н. р. у Львівській політехніці за ініціативи Казиміра Бартеля (Kazimierz Bartel – професор з нарисної геометрії, який відоміший як триразовий прем'єр у післятравневих урядах) було створено загальний факультет (wydział ogólny), який мав мати цілком університетський характер та мав готувати кандидатів на вчителів професійних середніх та нижчих шкіл а також вчительських семінарій, технічних фізиків для виробництва та державної адміністрації, а з 1928 р. ще й учителів малювання, декораторів і художників. 25 січня 1934 р. вийшло розпорядження на виконання сумнозвісних реформ прем'єра Януша Єнджеєвича (Janusz Jędrzejewicz) які з 1.09.1933 р. ліквідовували автономію високих шкіл, закрити цей факультет. Щоправда ще два роки він випускав молодих фахівців. Важливо зазначити, що на цьому факультеті надзвичайно грунтовно вивчали математику. За свідченням К. Куратовського, це був міні-університет, який обслуговували численні професори й доценти університету на основі погодинної оплати, й такої насиченої програми занять з математики не мав тоді жоден польський університет.

На прохання професора Вацлава Серпінського (Wacław Sierpiński – професор Львівського університету у 1910–1918 рр.) до Львова з Варшави приїхав працювати славетний польський математик К. Куратовський і у 1927–1934 рр. керував кафедрою математики. У навчальних роках 1929/1930, 1931/1932, 1933/1934 він був на переміну з В. Стожеком та А. Ломніцьким деканом загального факультету. Заняття проводили й університетські професори С. Банах і С. Рузевіч (Stanisław Ruziewicz – заарештований німцями 11 липня 1941 р., згинув за нез'ясованих обставин). У 1928/1929 н. р. заняття проводили шість професорів та чотири доценти, серед яких і В. Нікліборц. На загальному факультеті В. Нікліборц у 1925/1929 н. рр. як старший ассистент кафедри математики викладав диференціальну геометрію. Як доцент у 1932/1934 н. рр. – диференціальну геометрію та у 1932/1933 н. р. – ще й теорію квадратичних форм, теорію диференціальних рівнянь. На архітектурному факультеті у 1933/1934 н. р. викладав диференціальну геометрію.

ment), Е. Отто (E. Otto). С. Улам - відомий польський математик народився і вчився у Львові, перед Другою світовою війною виїхав до США. Був учасником проекту "Манхеттен", відіграв у проекті одну з провідних ролей по створенню американської атомної бомби у Лос-Анжелосі. Написав цікаві спогади "Пригоди математика", які видали англійською та польською мовами. За його редакцією вийшло англійске видання (1957) знаменитої "Шотландської книги" ("Księga Szkocka").

У спогадах випускника загального факультету С. Улама зазначено: "Качмаж, високий та худий (загинув на фронті у 1940 р. – фактично у вересні 1939 р. під Умястовем – авт.) і Нікліборц, низький та округлий, організовували практичні заняття до великих курсів з диференціального числення та диференціальних рівнянь. Часто їх бачили разом, вони нагадували мені Пата і Паташона, героїв тогочасних комедійних фільмів." Згадував С. Улам і про міжнародний математичний конгрес 1931 р. у Відні, на якому він був разом із В. Нікліборцем, В. Стожеком (якого розстріляли разом із синами Євстахієм та Емануелем 4 липня 1941 р.) та іншими професорами львівських вищих навчальних закладів.

На рільничо-лісовому факультеті Політехніки, який був у Дублянах, у 1932-1933 н.р. В. Нікліборц викладав елементи вищої математики; у 1934-1937 рр. – теоретичну механіку, теоретичну балістику, вибрані розділи теорії диференціальних рівнянь та прикладну математику. Два останні навчальні роки геометри слухали його лекції з механіки.

У 1937 р. В. Нікліборц як ад'юнкт кафедри математики Львівської політехніки переїхав до Варшави. З 1 вересня аж до вибуху Другої світової війни працював надзвичайним професором математики і завідувачем кафедри математики хімічного факультету Варшавської Політехнічної школи, читаючи лекції з теоретичної механіки. На місце В. Нікліборца з Кракова до Львівської політехніки приїхав Андрій Туровіч (Andrzej Turowicz), який займався функціональним аналізом, посиливши середовище математиків-функціоналістів.

Після від'їзду В. Нікліборца була оприлюднена "справа Гершенберга", в якій згадувалося його ім'я . Вольф Гершенберг (народився в Лодзі) магістр математики вів у політехніці курси з підготовки студентів до складання іспитів з математики (2–3 тижні). На іспиті В. Нікліборц як ад'юнкт кафедри математики виписував на дошці завдання, а спритний магістр підглядав умови задач за допомогою підзорної труби зі спеціально винайнятого мешкання на вул. Й. Захаревича (тепер Архітекторська) і за допомогою возного Миколи Шеремети (сьогодні посада коменданта) передавав готові розв'язки студентам в аудиторію. Цією справою зацікавився прокурор. В. Гершенберга навіть на деякий час заарештували, возного звільнили з роботи. Вся львівська преса одностайно засудила шахрайство, яке не лише деморалізувало. а й шкодило самим студентам, звільнивши їх від обов'язку грунтовно готуватися до іспиту з математики.

У вересні 1939 р. В. Нікліборц повернувся до Львова, де працював на посаді професора II кафедри математики Політехнічної школи у професора Антонія Ломницького. Враховуючи наукові та педагогічні досягнення, В. Нікліборцу 21 червня 1941 р. (протокол 23, § 26) ВАК ВКВШ присвоїв звання професора по кафедрі "Математика" та вчений ступінь доктора фізико-математичних наук. Відгук до атестаційної справи про переатестацію підписали завідувач кафедри опору матеріалів професор В. Бужинський, завідувач кафедри математики професор А. Ломницький та професор В. Стожек.

Під час війни В. Нікліборц давав приватні уроки математики. З 1 грудня 1941 р. до 30 квітня 1942 р. вчителював у державній хімічній школі; з 1 травня до завершення війни у Львові (1944) викладав математику на Державних технічних фахових курсах (Staatliche Technische Fachkurse), на яких навчалося 739 студентів. Про унікальність технічних курсів і декількох подібних навчальних закладів свідчить те, що гімназії та високі школи були закриті. Проте почали діяти різні фахові школи: технічна, торговельна, де викладали професори університету та політехніки. Після мобілізації української молоді до дивізії "СС Галичина" їх кількість суттєво зменшилась. Лише німці мали змогу отримати повноцінний диплом про закінчення курсів – інші отримували відповідну довідку. Рівень навчання на цих курсах був вищим від офіційно затвердженого програмою завдяки нелегальній додатковій програмі.

Асистентом у В. Нікліборца був Казимир Шалайко (Kazimierz Szałajko), який у 1937 р. став магістром філософії з математики. За свідченням дочки Яна Нікліборца професора Йоанни Захсе (Joanna Sachse) під час війни В. Нікліборц брав участь у русі опору, але документально цього підтвердити не вдалося. В. Нікліборц переховував у себе професора університету Ю. П. Шаудера. Незважаючи на небезпеку Ю. П. Шаудер виходив з дому, відвідував фізика-теоретика професора Войцеха Рубіновича (Wojciech Rubinowicz). У 1943 р. Ю. Шаудер вийшов з дому, його впізнав гімназіальний учень і доніс німцям. Після цього випадку професора Шаудера не бачили.

Після закінчення війни у Львові 10 серпня 1944 р. В. Нікліборц написав заяву (українською мовою) на ім'я директора Львівського політехнічного інституту І. М. Ямпольського (тоді в СРСР термін ректор ще не вживався, вузи трактували як і середні школи з призначуваними владою директорами): "В році 1941 я був професором при кафедрі математики Львівського Політехнічного інституту. Прошу поновити мене на цій самій посаді і поручити керівництво кафедрою." Зарахування на роботу відбулося 1 серпня. Викладав математику і теоретичну механіку.

Фахівців високого рівня у Львові бракувало. Тому В. Нікліборц розпочав свою короткочасну офіційну працю і в Університеті, який теж почав офіційно функціонувати з 1 серпня. Його зараховують на половину ставки тимчасово виконуючого обов'язки професора і керівника (завідувача) кафедри теоретичної механіки, яка виникла на місці кафедри механіки. На заяві декан факультету С. Банах наклав резолюцію: "Пропоную призначити проф. В. Нікліборца професором і керівником кафедри теоретичної механіки на місце знищеного німцями професора Шаудера. Проф. В. Нікліборц є ученим світової слави і його праця на Льв. університеті принесе користь університетові і Радянській науці." На цей час В. Нікліборц опублікував 23 наукові праці та 9 шкільних і вузівських підручників. 8 липня 1944 р. в університеті відкрилася спеціалізація "Теоретична механіка". Крім завідувача (до того ж сумісника) інших працівників на кафедрі не було.

У Львові навчальний рік розпочався з запізненням – 1 листопада 1944 р. Лекції читали трьома мовами – українською, російською та польською надаючи перевагу російській. Повоєнна пора не сприяла широкому виборові хороших викладачів. До читання лекцій залучали і відверто слабких педагогів, часто гімназіальних вчителів, однак студенти сміливо виступали проти тих викладачів, які не вміли добре пояснити програмний матеріал, звертаючись навіть особисто до керівників вузів. Подібна ситуація тоді склалася і на першому курсі енерго-машинобудівельного факультету Львівського політехнічного інституту. До керівництва двічі звертався демобілізований з Червоної армії студент Смілянський. На вимогу студентів директор був змушений відкликати певного небажаного студентам викладача математики і, незважаючи на погане знання завідувачем кафедри професором В. Нікліборцом російської та української мов, направити його в аудиторію. Очевидці цих подій свідчать, що лекції були прекрасними. В. Нікліборц використовував свої записи лише тоді, коли виписував на дошці потрібний російський термін. Він швидко рухався, безупинно говорив і одночасно записував на дошці необхідні математичні твердження та доведення. Студенти усіх національностей були захоплені новим викладачем. У Львові професор тоді мешкав на вул. Шумлянських (тепер Сєченова), 7а, кв. 2.

З огляду на остаточні рішення Ялтинської конференції щодо майбутньої карти Європи, на якій Львів не належав до Польщі, на початку 1945 р. у професорсько-викладацьких колах Львівського політехнічного інституту виникла думка єдиним колективом переїхати до Гданська і сформувати "Морську політехніку". Однак прорадянський польський уряд у Любліні таку пропозицію (можливо й слушно) відхилив. Львівських професорів очікували у багатьох містах – Варшаві, Кракові, Глівіцах, Вроцлаві та Гданську, де також треба було відроджувати вищу освіту. 9 травня 1945 р. радянська влада відкрила евакуаційні бюро і заохочувала поляків до виїзду, не ускладнюючи процедуру отримання евакуаційного квитка (karta ewakuacyjna), де зазначалося, що відповідна особа евакуюється до певного воєводства Польщі. У Польщі відповідні установи вже називали репатріаційними і прибулих вважали репатріантами. Переселенці 1945–1946 рр. сформували чотири ешелони, де для чотирьох сімей виділяли один товарний вагон типу "40 осіб або 8 коней". Перший ешелон виїхав на зламі травня і червня 1945 р., другий найбільший (з 85 вагонів!) – 27 чи 28 вересня, третій – у листопаді, і останній, сформований зі звільнених з тюрем, таборів і примусових робіт у Донбасі, – вже у червні 1946 р.

18 червня 1945 р. В. Нікліборца за його клопотанням призначили звичайним професором Варшавської Політехніки. Тому 20 серпня він офіційно повідомив ректора Львівського університету, що виїжджає "до Польщі і тому Університет не може включити мене в склад професорів на учб. р. 1945–46." 24 вересня у зв'язку з виїздом до Польщі його звільнили також і з політехнічного інституту. На місце В. Нікліборца прийшов член-кореспондент АН УРСР, професор Гурій Миколайович Савін.

Після 18 років праці у Львові з 1922 р. (перерви у 1928–1931 та 1937–1939 рр.) у період з вересня до листопада 1945 р. В. Нікліборц назавжди покинув Львів. Точна дата від'їзду невідома. З доступних джерел відомо, що наприкінці вересня 1945 р. (другий ешелон) Нікліборци виїхали до Вроцлава. Таке повідомлення може стосуватися як усіх Нікліборців, так і лише сім'ї брата Яна. З.С.Олесяк, який їхав тим самим ешелоном через Краків, Катовіце, Ключборк до Гданьска (на кінцеву станцію прибули 7 жовтня), вважає, що пам'ятав би про присутність у ньому свого улюбленого вчителя. Однак у цьому ешелоні могло бути принаймні майно сім'ї Владислава Нікліборца.

До запланованої Варшави В. Нікліборц тоді не доїхав, бо, мабуть, за вказівкою міністерства освіти, спочатку розпочав читати лекції на політехнічних факультетах гірничої Академії у Кракові (Варшавська політехніка щойно зводилася на ноги: ще на початку 1945 р. вона розміщувалася у Любліні, хоча восени заняття розпочалися вже у столиці). У 1946 р. міністерство вирішило перевести В. Нікліборца з Кракова на роботу до Варшавської політехніки. 29 березня професор написав листа до ректора з проханням не переводити його до кінця навчального року з огляду на студентів. У незабарній відповіді приймалися застереження професора і навіть радили йому "не прискорювати надмірно свого приїзду та упорядкувати свої справи якомога вигідніше та спокійніше. Тим більше, що у заплановану для поселення квартиру на партері зараз переселиться професор Немоєвський (Niemojewski), що важко захворів, а пан професор (В. Нікліборц – авт.) отримає його двокімнатну квартиру на третьому (для нас четвертому – авт.) поверсі". Для львів'ян приємно дізнатися, що у Варшаві професор жив поруч з Політехнікою (200 метрів до входу) у дуже гарному будинку на вул. Львівській, 7, у мешканні 21.

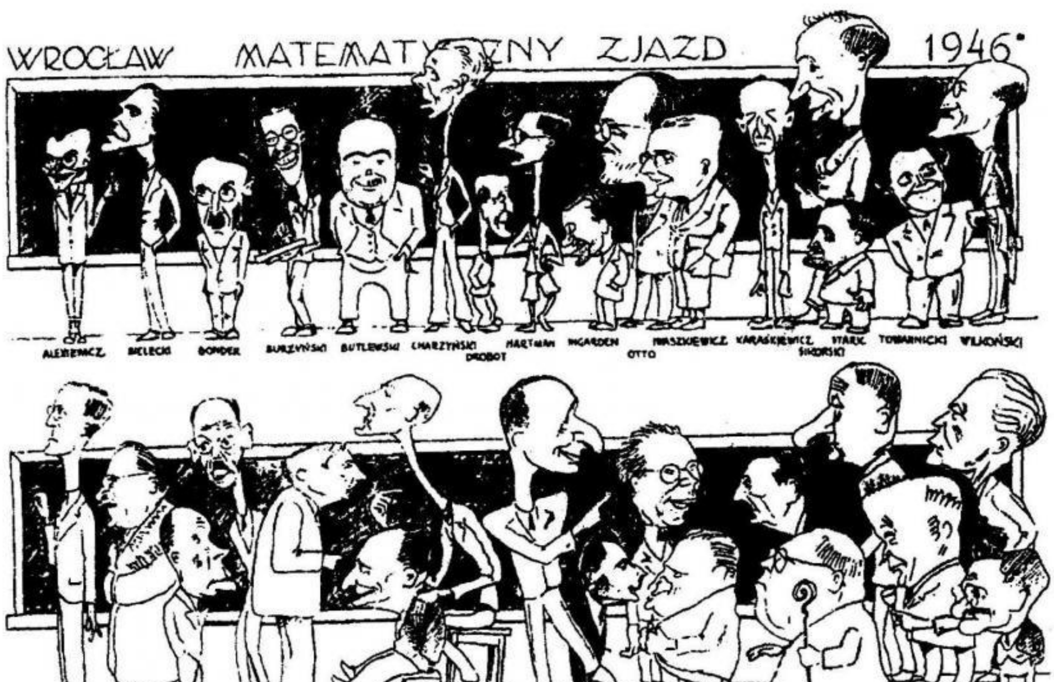

Рис. 2. Дружній шарж на учасників математичного з'їзду у Вроцлаві (Л. Єсманович).

18 квітня 1946 р. В. Нікліборц особисто подав заяву ректорові Варшавської політехніки про бажання зайняти посаду надзвичайного професора математики хімічного факультету, яку займав до 01.09.1939 р. 1 травня відбулося зарахування, у червні – переселення. Цю посаду займав до 30 вересня 1947 р.

У 1947 р. його запросили звичайним професором і завідувачем II кафедри математики Варшавського університету. Ухвалу про його призначення на посаду професора кафедри математики II від 11 серпня 1947 р. підписали тодішні президент Республіки Польща, Голова ради міністрів і міністр освіти. Отримання цього документа В. Нікліборц засвідчив 29 жовтня власноручним підписом. В університеті він читав лекції з теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, диференціальної геометрії.

До війни В. Нікліборц був членом-кореспондентом Львівського наукового товариства (1938). З 1938 р. – звичайним членом і членом-кореспондентом, з 1945 р. – дійсним членом Варшавського Наукового Товариства (TNW) у III відділі математично-фізичних наук.

З 1946 р. до кінця життя – секретар Третього відділення Варшавського Наукового Товариства, а також віце-голова Варшавського відділення Польського математичного товариства. У 1946 р. його обрали членом-кореспондентом, пізніше 18.06.1946 р. Польської Академії Умінь (PAU – Polska Akademia Umiejętności). Був також членом-кореспондентом (1938, хоча в життєписі для Львівського університету зазначено 1939 р. – авт.) та дійсним членом (1946) Академії Технічних Наук (ANT). До речі, у 1951–1952 рр. PAU та Варшавське наукове товариство розпустили. Виникла Польська Академія Наук, яка отримала весь науковий і матеріальний доробок. Пізніше ці інституції відродилися.

Рис. 3. Дружній шарж на В. Нікліборца (Л. Єсманович, 1972).

В. Нікліборц мав славу чудового лектора і вимогливого викладача. Один із авторів (З. Олесяк) слухав його лекції у Політехніці і цілком поділяє цю думку. Всі стверджують, що читав лекції він з піднесенням, швидко рухався, але говорив дуже виразно. На дошці писав чітко. Конспекти його лекцій можна було майже без виправлень давати до друку. У характеристиці, підписаній ректором Львівського політехнічного інституту, знаходимо підтвердження: "Прекрасный, любящий свое дело педагог, темпераментный работник, добивается хорошей успеваемости и пользуется большим авторитетом."

Під кінець свого життя професор мав відчуття, що за ним стежать. Можливо, для цього були підстави, а може це була манія. На одній з лекцій він з претензією звернувся до студента, який сидів у першому ряді: "пан за мною шпигує?" 1 березня 1948 р. близько 17 год внаслідок нервової кризи В. Нікліборц покінчив життя самогубством, перетявши собі жили у парку (подібно зробив інший польський механік А. Вундгайлер (A.Wundheiler), а також угорець А.Рені (A.Reny)). Приводом чи й основною причиною цього став шок від нічного затримання міліцією. Відразу після виходу з арешту та спричиненого ним можливого надужиття алкоголю і сталася ця трагедія. На похорон улюбленого викладача прийшла величезна кількість студентів.

На дошці фамільного гробівця у Вадовіцах, де він похований, є такий напис: "Dr. filozofii Władysław Nikliborc, prof. Uniwersytetu Warszawskiego i Politechniki Warszawskiej i Lwowskiej, członek PAU i Towarzystwa Naukowego. Zmarł 1. III. 1948 r. w 49 roku życia."

Після тривалих пошуків у Польщі та Україні вдалося знайти в архіві інституту історії науки ПАН фотографію професора В. Нікліборца. Відомим серед математиків є дружній шарж Л. Єсмановича (L. Jeśmanowicz) на групу польських математиків, які у 1946 р. були на математичному з'їзді у Вроцлаві (рис. 2). Серед 33 осіб знаходимо математиків і механіків, які працювали у львівських вузах, а саме: Володимира Бужинського, Казимира Куратовського, Владислава Нікліборца, Владислава Орліча, Едварда Отто, Вацлава Серпінського, Андрія Турові, Гуго Штейнгауза. Виконуючи попередні зарисовки, у 1972 р. художник створив інший варіант шаржованого портрету В. Нікліборца (рис. 3).

2. Наукова діяльність. В. Нікліборц талант науковця поєднував з надзвичайною працьовитістю та вмінням виконувати довгі та карколомно складні обчислення. У своїх останніх працях під час розв'язування задачі трьох тіл для отримання бажаного результату він зробив тисячі складних перетворень. У спогадах Владислава Орліча про В. Нікліборца написано: "На мою гадку, він єдиний польський математик, який опублікував оригінальну працю в галузі небесної механіки стосовно задачі трьох тіл. У Studia Mathematica надрукована лише перша частина публікації, але відомо, що під час війни Нікліборц інтенсивно продовжував цю роботу. Дуже шкода, що після його смерті вже ніхто не зумів продертися через звали обчислень, і праця залишилася недокінченою" (переклад авт.).

Характерною рисою його наукової діяльності було намагання узагальнити вже відомі теореми, покращуючи формулювання чи послаблюючи рівень припущень. Його наукові зацікавлення проблемами класичного математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, варіаційного числення, теоретичної механіки (задача трьох тіл) та гідромеханіки викладено у 25 наукових працях.

Крім того, він відомий як теоретик шахової гри. С. Улам згадував, як щодня у шотландській кав'ярні В. Стожек пив каву і по декілька годин грав у шахи зі своїм приятелем В. Нікліборцем, а інші математики їх оточували і вболівали.

У першому періоді наукової діяльності (1924–1929) математики вважають його найбільшим досягненням перше безпосереднє доведення твердження Коші про існування розв'язку необмежено інтегровної системи рівнянь з повними диференціалами ([11], 1929)

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(z,x)\,dx_k \quad (i = 1...n)$$

без попереднього її зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь. На систему було накладено значно слабші обмеження, ніж це робили його попередники, наприклад, Л. Бібербах (L. Bieberbach): від коефіцієнтів системи вимагалася лише неперервність, а не голоморфність. Метод послідовних наближень до споріднених задач, який використовував учений у 1937–1946 рр., застосовували бельгієць Р. Жермей (R. Germay) та деякі інші математики.

У першій друкованій науковій праці ([1], 1924) він довів існування розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ...y_n) \quad (i = 1...n).$$

Застосовуючи класичну теорему Коші, В. Нікліборц припускав функції f_i лише неперервними у замкнутій області та наближав їх рівномірно збіжними послідовностями поліномів. До цієї праці безпосередньо долучена і публікація [2] (1924).

У 1929 р. [12] він застосував метод послідовних наближень до одного такого рівняння, коли права частина задовольняє умову Гельдера. В останній праці ([13], 1929) циклу, що стосувався диференціальних рівнянь, метод послідовних наближень був застосований для знаходження розв'язку системи двох рівнянь другого порядку

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i\left(t, y_1, y_2, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}\right) \ (i = 1, 2),$$

який задовольняє умови

$$y_i(0) = y_i^1,\ y_i(\bar{t}) = y_i^2, \quad \sqrt{y'^2_1(0) + y'^2_2(0)} = v > 0$$

для невідомого наперед значення $\bar{t} > 0$. Отриманий результат використали для розв'язування питань динаміки точки, зокрема й у загальній теорії балістики.

Одержано важливі результати у теорії гіпергармонічних функцій (дійсна або уявна частина аналітичної функції $U(x_1, y_1, x_2, y_2)$ двох комплексних змінних), яка набагато складніша від теорії функцій гармонічних, оскільки вони повинні задовольняти чотири рівняння в частинних похідних [3–5] (1925–1927). Їхнім частковим варіантом є бігармонічні функції. Тоді у цьому напрямі були відомі лише дві основоположні праці А. Пуанкаре (1883, 1898). В. Нікліборц ввів у розгляд так звані гіперсфероїдальні координати, завдяки чому кількість рівнянь з частинними похідними вдалося звести від чотирьох до трьох простіших. Це дало йому змогу сформулювати задачу Діріхле для гіпергармонічних функцій та довести для неї основні залежності. Виявилося, що для цих функцій сформульована задача (як і для деяких інших задач математичної фізики) має дві різні форми: залежно від того, чи асимптотичну поведінку на нескінченності розглядали для дво- чи тривимірного простору. У кожному з них ці умови не можуть бути цілком довільними, оскільки повинні узгоджуватися з певними обмеженнями. Було сформульовано і доведено таке твердження: якщо виконується умова

$$\Delta_1 U = \Delta_2 U = \nabla_1 U = 0,$$

де

$$\nabla_1 U \equiv (x_1x_2 + y_1y_2)\Delta_3 U + (x_1y_2 - y_1x_2)\Delta_4 U,$$
$$\nabla_2 U \equiv (x_1y_2 - y_1x_2)\Delta_3 U - (x_1x_2 + y_1y_2)\Delta_4 U,$$

$$\Delta_k U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_k^2} \ (k = 1, 2),\ \Delta_3 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2},\ \Delta_4 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial x_2},$$

а точка $(0, 0, 0, 0)$ лежить всередині розглядуваної області регуляризації, то $\nabla_2 U = 0$ і функція $U(x_1, y_1, x_2, y_2)$ є гіпергармонічною. Підсумок цих досліджень автор підвів у праці [6] (1927).

Оригінальною була його спільна праця з С. Качмажем (S. Kaczmarz), присвячена аналізу збіжності у середньому [7] (1928), яка певною мірою розвивала математичий бік згадуваного вище методу послідовних наближень.

Важливий внесок В. Нікліборца у розвиток принципу Гамільтона [8] (1927). Проаналізовано випадок, коли узагальнені функції Q_i є не лише функціями часу та узагальнених координат, зокрема, якщо не існує їхній потенціал. Автор дійшов висновку, що рівняння Лагранжа другого роду у кожному випадку є диференціальними рівняннями, що належать до певної узагальненої варіаційної задачі, а також сформулювати узагальнений принцип Гамільтона: у кожній динамічній голономній матеріальній системі з n ступенями вільності істинна траєкторія, що переводить систему з конфігурації A у момент часу t_1 у конфігурацію

B у момент часу t_2, є єдиною з тих траєкторій $q_i(t)$, для якої виконуються умови, необхідні для виконання нерівності

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ T[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t] + \sum_{k=1}^{n} Q_k[\bar{q}_i(t), \dot{\bar{q}}_i(t), t] \cdot [\bar{q}_k(t) - q_k(t)] \right\} dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_1}^{t_2} T[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]\, dt,$$

причому до порівняння допускаються усі траєкторії $\bar{q}_k(t)$, які переводять систему з конфігурації A у момент часу t_1 у конфігурацію B у момент часу t_2 згідно з накладеними в'язями. Автор зазначав, що грунтовніше ознайомитися з працею "Sur une nouvelle classe des problémes du calcul des variations" можна у журналі Annales de la Société Polonaise de Mathématique. Проте працю не надрукували.

Другий етап наукової діяльності В. Нікліборца припадає на 1929–1935 рр. (після стажування у Ляйпцігу). Л. Ліхтенштейн зацікавив його теорією фігур рівноваги у гідродинаміці і пов'язаними з цими питаннями космогонічними теоріями. Під впливом продуктивних та елегантних методів Л. Ліхтенштейна він спочатку значно розширив область застосування відомої нерівності Пуанкаре ($\omega^2/2\pi kf \leqslant a$ $(a = 1)$, де k – гравітаційна стала; f – густина рідини; ω – кутова швидкість обертання), яка стосувалася відносної рівноваги однорідної рідини, яка обертається навколо нерухомої осі. Свою нерівність А. Пуанкаре довів у припущенні, що внутрішній тиск $p = 0$. Л. Ліхтенштейн згодом з'ясував її слушність і для $p \neq 0$. Згодом У. Круделі (U. Crudeli) показав, що $a = 1/2$. В. Нікліборц довів [9] (1929), що останній результат правильний і для кусково неоднорідних рідин.

У циклі з трьох праць [14, 19, 23] (1931, 1933, 1933) вдосконалив результати досліджень С. Мазуркевича (S. Mazurkiewicz, 1926) та О. Л. Гельдера (O. L. Hölder) щодо сплющування фігури рівноваги однорідної рідини під час її обертання, суттєво покращивши вже відому оцінку міри сплющування s. До того часу було доведено, що $s < \sqrt{2\pi}e^{4500}$. Він отримав, що $s < 10$, а для фігур, близьких до сфери, навіть $s < 5$. Порівняно з попереднім результатом, це було дуже близьким до експериментально одержаного значення $s < 1$.

Цю проблематику досліджено у [10] (1929), де доведено твердження про прямування кутової швидкості до нуля, коли $s \to 0$.

Ще дві праці [15, 16] (1932) у цьому напрямі досліджень були присвячені незалежній від П. Дайва (P. Dive) побудові елементарного доведення гіпотези Гельдера про потенціал еліпсоїда. У першій [15] доведено таке: якщо ньютонів потенціал від однорідної об'ємної маси у певній області T характеризує функція

$$V(x, y, z) = D - Ax^2 - By^2 - Cz^2 \ (A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ A + B + C = 2\pi),$$

то область T – еліпсоїд вигляду $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1$.

Друга праця цього циклу [16] стверджувала, коли в обмеженій двома подібними поверхнями області T міститься маса сталою густиною і її ньютонів потенціал всередині порожнинної області сталий, то ці поверхні є гомотетичними еліпсоїдами.

Приблизно у 1932–1934 рр. В. Нікліборц написав дві праці [16, 17] та ще дві [20, 21] разом з В. Стожеком (W. Stożek), присвячені теорії логарифмічного потенціалу. У праці [16] доведена така теорема: якщо межа C опуклої області D є кривою неперервної кривини, причому R є мінімумом її радіуса, то центр ваги області D, так само як і максимуми логарифмічного потенціалу цієї області є в області, обмеженій кривою C' паралельною до C і розташованою усередині D на відстані R від C. Праця [17] доводить сформульоване С. Банахом та В. Стожеком таке твердження: якщо T є плоскою областю, утвореною зі скінченної кількості обмежених областей, а $f(M)$ – інтегровна невід'ємна функція точки M, яка проходить областю T, то кожна лінія рівня логарифмічного потенціалу, породженого областю T, що наділена масою густини $f(M)$, є опуклою кривою, якщо цю область видно з кожної точки цієї лінії під кутом меншим ніж $\pi/4$. Праці [20, 21] розглядали узагальнення відомої формули $W_{\pm}(0) = W(0) \pm \pi f(0)$ теорії логарифмічного потенціалу подвійного шару стосовно ліній з неперервною нормаллю, коли їхні напрямні косинуси задовольняють умову Гельдера, а густина має інтегровну інтенсивність.

В останній період наукової діяльності (1936–1948) В. Нікліборц плідно працював над знаменитою у небесній механіці задачею трьох тіл, до якої значною мірою доклалися його знамениті попередники П. Лаплас, Ж. Л. Лагранж, К. Г.Я. Якобі, А. Пуанкаре. Вже перші результати, зокрема й запропонована В. Нікліборцем методика підходу до цієї проблеми, зацікавили слухачів засідань Польського математичного товариства, учасників математичних з'їздів. У 1939 р. вийшли з друку дві перші [24, 25] і, на жаль, останні праці з цієї тематики. Ідея В. Нікліборца, викладена у першій праці, полягала в оригінальному і вдалому виборі системи координат, відмінної від пропонованих попередніми дослідниками. Одну точку (Сонце) було взято за початок системи координат, а її осі спрямовано так, щоб площина $x + y + z = 0$ була паралельною до інваріантної площини Лапласа (фундаментальної площини відносного руху). Тоді загальний розв'язок побудованої системи диференціальних рівнянь дав залежність швидкостей від координат планет і ще трьох параметрів, пов'язаних однією залежністю другого порядку. Координати відносного руху планет завдяки цьому стали симетричними і це дало значне спрощення порівняно з класичними результатами. Чотири перші інтеграли відносного руху набули вигляду системи алгебричних рівнянь щодо шести компонент відносних швидкостей. Із побудованих залежностей випливали дуже цікаві наслідки. Зокрема про те, що планети можуть зустрітися лише у площині Лапласа; або якщо одна планета падає на Сонце, то друга повинна прямувати до певної визначеної точки площини Лапласа. У другій праці винахідливо побудовані дуже вдалі вирази складових швидкостей як функцій лише двох параметрів.

Початок творчого пошуку був дуже багатообіцяючим, проте усі подальші результати, отримані під час війни та після неї, залишилися у рукописах, які через велику складність підготувати до друку не вдалося.

Праця [22] (1933) дає характеристику наукових здобутків в області небесної механіки Леона Ліхтенштейна (16. 05. 1878–21. 08. 1933). Польський і німецький механік народився та здобув середню освіту у Варшаві, вищу освіту і всі наукові титули (доктор технічних (1908) і філософських (1909) наук) – у Німеччині (політехніка у Шарлоттенбурзі – інженер-машинобудівельник; Берлінський університет), плідно працював у Ляйпцігському університеті, був головним редактором з часу виникнення у 1918 р. наукового математичного журналу Mathematische Zeitschrift, видавцем щорічника Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

(1919–1927 Щорічник про успіхи математики). Особливо цікаво, що Л. Ліхтенштейн творчо співпрацював з багатьма львівськими математиками, приймав їх у Німеччині. З 1931 р. він був членом Львівського математичного товариства і з радістю прийняв пропозицію прочитати у Львівському університеті цикл лекцій. Повернення влітку 1933 р. (після багаторічної відсутності) до Польщі закінчилось несподіваною смертю на відпочинку у Закопаному.

В. Ніклiборц разом зі Г. Штейнгаузом створив у 1930 р. збірник задач з диференціальних рівнянь [26]; разом з В. Стожеком був автором семи [27–30, 32–34] підручників з алгебри для середніх шкіл (1935–1936) та арифметики і геометрії для загальних шкіл (1937–1938). Окремі видання засвідчують, що у 1939 р. у Варшаві вийшов його підручник "Теорія диференціальних рівнянь", однак автори конкретних відомостей про нього не мають. Вже після смерті В. Ніклiборца на підставі залишених матеріалів у 1951 р. Зигмунт Харчинський видав його підручник "Диференціальні рівняння" [35]. У вступі зазначено, що "праця ця запланована з великим розмахом … Залишився лише початковий фрагмент, що містив багато підготовчого матеріалу до наступних розділів і дуже мало власне теорії диференціальних рівнянь" (переклад авт.).

Остання книга складалася з чотирьох розділів: 1. Вступні відомості про диференціальні рівняння; 2. Твердження Коші про існування розв'язку рівняння $y' = f(x,y)$; 3. Ефективне розв'язування окремих типів диференціальних рівнянь; 4. Загальне ускладнене рівняння першого порядку $F(x,y,y') = 0$.

Про науковий і педагогічний авторитет В. Ніклiборца свідчить і замовлена йому стаття "Дидактика математики" [31] (1936) для Енциклопедії педагогіки (виховання).

Незважаючи на те, що В. Ніклiборц працював у математичних осередках різних навчальних закладів, він найбільше цікавився питаннями теоретичної механіки. Його найвагомішими науковими здобутками в галузі механіки треба вважати праці, що стосуються задачі трьох тіл та написані під впливом Л. Ліхтенштейна праці про рівновагу рідких тіл, які обертаються. Після смерті В. Ніклiборца видали першу частину його підручника з диференціальних рівнянь. Залишилися неопублікованими матеріали до підручника з небесної механіки, який планувався до друку в серії "Математичні монографії". Архів ПАН у Варшаві містить понад 800 аркушів нотаток В. Ніклiборца стосовно задачі трьох тіл, твердження про матриці, задачі спрямлюваності еліпса, незалежності криволінійних інтегралів від шляху інтегрування, елементів теорії ймовірності, які передав до нього Ян Ніклiборц. Там можна знайти конспекти курсів лекцій. Автори були би дуже вдячні за додаткову інформацію про життя і творчість В. Ніклiборца та фотографії цього талановитого вченого (sulym@uli.franko.lviv.ua, olesiak@hydra.mimuw.edu.pl).

3. Бібліографія наукових і дидактичних праць В.Ніклiборца

1. Nikliborc W. Nowy dowód twierdzenia o istnieniu całek równań różniczkowych zwyczajnych // Wiadomości Matematyczne. 1924. T. 29. S. 39-45.
2. Nikliborc W. O zastosowaniu zasadniczego twierdzenia Cauchy'ego o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych do zagadnień na wartości brzegowe w równaniu $y'' = f(x,y,y')$. Lwów, 1924.
3. Nikliborc W. Sur les fonctions hyperharmoniques // Comptes Rendus hebdo-

madaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris). 1925. Vol. 180. P. 1008–1010. (Séance du 30 mars 1925).

4. Nikliborc W. Sur les fonctions hyperharmoniques // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris). 1926. Vol. 182. P. 110–112. (Séance du 11 janvier 1926).
5. Nikliborc W. Sur les fonctions hyperharmoniques // Annales de la Société Polonaise de Mathématique. 1927. Vol. 5. P. 63-97.
6. Nikliborc W. O funkcjach hyperharmonicznych. Lwów, 1927 (коштом автора).
7. Kaczmarz St., Nikliborc L. Sur les suites des fonctions convergentes en moyenne // Fundamenta Mathematicae. 1928. Vol. 11. P. 151-168.
8. Nikliborc W. O nowych zagadnieniach rachunku warjacyjnego i zasadzie Hamiltona w dynamice // Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego we Lwowie 7-10. IX. 1927. S. 119-124. Supplément aux Annales de la Société Polonai e de Mathématique, Kraków: Czcionkami drukarni U.J, 1929.
9. Nikliborc W. Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeiten der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten // Mathematische Zeitschrift. 1929. B. 30. S. 787-793.
10. Nikliborc W. Ein Satz über Winkelgeschwindigkeiten der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten // Mathematische Zeitschrift. 1929. B. 31. S. 366-377.
11. Nikliborc W. Sur les équations linéaires aux différentielles totales // Studia Mathematica. 1929. Vol. 1. P. 41-49.
12. Nikliborc W. Sur l'application de la méthode des approximations successives dans la théorie des équations différentielles// Studia Mathematica. 1929. Vol. 1. P. 201-209.
13. Nikliborc W. Ueber die Differentialsysteme zweiter Ordnung // Sitzungsberichte der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. 1930. B. 82. S. 227-242.
14. Nikliborc W. Über die Abplattung homogenen der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten // Mathematische Zeitschrift. 1931. B. 34. S. 74-90.
15. Nikliborc W. Eine Bemerkung über die Volumpotentiale // Mathematische Zeitschrift. 1932. B. 35. S. 625-631.
16. Nikliborc W. Eine Bemerkung über die Volumpotentiale II // Mathematische Zeitschrift. 1932. B. 36. S. 167-170.
17. Nikliborc W. Über die Lage des Schwerpunktes eines ebenen konvexen Bereiches und die Extrema des logarithmischen Flächenpotentials eines konvexen Bereiches // Mathematische Zeitschrift. 1932. B. 36. S. 161-165.
18. Nikliborc W. Über die Niveaukurven logarithmischer Flächenpotentiale // Mathematische Zeitschrift. 1933. B. 36. S. 641-646.
19. Nikliborc W. Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten II // Mathematische Zeitschrift. 1933. B. 36. S. 655-676.

20. Nikliborc W., Stożek W. Sur les potentiels logarithmiques des doubles couches // Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris). 1933. Vol. 197. P. 808-810. (Séance du 2 octobre 1933).

21. Nikliborc W., Stożek W. Über die Grenzwerte des logarithmischen Potentials der Doppelbelegung // Fundamenta Mathematicae. 1934. Vol. 22. P. 109-135.

22. Nikliborc W. Twórczość Leona Lichtensteina w zakresie mechaniki niebios // Mathesis Polska. 1933. Vol. 8. №9-10. S. 143-148.

23. Nikliborc W. Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten III // Studia Mathematica. 1933. Vol. 5. P. 111-126.

24. Nikliborc W. Über das allgemeine Dreikörperproblem, I Mitteilung // Studia Mathematica. 1939. Vol. 8. P. 28-67.

25. Nikliborc W. Über das allgemeine Dreikörperproblem, II Mitteilung // Studia Mathematica. 1939. Vol. 8. P. 92-128.

26. Nikliborc W., Steinhaus H., Cwiczenia z rachunku różniczkowego. Lwów: W-wo zakładu narodowego im.Ossolińskich, 1930. 274 s.

27. Stożek W., Prof. Politechniki Lwowskiej. Wykłady Matematyki I. Część I. Wiadomośći z arytmetyki. Wyznaczniki i równania stopnia pierwszego. Ciągi. Szeregi. Opracował i zadaniami zaopatrzył Dr. W. Nikliborc, Doc. Uni ersytetu J. K. Na podstawie notatek T. Figurz i R. Sobolskiego, Stud. Wydz. Mech. Pol. Lw. Lwów, 1934. 126 s. (ротопринтне видання).

28. Stożek W., Prof. Politechniki Lwowskiej. Wykłady Matematyki I. Część II. Funkcja jednej zmiennej Granica funkcji. Ciągłość funkcji. Pochodna. Opracował i zadaniami zaopatrzył Dr. W. Nikliborc, Doc. Uniwersytetu J. K. Na podstawie notatek T. Figurz i R. Sobolskiego, Stud. Wydz. Mech. Pol. Lw. Lwów, 1934. (ротопринтне видання).

29. Nikliborc W., Stożek W. Algebra dla III klasy gimnazjalnej. Lwów; Warszawa: Książnica "Atlas", 1935. 128 s.

30. Nikliborc W., Stożek W. Algebra dla IV klasy gimnazjalnej. Lwów; Warszawa: Książnica "Atlas", 1936. 112 s.

31. Nikliborc W. Dydaktyka matematyki. Warszawa: Nasza Ksiégarnia, 1936, 22 s. (Odbitka z Encyklopedji Wychowania, V. 1).

32. Nikliborc W., Stożek W. Arytmetyka i geometria. Dla IV klasy szkół powszechnzch I stopnia. Kurs B. Lwów; Warszawa: Książnica "Atlas", 1937. 128 s.

33. Nikliborc W., Stożek W. Arytmetyka i geometria/ Dla IV klasy szkół powszechnzch I stopnia. Kurs C. Lwów; Warszawa: Książnica "Atlas", 1938. 144 s.

34. Nikliborc W., Stożek W. Arytmetyka i geometria.Dla IV klasy szkół powszechnzch I stopnia. Kurs A. Lwów; Warszawa: Książnica "Atlas", 1938. 128 s.

35. Nikliborc W. Równania różniczkowe. Cz. 1. Oprac. Zygmunt Charczyński. Warszawa; Wrocław: PTM, 1951. 176 s. (Monografie Matematyczne, t. 25).

1. *Dianni J., Wachułka A.* Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej. Warszawa, 1963.
2. Encykłopedia Powszechna. 1975. T. II.
3. *Kolankowski St.* Nikliborc Władysław Michał (1899–1948) // Seria C preprintów. Materiały dotyczące Słownika Biograficznego Matematyków Polskich. Preprint IM PAN, Ser. C–3, 1984, z.. I. S. 88–90.
4. *Kuratowski K.* Pół wieku matematyki polskiej 1920–1970. Warszawa, 1973.
5. *Kuratowski K.* Notatki do autobiografii. Warszawa, 1981.
6. *Orlicz W.* Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. II: Wiadomości matematyczne. 1980. T. XXIII. S. 222-231.
7. *Pawlikowska-Brożek Z.* Wykaz profesorów i docentów matematyki pracujących w polskich uczelniach w latach 1919–1939 // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. II: Wiadomości Matematyczne. 1982. T. XXIV. №2. S. 219-222.
8. PEB 1978. T. 23/1. Z. 96. S.120-121.
9. Politechnika Lwowska 1844–1945. Wrocław, 1993.
10. Polski Słownik Biograficzny. Wrocław, 1978. T. XXIII. S. 120-121.
11. *Popławski Z.* Dzieje Politechniki Lwowskiej, 1844–1945. Wrocław; Warszawa; Kraków, 1992.
12. *Popławski Z.* Wykaz pracowników naukowych Politechniki Lwowskiej w latach 1844–1945. Monografia nr. 175. Ser. histor.-techn. Z. 2. Kraków: Politechnika Krakowska, 1994.
13. Rocznik Polskiej Akademii Umiejętności. 1945/46. S. 38-40.
14. Rocznik Tow. Nauk. Warszawskiego. 1938–45. Z. 31/38. S. 121-122.
15. *Szałajko Kazimierz.* Wspomnienia lwowskie // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. II: Wiadomości Matematyczne. 1994. T. XXX. S. 251-263.
16. *Ślebodziński W. ś.P.* Władysław Nikliborc (1899–1948). Rocznik Tow. Nauk. Warsz. 1948. T. XLI. S. 159-163.
17. *Ślebodziński W.* Władysław Nikliborc et son oeuvre scientifique // Coll. Math. 1947–1948. Vol. 1. Fasc. 4. P. 322-330.
18. *Śródka A., Szczawiński P.* Nikliborc Władysław Michał // Biogramy uczonych polskich. Część III: Nauki ścisłe, Wrocław; Warszawa; Kraków; Gdańsk; Łódż. 1986. S. 278-280.
19. *Steinhaus Hugo.* Leon Lichtenstein. Wspomnienia pośmiertne // Mathesis Polska. 1933. Vol. 8. №9-10. S. 131-142.
20. *Studnicki Gustaw.* Przyczynek do biografii Władysława Nikliborca // Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Ser. II: Wiadomości Matematyczne. 1985. T. XXVI. ą 2. S. 231-232.
21. *Tatarkiewicz T.* Historia mechaniki. 1995.
22. *Ulam S.* Przygody matematyka. Warszawa, 1996. (Adventures of a Mathematician. University of California Press. Berkley, USA, 1976.)

NIKLIBORC WLADYSLAW MICHAL (1899-1948)

G. Sulym, Z.S. Olesiak

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
University of Warsaw, 2 Banach Str. Warsaw, Poland

The life and scientific work of famous polish mathematician and mechanician Nikliborc Wladyslaw Michal, specialist in differential equations, function theory, theoretical mechanics and hydromechanics are presented. He was a head of chaire in Lviv Polytechnic, Lviv University, a professor of Warsaw University and Warsaw Polytechnic.

Key words: Nikliborc Wladyslaw Michal, mathematician, mechanician, differential equations, theoretical mechanics.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.2001
Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.176–180

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.176–180

УДК 519.21

МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО РІШЕННЯ В УМОВАХ РИЗИКУ

Андрій БОБИЛЯК, Ярослав ЄЛЕЙКО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто моделі прийняття рішення оптимального за декількома критеріями. Введено низку означень і доведено можливість апроксимації нескінченної множини рішень скінченною з довільною точністю. Також розглянуто моделі, в яких задачу з декількома критеріями зводять до задачі з одним критерієм.

Ключові слова: моделі багатокритеріального рішення.

Предметом теорії рішень за умов ризику є дослідження законів перетворення апріорної та апостеріорної інформації про стан об'єкта та середовища в кількісні складові інформації керування, що притаманні різним суб'єктам керування та різним керованим економічним суб'єктам (органам).

У багатьох випадках, коли різних рішень занадто багато, які суттєво ускладнюють обчислення або критерій, за яким було б раціонально відбирати рішення, є не один, або перше і друге, то було б доцільним шукати не тільки розв'язки, в яких досягається екстремум за певною ознакою (як в більшості стандартних критеріїв Байєса, мінімаксний, Джейнса, Лапласа, Вальда, Севіджа та інші [1]), а й вимагати досягнення певного рівня за одним або декількома критеріями.

Побудуємо модель прийняття рішення. Ситуацію прийняття рішення характеризуватимемо множиною $\{X,\theta,G,K\}$. Де X – скінченна або нескінченна множина рішень суб'єкта керувань такого вигляду $X=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\{x_\alpha\}$, де $I\subset\Re^m$. Зауважимо, що інколи зручно довизначити скінченну множину рішень до нескінченної. Наприклад, $X=\{x_{(p_1,\dots,p_m)}:(p_1,\dots,p_m)\in[0;100]^m\}$, де рішення $x_{(p_1,\dots,p_m)}$ відповідає купівлі p_1 одиниць першого виду акцій,..., p_m одиниць m-го виду акцій.

Нехай $\Theta=\{\theta_1,\dots,\theta_n\}$ – множина станів природи (економічного середовища), яке може перебувати в одному і тільки одному стані (цей істинний стан невідомий у момент прийняття рішення). Задано також функціонал $G:\theta\times X\to\Re$, який оцінює корисність (грошовий приріст, втрати тощо) суб'єкта керування при настанні стану $\theta\in\Theta$ та прийнятті рішення $x\in X$. Нехай K – скінченна множина критеріїв, за якими доцільно відбирати рішення. Нехай також відомий апріорний розподіл $p=(p_1,\dots,p_n)$ перебування середовища у відповідному стані, тобто $p_i=P(\theta_i)$, де $i=\overline{1,n}$.

Кожен критерій $k_j\in K, j=\overline{1,s}$ повинен бути заданим, враховуючи сенс розв'язуваної задачі. За критерій можуть бути вибрані різноманітні технічні, економічні показники та інші характеристики, тобто критерій розглядають як функціонал перелічених вище множин. Розглянемо цей функціонал як функцію корисності на множині X. Тобто

$$\forall x,y\in X\quad (I_k(x)\succeq_k I_k(y))\Longleftrightarrow(x\geqslant y).\tag{1}$$

Випадок зменшення корисності при зростанні значень функціонала розглядають аналогічно. Природно вважати, що функціонали G та I_k є обмеженими на $\Theta \times X$ та X відповідно.

Означення 1. Нехай X – простір рішень, тоді величину

$$\gamma_k = \frac{I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)}{\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)} * 100\%$$

назвемо показником оптимальності рішення $x \in X$ за критерієм K, де I_k – функціонал, який породжується критерієм K.

Теорема 1. *Нехай X – множина рішень суб'єкта керування, K – скінченний простір критеріїв і довільному критерію $k \in K$ відповідає обмежений функціонал I_k на X. Тоді*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists X_\varepsilon \subset X : (\mathrm{card}(X_\varepsilon) < \mathrm{card}(N)) \wedge$$
$$\wedge (\forall x \in X \exists x' \in X_\varepsilon : \forall k \in K \;\; | \gamma_k(x) - \gamma_k(x') | < \varepsilon.$$

Інтерпретація. *Для знаходження рішення з цим показником оптимальності та з заданою наперед точністю достатньо розглядати скінченну підмножину рішень.*

Доведення. Для кожного критерію $k \in K$ введемо функцію $\varrho_k : X \times X \to \Re$, отже,

$$\forall x, y \in X \quad \varrho_k = | I_k(x) - I_k(y) |, \tag{2}$$

де I_k функціонал, який відповідає критерію K. Зауважимо, що для функції ϱ_k виконуються такі співвідношення:

1. $\forall x, y \in X \quad \varrho_k(x, y) = \varrho_k(y, x);$
2. $\forall x, y, z \in X \quad \varrho_k(x, y) \leqslant \varrho_k(x, z) + \varrho_k(y, z).$

Для того щоб стверджувати, що ϱ_k є метрикою на X, треба ще виконати умови: $\forall x, y \in X \;\; \varrho_k(x, y) = 0 \iff x = y$. Тому введемо відношення $\sim$ стандартно: $x \sim y \iff I_k(x) = I_k(y)$. Очевидно, що це буде відношення еквівалентності. Тому розглянемо фактор-множину $X/\sim \equiv \tilde{X}$. Зрозуміло, що ϱ_k буде метрикою на $\tilde{X}$.

Оскільки функціонал I_k є обмеженим на X (отже, і на $\tilde{X}$), то $\tilde{X}$ обмежений в $(\tilde{X}, \varrho_k)$. Тоді $\tilde{X}$ міститиме скінченну ε-сітку. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tilde{A}_k \subset \tilde{X} \; (\tilde{A}_k - \textit{скінченна}) : \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \; \exists \tilde{a} \in \tilde{A}_k : \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon.$$

Якщо замість класу еквівалентності $\tilde{a} \in \tilde{A}_k$ взяти його довільний представник $a \in X$, то отримаємо відповідну скінченну множину $A_k \subset X$ і $\forall x \in X$ $(x \in \tilde{x} \in \tilde{X}$ $\exists \tilde{a} \in \tilde{A} : \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon)$ $\exists a \in A_k$ $(a \in \tilde{a}) : \varrho_k(x, a) = \varrho_k(\tilde{x}, \tilde{a}) < \varepsilon$. Тобто, A_k буде скінченною ε-сіткою в X. Нехай $K = \{k_1, \ldots, k_l\}$, тоді $X_\varepsilon = \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_{k_i}$ – скінченна і така, що $\forall x \in X \; \exists x' \in X_\varepsilon \; \forall k \in K : | \gamma_k(x) - \gamma_k(x') | = \dfrac{| I_k(x) - I_k(x') |}{\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x)} \leqslant$ $\dfrac{\varrho_k(x, x')}{M} < \dfrac{\varepsilon}{M}$, де $M = \min\limits_{k \in K}(\sup\limits_X I_k(x) - \inf\limits_X I_k(x))$. Твердження доведено.

Означення 2. Якщо для цього рішення $x' \in X$ існує $x'' \in X$ таке, що $G(\theta_i, x') \leqslant G(\theta_i, x'')$ $\forall i \in \overline{1,n}$ і $\exists \theta \in \Theta : G(\theta, x') < G(\theta, x'')$, то говоритимемо, що рішення x'' домінує над рішенням x' або x' домінується рішенням x''.

Означення 3. Рішення, яке домінується якимось іншим, називатимемо недопустимим, в протилежному випадку допустимим.

Природно незалежно від використовуваних критеріїв відбирати рішення серед допустимих. Якщо кожному рішенню $x \in X$ поставити у відповідність точку $g(\theta_1, x), \ldots, g(\theta_n, x)) \in \Re^n$, то одержимо множину $D \subset \Re^n$. Неважко переконатись з означення допустимого рішення про таке, якщо воно існує, то відповідна йому точка буде з множини точок межі для D (надалі вважатимемо, що існує, бо в протилежному випадку X легко доозначується за неперервністю допустимими рішеннями).

1. Геометрична інтерпретація критерія Байєса

Нагадаємо, що рішення $x_0 \in X$ називається оптимальним за критерієм Байєса, якщо

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} p_i * g(\theta_i, x) = \sum_{i=1}^{n} p_i * g(\theta_i, x_0) \tag{1.1}$$

(max, бо G-функціонал, що відповідає за корисність). Якщо позначити $g(\theta_i, x) \equiv x_{(i)}$, то рішенню x буде відповідати точка $(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}) \in \Re^n$, а тоді $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i * x_{(i)} = \text{const}$ задаватиме гіперплощину в n-вимірному просторі. Оскільки $(\forall i\ p_i \geqslant 0) \wedge \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$, то вектор нормалі цієї гіперплощини буде утворювати гострий кут з довільною віссю координат. Отже, крайні положення цієї гіперплощини є такі, коли вектор нормалі є перпендикулярним до $(n-1)$-ї осі. Зрозуміло, що геометрично оптимальний розв'язок за критерієм Байєса шукаємо за рахунок зсуву гіперплощини вздовж своєї нормалі $(p_1/p, \ldots, p_n/p)$, де $p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^2\right)^{1/2}$, доти, доки гіперплощина не матиме тільки одну спільну точку з множиною D. Ця єдина спільна точка і буде відповідати оптимальному рішенню за критерієм Байєса.

Висновок 1. *Якщо суб'єкт керування користується критерієм Байєса для визначення оптимального рішення, то йому достатньо відбирати їх серед тих допустимих рішень, яким відповідають "верхні" точки множини D (тобто тих, для яких існує "дотична" в цій точці гіперплощина з вектором нормалі, яка утворює гострі кути з кожною віссю координат).*

2. Багатокритеріальний випадок

Для врахування декількох критеріїв суб'єкт керування повинен вирішити якому надати більший, а якому менший пріоритет. Тому раціонально ввести в загальному лінійному випадку (нелінійний випадок розглядають аналогічно) поняття вагових коефіцієнтів (β_{ij}), де β_{ij} – числове значення ваги i-го критерія при настанні j-ого економічного стану. Природно, щоб $\forall i \in \overline{1,n}; j \in \overline{1,l}\ \beta_{ij} > 0$, а тоді шляхом перепозначення завжди можна добитись того, що $\sum\limits_{j=1}^{l} \beta_{ij} = 1$. Тоді задачу знаходження оптимального рішення можна звести до варіаційної задачі

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} p_i * \beta_{ij} * \gamma_{k_j}(x_\alpha) \ \to \max, \ \alpha \in I \subset \Re^n. \tag{2.1}$$

У разі потреби можна додати обмеження – нерівності на показники оптимальності вигляду $\sum\limits_{j=1}^{l} c_j * \gamma_j(x_\alpha) \geqslant c$, де $c, c_1, \dots, c_l$ – сталі.

У випадку незалежності вагових коефіцієнтів від стану середовища отримаємо

$$f(\alpha) = \sum_{j=1}^{l} \beta_j * \gamma_{k_j}(x_\alpha) \ \to \max, \ \alpha \in I \subset \Re^n. \tag{2.2}$$

Ця задача має геометричну інтерпретацію, якщо $\gamma_{k_j}(x_\alpha)$ $(\forall j \in \overline{1,l})$ і $f(\alpha)$ розглядати як поверхню в $\Re^n \times \Re$, а обмеження-нерівності відповідають тим точкам, які лежать вище відповідної гіперплощини. У випадку складнішої залежності критеріїв ніж лінійна зміни в рівнянні (2.1) очевидні. Тому для більшої наочності далі розглядатимемо лінійний випадок.

3. Зведення багатокритеріального випадку до однокритеріального
Розглянемо два підходи. Перший полягає в тому, що в задачі (2.1) зробимо заміну $\tilde{g}(\theta_i, x) \equiv \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_{ij} * \gamma_{k_j}(x)$. Тоді одержимо задачу

$$\sum_{i=1}^{n} p_i * \tilde{g}(\theta_i, x) \to \max. \tag{3.1}$$

Порівнюючи її з (1.1) бачимо, якщо x_0 є оптимальним рішенням нашої багатокритеріальної задачі $\{X, \theta, G, K\}$, то воно є оптимальним за критерієм Байєса для задачі $\{X, \theta, \tilde{G}\}$. Тобто, відповідно змінюємо функціонал оцінювання корисності (цінності) рішень і для нього розв'язуємо задачу на пошук оптимального рішення за критерієм Байєса серед підозрілих на оптильність рішень (див. Висновок 1).

Другий підхід збудуємо на підставі такої теореми.

Теорема 2. *Нехай задача прийняття рішення характеризується множиною $\{X, \theta, G\ , K\}$. Якщо замкнена множина D (побудована вище) опукла, то для довільного допустимого рішення $x \in X$ $\exists \tilde{p}_i, i = \overline{1,n}$*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i = 1\right) \wedge \left(D \subset \left\{y \in \Re^n : \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * y_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * x_{(i)}\right\}\right).$$

Інтерпретація. *У випадку опуклості D множина допустимих рішень є підмножиною оптимальних рішень за критерієм Байєса для деякого апріорного розподілу $\tilde{p}(\theta)$.*

Для одержання опуклої множини замість множини D розглянемо $\tilde{D} = \operatorname{lin} D = \left\{y \in \Re^n : \exists \lambda_i \geqslant 0, i = \overline{1,n} \ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right) \wedge \left(y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i * y_i, \, y_i \in D, \, i = \overline{1,n}\right)\right\}$.

Під $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i * y_i$, де $y_i \in D$, розумітимемо таке "рішення", при якому з ймовірністю λ_i приймається рішення, що відповідає y_i.

Нехай множина $\tilde{D}$ породжує відповідний простір рішень $\tilde{X}$. Тоді з того, що оптимальний розв'язок x_0 для задачі $\{\tilde{X}, \theta, G, K\}$ є допустимим, випливає (за теоремою) те, що він буде оптимальним за критерієм Байєса для деякого розподілу $\tilde{p}(\theta)$, тобто

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * g(\theta_i, x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i * g(\theta_i, x_0).$$

Оскільки результуюче рішення буде оптимальним за критерієм Байєса, то множину допустимих рішень, серед яких відбирається оптимальний розв'язок, можна звузити до відповідної вищепобудованої множини (див. Висновок 1). Іншими словами, багатокритеріальну задачу можна звести до однокритеріальної за допомогою або зміни апріорного розподілу $p(\theta)$, або зміни функціонала корисності G, у разі потреби нескінченну множину рішень наближають скінченною з довільною наперед заданою точністю.

1. *Вітлинський В.В., Наконечний С.І.* Ризик у менеджменті. – К., 1996.
2. *Ансофф И.* Стратегическое управление. – М., 1994.
3. *Вітлинський В.В.* Нечітка багатокритеріальна ієрархічна модель підтримки процесів прийняття рішень. – К., 1994.-33 с. Деп.- у КДЕУ 14.12.94, N 2439-Ук94.

MODELS OF A MULTICRITERIA SOLUTION IN CONDITIONS OF RISK

A. Bobilyak, Ya. Yeleyko

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The models of optimum by several criteria of a solution were considered. A several of definitions were defined ana a possibility of an infinite set approximating of solutions by final set with any exactitude was proved. There were also constructed models which reduce a problem with several criteria to a problem with one criterion.

Key words: models of multicriteria solution.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.181–190 *Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.181–190*

УДК 539.3

РІВНЯННЯ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З МАТЕРІАЛУ МУНІ

Андрій ГЛОД, Петро ДОМАНСЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна

У праці побудовано математичну модель рівнянь руху циліндричних тіл з матеріалу Муні. Метод побудовано на розкладені базових параметрів у ряд за тензорною базою. Розглянуто часткові випадки одержаних рівнянь.
Ключові слова: рівняння руху циліндричних тіл.

Побудову рівнянь руху (рівноваги) циліндричних тіл із нестисливих матеріалів у рамках нелінійної теорії пружності в різних аспектах розглядало багато авторів. Наприклад, у монографії [1] з використанням узагальненої геометричної гіпотези Кірхгофа (гіпотези плоских перерізів) виведено рівняння руху тонких стержнів, які записано в зусиллях і моментах.

У цій праці запропоновано методику побудови рівнянь руху циліндричних тіл із нестисливого матеріалу, який характеризується потенціалом Муні [1], без апріорних припущень геометричного, статичного та інерційного характеру, засновану на використанні рівняння балансу енергії і розвинення визначальних параметрів в ряд за тензорною базою. Система рівнянь руху записана стосовно коефіцієнтів розвинення визначальних параметрів, які залежать від осьової координати і часу. Використовували підхід і позначення, які прийняті в праці [2].

1. За основу приймаємо виведене в праці [3] рівняння руху циліндричних тіл в інтегральній формі

$$\int\limits_D \left(\vec{\partial}_0^3 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \vec{\partial}_0^\alpha \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + $$
$$+ \hat{F}^{(i)} = 0 \ (i = \overline{1, N}), \tag{1}$$

яке одержано за умови, що вектор переміщення $\vec{u}$ з відлікової конфігурації в актуальну конфігурацію подано у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$, які залежать від планарних координат

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{2}$$

Густина потенціальної енергії деформації матеріалу Муні $U_0 = c_1[I_1(\hat{G}) - 3] + c_2[I_2(\hat{G}) - 3]$, задається функцією інваріантів міри деформації Коші - Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [1] де c_1, c_2 – сталі, числове значення яких залежить від властивостей матеріалу. Якщо скористатися умовою нестисливості

$$I_3(\hat{G}) = 1, \tag{3}$$

а також формулами для похідних від інваріантів міри деформації Коші - Гріна $\hat{G}$ за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$ [4]

$$I_1(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_2(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2[I_1(\hat{G})\hat{I} - \hat{G}] \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r},$$
$$I_3(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2I_3(\hat{G})\vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T,$$

то можна одержати

$$\hat{P} = \frac{dU_0}{d\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = \{-p\hat{G}^{-1} + 2[(c_1 + c_2 I_1(\hat{G}))\hat{I} - c_2\hat{G}]\} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}. \tag{4}$$

Тут p – множник Лагранжа, тобто скалярна функція, яка залежить від матеріальних координат і часу, що визначається з рівнянь руху (рівноваги), за умови нестисливості.

Зауважимо, що

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \quad \hat{G} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T,$$
$$I_1(\hat{G}) = 3 + 2\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \tag{5}$$

і з точністю до членів другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$\hat{G}^{-1} = \hat{I} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T. \tag{6}$$

Якщо підставити (5), (6) в (4) і залишити члени не вище другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, то отримаємо

$$\hat{P} = (2c_1 + 4c_2 - p)\hat{I} + 2(c_1 + c_2)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + (p - 2c_2)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + 4c_2\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{I} + 2c_2(2\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} +$$
$$+ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \hat{I} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T) - \tag{7}$$
$$- p\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T.$$

Подамо множник Лагранжа p у вигляді розвинення

$$p = \sum_{i=1}^{N_1} \vec{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{p}^{(i-1)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{8}$$

Знайдемо вектори напружень $\vec{P}_j = \vec{\mathcal{Э}}_j^0 \cdot \hat{P}$. Для цього підставимо (2), (8) у вираз (7) для тензора напружень $\hat{P}$ і домножимо одержаний результат зліва на вектор $\vec{\mathcal{Э}}_j^0$. Після перетворень одержимо

$$\vec{P}_j = 2(c_1 + 2c_2)\vec{\mathcal{Э}}_j^0 + \sum_{r=1}^{N} \left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \right) + \sum_{r=1}^{N_1} \hat{K}_j^{(r)} \overset{r-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} +$$
$$+ \sum_{r,k=1}^{N} \left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$
$$\left. + \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} \right) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{r=1}^{N_1} \left(\hat{D}_{j1}^{(k+r)} \overset{r+k-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$
$$\left. + \hat{D}_{j2}^{(k+r)} \overset{r+k-1}{\cdot} \hat{p}^{(r-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} \right) - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{r,k=1}^{N} \left(\hat{C}_{j1}^{(k+r+m)} \overset{k+r+m-1}{\cdot} \hat{p}^{(m-1)} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right.$$

$$+\hat{C}_{j2}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\,\hat{p}^{(m-1)}\otimes\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{C}_{j3}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\,\hat{p}^{(m-1)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+$$

$$+\hat{C}_{j4}^{(k+r+m)\,k+r+m-1}\,\hat{p}^{(m-1)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}\Bigg). \tag{9}$$

Тут

$$\hat{A}_{j1}^{(r+1)}=2[(c_1+c_2)\delta_j^\alpha\hat{I}+2c_2\vec{\partial}_j^0\otimes\vec{\partial}_0^\alpha-c_2\vec{\partial}_0^\alpha\otimes\vec{\partial}_j^0]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},$$

$$\hat{A}_{j2}^{(r+1)}=2[(c_1+c_2)\delta_j^3\hat{I}+2c_2\vec{\partial}_j^0\otimes\vec{\partial}_0^3-c_2\vec{\partial}_0^3\otimes\vec{\partial}_j^0]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{K}_j^{(r)}=-\vec{\partial}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)}=2c_2\Big[\Big(\delta^{\alpha\beta}\vec{\partial}_j^0-\delta_j^\alpha\vec{\partial}_0^\beta\Big)\otimes\vec{\partial}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\partial}_s^0+\hat{I}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes(2\delta_j^\beta\vec{\partial}_0^\alpha-$$

$$-\delta_j^\alpha\vec{\partial}_0^\beta-\delta^{\alpha\beta}\vec{\partial}_j^0)\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\quad \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)}=2c_2[\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes(2\delta_j^3\vec{\partial}_0^\alpha-\delta_j^\alpha\vec{\partial}_0^3)- \tag{10}$$

$$-\delta_j^\alpha\vec{\partial}_0^3\otimes\vec{\partial}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_s^0]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\hat{B}_{j3}^{(k+r+1)}=2c_2\left[\hat{I}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes(2\delta_j^\beta\vec{\partial}_0^3-\delta_j^3\vec{\partial}_0^\beta)-\right.$$

$$\left.-\delta_j^3\vec{\partial}_0^\beta\otimes\vec{\partial}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\partial}_s^0\right]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\hat{B}_{j4}^{(k+r+1)}=2c_2\left[(\vec{\partial}_j^0-\delta_j^3\vec{\partial}_0^3)\otimes\vec{\partial}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_s^0+\right.$$

$$\left.+\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes(\delta_j^3\vec{\partial}_0^3-\vec{\partial}_j^0)\right]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{D}_{j1}^{(k+r)}=\vec{\partial}_0^\alpha\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{D}_{j2}^{(k+r)}=\vec{\partial}_0^3\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\hat{C}_{j1}^{(k+r+m)}=\vec{\partial}_0^\alpha\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\partial}_0^\beta\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j2}^{(k+r+m)}=\vec{\partial}_0^\alpha\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_0^3\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j3}^{(k+r+m)}=\vec{\partial}_0^3\otimes$$

$$\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\partial}_0^\beta\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)},\hat{C}_{j4}^{(k+r+m)}=\vec{\partial}_0^3\otimes\vec{\partial}_j^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_0^3\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}\otimes\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)};$$

δ^{kn},δ_k^n – символи Кронекера.

Якщо внести вирази (9) з коефіцієнтами (10) для векторів $\vec{P}_j$ у систему рівнянь руху (1), згрупувати подібні члени і виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Муні в локальній формі

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{A}_1^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{A}_2^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{A}_3^{(ik)}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}\right)+\sum_{k=1}^{N_1}\Bigg(\hat{K}_1^{(ik-1)}\overset{k-1}{\cdot}\hat{p}^{(k-1)}+$$

$$+\hat{K}_2^{(ik-1)}\overset{k-1}{\cdot}\frac{\partial\hat{p}^{(k-1)}}{\partial\xi^3}\Bigg)+\sum_{r,k=1}^{N}\left[\hat{B}_1^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_2^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\right.$$

$$+\hat{B}_3^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{B}_4^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_5^{(ikr)}\overset{kr}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+$$

$$+\hat{B}_6^{(ikr)}\ {}^{kr}\cdot\ \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)}] + \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{N_1}[\hat{D}_1^{(ikr-1)}\ {}^{kr-1}\cdot\ \frac{\partial \hat{p}^{(r-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} +$$

$$+\hat{D}_2^{(ikr-1)\ kr-1}\cdot\ \hat{p}^{(r-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{D}_3^{(ikr-1)\ kr-1}\cdot \left(\frac{\partial \hat{p}^{(r-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(r-1)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) +$$

$$+\hat{D}_4^{(ikr-1)\ kr-1}\cdot\ \hat{p}^{(r-1)} \otimes \hat{u}^{(k)}\Bigg] + \sum_{m=1}^{N_1}\sum_{k,r=1}^{N}\Bigg[\hat{C}_1^{(ikrm-1)\ krm-1}\cdot\ \frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} +$$

$$+\hat{C}_2^{(ikrm-1)\ krm-1}\cdot\ \hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{C}_3^{(ikrm-1)\ krm-1}\cdot\ \hat{p}^{(m-1)} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} +$$

$$+\hat{C}_4^{(ikrm-1)\ krm-1}\cdot \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(m-1)} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) +$$

$$+\hat{C}_5^{(ikrm-1)\ krm-1}\cdot \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \otimes \hat{u}^{(k)}\right) +$$

$$+\hat{C}_6^{(ikrm-1)krm-1}\cdot\ \hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{C}_7^{(ikrm-1)krm-1}\cdot \left(\frac{\partial \hat{p}^{(m-1)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} +\right.$$

$$\left.+\hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{p}^{(m-1)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2}\right) + \hat{C}_8^{(ikrm-1)\,krm-1}\cdot\ \hat{p}^{(m-1)} \otimes \hat{u}^{(r)} \otimes$$

$$\otimes \hat{u}^{(k)}\Bigg] + \hat{S}^{(i)} + \hat{F}^{(i)} = \rho_0 \sum_{k=1}^{N} \hat{M}^{(ik)}\ {}^{k}\cdot\ \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{\partial \tau^2} \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{11}$$

Тут

$$\hat{A}_1^{(ik)} = 2\int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes [(c_1 + c_2)\vec{\mathfrak{I}}_t^0 + c_2\delta_t^3\vec{\mathfrak{I}}_3^0] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}_2^{(ik)} = 2c_2 \int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes$$

$$\otimes[\hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes (2\delta_t^3\vec{\mathfrak{I}}_0^\alpha - \delta_t^\alpha\vec{\mathfrak{I}}_0^3) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes (\delta_t^3\vec{\mathfrak{I}}_0^\gamma - 2\delta_t^\gamma\vec{\mathfrak{I}}_0^3) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)}] d\Sigma_0,$$

$$\hat{A}_3^{(ik)} = -2\int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes [(c_1 + c_2)\delta^{\alpha\gamma}\vec{\mathfrak{I}}_t^0 + 2c_2\delta_t^\gamma\vec{\mathfrak{I}}_0^\alpha - c_2\delta_t^\alpha\vec{\mathfrak{I}}_0^\gamma] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{K}_1^{(ik-1)} = \int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{K}_2^{(ik-1)} = -\int_D \vec{\mathfrak{I}}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_1^{(ikr)} = -2c_2 \int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \left(\vec{\mathfrak{I}}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_0^\beta + \delta_t^\beta \vec{\mathfrak{I}}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_s^0\right) \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_2^{(ikr)} = 4c_2 \int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_3^{(ikr)} = \hat{B}_1^{(ikr)} + \hat{B}_2^{(ikr)} -$$

$$-2c_2 \int_D \vec{\mathfrak{I}}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes (\delta_t^\gamma \vec{\mathfrak{I}}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_s^0 - \vec{\mathfrak{I}}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\mathfrak{I}}_0^\gamma) \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_4^{(ikr)} = \hat{B}_7^{(ikr)} - 4c_2 \int\limits_D \delta^{\gamma\beta} \vec{\exists}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\exists}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_5^{(ikr)} = \hat{B}_7^{(ikr)} + 2c_2 \int\limits_D \delta^{\gamma\alpha} \vec{\exists}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes (\vec{\exists}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 + \delta_t^3 \vec{\exists}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\exists}_s^0) \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \;\; \hat{B}_6^{(ikr)} = -2c_2 \int\limits_D \vec{\exists}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \Big[(\delta^{\alpha\beta} \delta_t^\gamma - \delta^{\alpha\gamma} \delta_t^\beta) \vec{\exists}_0^S \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_S^0 +$$

$$+ \vec{\exists}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes (2\delta^{\gamma\beta} \vec{\exists}_0^\alpha - \delta^{\alpha\gamma} \vec{\exists}_0^\beta - \delta^{\alpha\beta} \vec{\exists}_0^\gamma) \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \;\; \hat{B}_7^{(ikr)} =$$

$$= 2c_2 \int\limits_D \delta^{\alpha\beta} \vec{\exists}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \left(\delta_t^3 \vec{\exists}_0^S \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_S^0 - \vec{\exists}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_3^0 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \tag{12}$$

$$\hat{D}_1^{(ikr-1)} = \int\limits_D \vec{\exists}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \hat{D}_2^{(ikr-1)} = \hat{D}_1^{(ikr-1)} + \hat{D}_4^{(ikr-1)},$$

$$\hat{D}_3^{(ikr-1)} = \int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \;\; \hat{D}_4^{(ikr-1)} = -\int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes$$

$$\otimes \vec{\exists}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \;\; \hat{C}_1^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\exists}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_0^\beta \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_2^{(ikrm-1)} = \hat{C}_1^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\exists}_0^\gamma \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes$$

$$\otimes \vec{\exists}_0^\beta \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_3^{(ikrm-1)} = \hat{C}_1^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\exists}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\exists}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes$$

$$\otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_4^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\exists}_0^\alpha \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_5^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_0^\beta \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_6^{(ikrm-1)} = \hat{C}_4^{(ikrm-1)} + \hat{C}_5^{(ikrm-1)} + \int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\exists}_0^\gamma \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes$$

$$\otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_7^{(ikrm-1)} = -\int\limits_D \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\exists}_3^0 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} d\Sigma_0, \hat{C}_8^{(ikrm-1)} = \int\limits_D \vec{\exists}_0^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \vec{\exists}_0^\gamma \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\exists}_0^\beta \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(m-1)}d\Sigma_0, \hat{S}^{(i)} = -2(c_1+2c_2)\int\limits_D \vec{\partial}_0^{\gamma}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\gamma}}d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(ik)} = \int\limits_D \vec{\partial}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\vec{\partial}_t^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}d\Sigma_0.$$

Зауваження. З метою скорочення записів у формулах (11), (12), на відміну від позначень праці [2], індекси "(ik)", "$(ik-1)$", "(ikr)", "$(ikr-1)$", "$(ikrm-1)$" означають відповідно такі ранги тензорних функцій: $i+k$, $i+k-1$, $i+k+r$, $i+k+r-1$, $i+k+r+m-1$, а символами "$\overset{kr}{\cdot}$", "$\overset{kr-1}{\cdot}$", "$\overset{krm-1}{\cdot}$" позначено $k+r$, $k+r-1$, $k+r+m-1$ – кратні внутрішні добутки тензорів.

Система (11) складається з N тензорних диференціальних рівнянь у частинних похідних стосовно $N+N_1$ коефіцієнтів $\hat{u}^{(k)}$, $\hat{p}^{(i-1)}$ $(k=\overline{1,N},\ i=\overline{1,N_1})$ розвинень (2), (8) вектора переміщення $\vec{u}$ і множника Лагранжа p. Для того щоб одержати необхідні ще N_1 рівнянь, скористаємося умовою нестисливості матеріалу (3). Можна переконатися, що в прийнятому наближенні

$$I_3(\hat{G}) = 1+2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}+2(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u})^2-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\cdot\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u},$$

тобто умову нестисливості матеріалу можна записати у вигляді

$$\Psi = 2\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u}+2(\vec{\nabla}_0\cdot\vec{u})^2-\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}\cdot\cdot\vec{\nabla}_0\otimes\vec{u}=0. \tag{13}$$

Підставимо (2) в (13). В результаті отримаємо

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N}2\left(\vec{\partial}_0^{\alpha}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}+\vec{\partial}_0^{3}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}\right)+\sum_{i,k=1}^{N}\Bigg[\left(2\vec{\partial}_0^{\beta}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\partial}_0^{\alpha}-\right.$$

$$\left.-\vec{\partial}_0^{\alpha}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\partial}_0^{\beta}\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{i+k}{\cdot}\hat{u}^{(i)}\otimes\hat{u}^{(k)}+(2\vec{\partial}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_0^{\alpha}-\vec{\partial}_0^{\alpha}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_3^{0})\otimes$$

$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^{\alpha}}\overset{i+k}{\cdot}\hat{u}^{(i)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}+\left(2\vec{\partial}_0^{\beta}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\partial}_3^{0}-\vec{\partial}_3^{0}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\partial}_0^{\beta}\right)\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i+k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(i)}}{\partial\xi^{3}}\otimes\hat{u}^{(k)}+\vec{\partial}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\partial}_3^{0}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i+k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(i)}}{\partial\xi^{3}}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^{3}}\Bigg].$$

Якщо тепер функцію Ψ подати у вигляді розвинення

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N_1}\hat{\Phi}^{(i-1)}\overset{i-1}{\cdot}\hat{\Psi}^{(i-1)}(\{\hat{u}^{(k)}\}),$$

то з умови, що $\Psi=0$, одержимо необхідних N_1 рівнянь

$$\hat{\Psi}^{(i-1)}(\{\hat{u}^{(k)}\})=0\quad(i=\overline{1,N_1}), \tag{14}$$

які спільно з рівняннями системи (11) становлять повну систему рівнянь для визначення шуканих функцій.

З системи рівнянь (11), (14), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Трелоара [4]. Для цього достатньо у формулах (12) прийняти, що $c_2=0$.

2. Запишемо систему рівнянь (11) для випадку, коли у розвиненнях (2), (8) зберігається лише по два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}_0^n\}$, тобто

приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$, $p = \hat{p}^{(0)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{p}^{(1)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\mathcal{E}}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\mathcal{E}}_0^\alpha \otimes \vec{\mathcal{E}}_0^k$, $\hat{p}^{(1)} = p_k \vec{\mathcal{E}}_0^k$. Система (11) складається з векторного ($i = 1$) та тензорного ($i = 2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх у координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Відомо, що вектор статичних моментів першого порядку та відцентровий момент інерції області D дорівнюють нулю. Якщо обчислити коефіцієнти за формулами (12), підставити їх в (11) і виконати відповідні згортки, то отримаємо

$$2(c_1+c_2)\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} - 2c_2\biggl[\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} + u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right) + \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3} + u_{\beta 3}\right) + u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial^2 u_s}{(\partial\xi^3)^2} +$$

$$+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - 2\biggl(u^\beta_\beta \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3})\biggr] + \hat{p}^{(0)}\biggl[\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\left(1 - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) - u_{\beta 3}\frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3} -$$

$$-u_{\alpha 3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\biggr] + \frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}\left[u_{\alpha 3}\left(1 - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) - u_{\beta 3}u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\right] - \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\biggl[u_{\alpha 3}\left(\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3} + p_\beta\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial\xi^3)^2}\right)$$

$$+p_\beta\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\biggr] + \frac{F_\alpha}{s_0} = \rho_0\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\tau^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$2(c_1 + 2c_2)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + 2c_2\biggl[2\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3} - u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\left(\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2} + 2\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right) - \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3} + 2\biggl(u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + u^\alpha_\alpha\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\biggr)\biggr] + \hat{p}^{(0)}\biggl[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\left(1 - 2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) - u_{\beta 3}\frac{\partial^2 u^\beta}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta}{\partial\xi^3} -$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\biggr] - \frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}\left[1 + \frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}u^{\beta 3} - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\left(1 - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\left(\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right)^2\right] -$$

$$-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\biggl[p_\beta(u_{\gamma 3}\frac{\partial^2 u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial\xi^3)^2}\left(1 - 2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) + 2\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}) +$$

$$+\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\left(u_{\gamma 3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\left(2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} - 1\right)\right)\biggr] + \frac{F_3}{s_0} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1 + c_2)\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} - c_1 u_{\alpha\alpha} - c_2\biggl[2(1 + u_{\alpha\alpha})\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + u^\beta_\beta\right) + \frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3} - \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\right)^2 - u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}$$

$$+u^{\cdot s}_{\beta\cdot}u^{\beta\cdot}_{\cdot s} - u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}u_{\alpha s} - u_{\beta\alpha}(u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot} + u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}) + \frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\biggl(u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial^2 u_{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2} - 2\biggl(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} +$$

$$+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\biggr) + \frac{\partial u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\biggr) + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\left(\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3} - \left(\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\right)^2\right)\biggr] +$$

$$+\frac{\hat{p}^{(0)}}{2}\left[1 - u_{\alpha\alpha} + u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}u_{\beta\alpha} - \frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\left(u_{\alpha 3}\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2} + \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\right)^2\right)\right] +$$

$$+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\biggl[-\frac{\partial\hat{p}^{(0)}}{\partial\xi^3}u_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3} + p_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\left(1 - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) - u_{\beta 3}\frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3} - u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3} - u_{\alpha 3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\right) +$$

$$+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\left(u_{\alpha3}\left(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\beta3}u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\right)\Bigg]+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{2s_0}p_\beta u_{\alpha3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}-c_1-2c_2+\frac{F_{\alpha\alpha}}{2s_0}=$$

$$=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1+c_2)\frac{\partial^2u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-(c_1+c_2)u_{\alpha\beta}+c_2\Bigg[u_{\beta\alpha}+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+u_{\alpha3}\right)+u_{\alpha s}u_{\beta\cdot}^{\cdot s}-2u_{\alpha\beta}\Bigg(u_\gamma^\gamma+$$

$$+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Bigg)+u_{\gamma\beta}\left(u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}+u_{\cdot\alpha}^{\gamma\cdot}\right)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\Bigg(2u_{\cdot\gamma}^{\gamma\cdot}\frac{\partial^2u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-u_{\gamma\beta}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}}{(\partial\xi^3)^2}-u_{\beta\cdot}^{\cdot s}\frac{\partial^2u_{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}+2\frac{\partial u_\gamma^\gamma}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}-\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial\xi^3}\Bigg)+\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{J^{\gamma\gamma}}{s_0}\frac{\partial u_{\gamma\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial\xi^3}\Bigg]+\frac{\hat p^{(0)}}{2}\Bigg[-u_{\beta\alpha}+u_{\beta3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}+u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}u_{\gamma\alpha}-$$

$$-\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\left(u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\right)\Bigg]+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\Bigg[-\frac{\partial\hat p^{(0)}}{\partial\xi^3}u_{\beta3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}+p_\alpha\Bigg(\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\left(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-$$

$$-u_{\gamma3}\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}-u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\frac{\partial u_{\gamma3}}{\partial\xi^3}-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}\Bigg)+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\left(u_{\beta3}\left(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\gamma3}u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{J^{\gamma\gamma}}{2s_0}p_\gamma u_{\beta3}\frac{\partial u_{\gamma\alpha}}{\partial\xi^3}+\frac{F_{\beta\alpha}}{2s_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha\beta}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}(c_1+2c_2)\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}-(c_1+c_2)u_{\alpha3}+c_2\Bigg[\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\alpha3}\left(2u_\beta^\beta+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)+$$

$$+u_{\alpha\cdot}^{\cdot s}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}+u_{\beta3}\left(u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}+u_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}\right)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\Bigg(2\left(u_\beta^\beta\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_\beta^\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\right)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-$$

$$-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}\Bigg)+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\Bigg]+\frac{\hat p^{(0)}}{2}\Bigg[\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-1\right)+u_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}+$$

$$+\frac{J^{\alpha\alpha}}{s_0}\Bigg(\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\left(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}-2\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\Bigg)+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{s_0}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\Bigg]+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial\hat p^{(0)}}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\left(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\beta3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial\xi^3}\right)+\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\Bigg[p_\alpha\Bigg(\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}$$

$$\times\left(1-2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-u_{\beta3}\frac{\partial^2u^\beta}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta}{\partial\xi^3}\Bigg)-\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-1\right)+u_{\cdot3}^{\beta\cdot}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{2s_0}p_\beta\left[\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}-\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\left(1-\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)+u_{\gamma\alpha}\frac{\partial u_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}}{\partial\xi^3}\right]-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha\beta\beta}}{2s_0}\Bigg[2\frac{\partial p_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}$$

$$+2p_\beta\left(\frac{\partial^2u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+2p_\alpha\frac{\partial^2u_{\beta3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\right)^2\Bigg]+$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha\alpha\alpha}}{s_0}\left[\frac{\partial p_\alpha}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\right)^2+2p_\alpha\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha3}}{\partial\xi^3}\right]+\frac{F_{3\alpha}}{2s_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{2s_0}\frac{\partial^2u_{\alpha3}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2).\quad(15)$$

У рівняннях (15) використано позначення: $u_{\alpha k} = u_{\alpha\cdot}^{\cdot k} = u_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = u^{\alpha k}$ $u_k = u^k$; $F_i = \vec{Э}_i^0 \cdot \hat{F}^{(1)}$; $F_{kn} = \vec{Э}_n^0 \otimes \vec{Э}_k^0 \cdot\cdot \hat{F}^{(2)}$; s_0 –площа області D;

$$J^{\alpha\alpha} = \int\limits_D (\xi^\alpha)^2 d\Sigma_0, \quad J^{\alpha\alpha\beta\beta} = \int\limits_D (\xi^\alpha)^2 (\xi^\beta)^2 d\Sigma_0 \quad -$$

моменти інерції другого та четвертого порядків області D стосовно осей координат. Нагадаємо, що за індексами α, β, γ, які один раз повторюються зверху і знизу, проводиться підсумовування від 1 до 2, а за всіма іншими індексами – від 1 до 3.

Можна переконатися, що рівняння (14) в прийнятому наближенні мають вигляд

$$\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\left(2 + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) + 2u_\beta^\beta(1 + u_\beta^\beta) + 4u_\beta^\beta \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} - u_{\beta\alpha}u^{\alpha\beta} - 2u_{\beta 3}\frac{\partial u^\beta}{\partial \xi^3} = 0,$$

$$\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\left(1 + 2u_\beta^\beta + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) - u_{\beta 3}\frac{\partial u_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \qquad (16)$$

Нелінійні диференціальні рівняння (15), (16) становлять повну систему для визначення коефіцієнтів u_k, $u_{\alpha k}$, $\hat{p}^{(0)}$, p_α ($\alpha = 1, 2;\ k = \overline{1, 3}$), якими визначаються вектор переміщення і множник Лагранжа.

---

1. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Л., 1986.

2. *Доманський П. П.* Побудова і аналіз рівнянь руху циліндричних тіл із матеріалу Мурнагана // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. - С.107-118.

3. *Доманський П. П.* Математичні моделі нелінійної динамічної теорії пружності циліндричних тіл. – Львів, 1995. – 43 с. (Препринт / НАН України. ІППММ: 16-95).

4. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – М., 1980.

MOTION EQUETIONS FOR CYLINDRICAL SOLIDS OF MOONEY MATERIAL

Hlod A., Domans'kyj P.

Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A model of motion equations for cylindrical solids of Mooney material is derived. The derivation method is relied on expanding base parameters in series by tensor basis. The spesial cases of obtained equations are considered.

Key words: motion equations for cylindrical solids.

Стаття надійшла до редколегії 06.04.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.191–198 Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.191–198

УДК 539.3

ДО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРИ ЕКСПОНЕНЦІЙНОМУ ЗАКОНІ ДЕФОРМУВАННЯ ШОРСТКОСТІ

Наталія ДЯЧЕНКО, Світлана ШИШКАНОВА
Запорізький державний університет
вул.Жуковського, 66 69063 Запоріжжя, Україна

Розглянуто задачу контакту плоского кругового в плані штампу з пружним півпростором із шорсткістю при деформуванні шорсткості за експоненційним законом. Цей закон відповідає зміні фактичної площі контакту, яку виявили Г.М.Бартенєв і В.В.Лаврентьєв. Залежно від коефіцієнтів шорсткості (два випадки: великих і малих їхніх значень) ця задача потребує різних методів розв'язку. Для кожного з цих випадків інтегральне рівняння задачі зводиться до нескінченої системи нелінійних рівнянь, до якої застосовують метод послідовних наближень і метод редукції. У праці проведено аналіз залежності функції тиснення і поглиблення штампу від коефіцієнтів шорсткості і від діючої сили.
Ключові слова: контакт плоского кругового штампа.

У своєму первісному варіанті дискретна модель не враховує вплив мікровиступів, тобто напружено-деформівний стан матеріалу в області плями контакту повністю визначається навантаженням, яке сприймає цей контакт. Ця гіпотеза забезпечує гарну відповідність між теорією й експериментом при малій щільності плям контакту. Однак у тих випадках, коли ця вимога не виконується, це припущення призводить до помилкових результатів. Наочним прикладом обмеженості такої моделі є насичення площі контакту, яку експериментально виявили Г.М.Бартенєв і В.В.Лаврентьєв [1, 2, 3] на полімерних матеріалах і гумах. Експериментально одержана залежність фактичної площі контакту від тиску для багатьох полімерів і гум має вигляд [2, с.118]

$$\Lambda = 1 - \exp(-\chi p/E),$$

де Λ – відносна величина фактичної площі контакту; χ – параметр, що залежить від шорсткості поверхонь; p – номінальне навантаження; E – модуль пружності.

Внаслідок дії сили Q, яка притискає штамп до півпростору перпендикулярно до площини $z = 0$, і лінія дії якої проходить через початок координат, плоский штамп переміститься на глибину δ. Переміщення точки півпростору складаються з пружних переміщень півпростору в цій точці W_2 і додаткового переміщення точки за рахунок зім'яття мікровиступів W_1, тобто ([2, с.70], [3]) $W_1 + W_2 = \delta$.

Враховуючи вищезгадане, розглянемо два види нелінійної залежності зім'яття мікровиступів від нормального тиснення ([2, с.70], [3])

$$W_1' = B\left[p(\rho, \theta)\right]^k, \tag{1}$$

де B і k – показники шорсткості,

$$W_1'' = h\left[1 - \exp\left(-\beta p(\rho, \theta)/E\right)\right], \tag{2}$$

β, h – параметри, які залежать від шорсткості поверхонь.

Відмітимо, що для $k = 1$ при невеликих навантаженнях, коли $\beta p(\rho,\theta)/E$ – мале, виконується $W_1' \approx W_1''$, при цьому

$$B = h\beta/E.$$

Випадок $k = 1$ з деформуванням шорсткості за законом (1) розглянули автори в [4].

Інтегральне рівняння розподілу нормального тиснення під круговим в плані плоским штампом, який вдавлюється вертикальною силою Q у пружний півпростір з шорсткою поверхнею при деформуванні шорсткості за законом (2), характеризується функцією $p(\rho)$, яка задовольняє інтегральне рівняння:

$$h_1\left[1 - \exp\left(-\alpha p_1(\rho)\right)\right] + \frac{1}{a}\iint\limits_{\Omega} \frac{p_1(\rho')}{r(\rho,\rho')} ds = \delta_1. \tag{3}$$

Тут Ω – круг радіуса a, (ρ,θ) – полярні координати точок півпростору, $(\rho,\theta) \in \Omega$, $ds = \rho' d\rho' d\theta'$, $r(\rho,\rho') = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho'\cos(\theta - \theta')}$, $\delta_1 = \frac{\delta}{a}$, $h_1 = \frac{h}{a}$, $p_1(\rho) = c^{-1}p(\rho)$, $c = \frac{\pi E}{1-\upsilon^2}$, $\alpha = \frac{\beta\pi}{1-\upsilon^2}$, δ– поглиблення штампа при вдавленні, υ – коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо оператор A на просторі неперервних функцій, що має вигляд [5]

$$(Ap_1)(\rho) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Omega} \frac{p_1(\rho')}{r(\rho,\rho')} ds.$$

для якого $\|A\| \leqslant 1$.

1. Випадок перший: h_1 **– велике**

Нехай

$$\psi(\rho) = -\left[1 - \exp\left(-\alpha p_1(\rho)\right)\right] + \frac{\delta_1}{h_1},$$

тоді

$$p_1(\rho) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1}\right],$$

а рівняння (3) перепишемо у вигляді

$$\psi = G\psi, \tag{4}$$

$$(G\psi)(\rho) = -\frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}A\ln\left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1}\right] = \frac{2\pi}{h_1}\left[Ap_1\right](\rho).$$

Це рівняння Гамерштейна. *Рівняння (4) має єдиний розв'язок у класі неперервних функцій, який можна знайти методом послідовних наближень, якщо*

$$h_1 > \frac{2\pi}{\alpha}\exp\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}, \tag{5}$$

де $Q_1 = Qc^{-1}$, а Q – вертикальна сила, діюча на штамп по осі симетрії.

Співвідношення (5) свідчить про те, що рівняння (4) можна розв'язати методом послідовних наближень з допомогою такої заміни при великих h_1.

2. Метод розв'язування рівняння (4)

Представимо невідому функцію у вигляді

$$\psi(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i},$$

тоді

$$p_1(\rho) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j}\right] = -\frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j}, \tag{6}$$

де

$$\xi_0 = \gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{h_1}, \quad \xi_j = \gamma_j, \quad \beta_0 = \sigma_0 = \ln \xi_0, \quad \beta_j = \frac{\xi_j}{\xi_0} \quad (j \in \mathbf{N});$$

$$a_{j,m} = \sum_{i=1}^{j} a_{j-i,m-i+1}\beta_i, \quad a_{j,j} = \beta_j \quad (m = 1, \cdots, j; \quad j \in \mathbf{N});$$

$$p_j = \frac{(-1)^j}{j}; \quad \sigma_j = \sum_{m=1}^{j} p_{j-m+1} a_{j,m} \quad (j \in \mathbf{N}).$$

Нехай

$$h_{i,j} = \left[\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\right]^2 \frac{1}{2j - 2i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, ...; \quad j = 0, 1, 2, ...).$$

Підставивши (6) і вирази $A\left(\left[\frac{\rho}{a}\right]^{2j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{j,i} \left[\frac{\rho}{a}\right]^{2i}$ ([6]) в (4), прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях $\frac{\rho}{a}$, одержимо нескінченну систему нелінійних рівнянь

$$\gamma_i = -\frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{h_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j h_{j,i} \quad (i = 0, 1, 2, 3, ...). \tag{7}$$

Якщо на штамп діє вертикальна сила Q, спрямована по осі симетрії, то з умови рівноваги

$$Q = \iint_{\Omega} p(\rho') ds$$

маємо

$$\delta_1 = h_1 \left(1 + \gamma_0 - \exp\left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{j+1}\right]\right), \tag{8}$$

де

$$\sigma_i = \sigma_i \left(\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_1\right).$$

3. Про можливість використання методу редукції для розв'язку системи нелінійних рівнянь (7), (8)

Розглянемо відображення $P_N : C[0,a] \to R_N[0,a]$, де $R_N[0,a]$ - простір поліномів N-го степеня, визначених на $[0,a]$. Результат дії цього відображення на f позначимо $\overline{f}_N$ (тобто $\overline{f}_N = P_N f$).

Для спрощення записів індекс N опускатимемо (замість P_N і $\overline{f}_N$ писати P і $\overline{f}$ відповідно).

Наближене рівняння набуде вигляду

$$\overline{\psi} = \overline{G\psi}, \tag{9}$$

де

$$\left(\overline{G\psi}\right)(\rho) = -\frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\sum_{i=0}^{N}\left(\sum_{j=0}^{N}\sigma_j h_{j,i}\right)\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i} = -\frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\left[PAP\phi(\overline{\psi}\right](\rho),$$

$$\phi(\psi(\rho)) = \ln\left[\psi(\rho) + 1 - \frac{\delta_1}{h_1}\right].$$

1. Правильні такі співвідношення:

а) умова близькості відображень

$$\|PG\overline{\psi_1} - \overline{G\psi_1} - \left(PG\overline{\psi_2} - \overline{G\psi_2}\right)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\|PA\|\,\|I-P\|\,\|\phi(\overline{\psi_1}) - \phi(\overline{\psi_2})\| \leqslant$$
$$\leqslant u(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1\|\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}\| = \eta\|\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2}\|,$$

де

$$u = \frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\exp\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}, \quad \varepsilon_1 = \|I-P\|, \quad \eta = u(1+\varepsilon_1)\varepsilon_1$$

(вираз для ε_1 залежить від P, в позначенні якого опущений індекс N, тому матимемо на увазі залежність ε_1 від N);

б) умова доброї апроксимації елементів вигляду $G\psi$ елементами з $R_N[0,a]$ для будь–яких елементів ψ_1 і ψ_1 із $C[0,a]$ розглянемо елементи з $R_N[0,a]$ вигляду

$$y_m = -\frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\left[PA\phi(\psi_m)\right](\rho) \quad (m = 1, 2),$$

тоді

$$\|G\psi_1 - y_1 - (G\psi_1 - y_1)\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{h_1}\|A\|\,\|I-P\|\,\|\phi(\psi_1) - \phi(\psi_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant u\varepsilon_1\|\psi_1 - \psi_2\| = \eta_1\|\psi_1 - \psi_2\|, \quad \eta_1 = u\varepsilon_1.$$

2. Про можливість розв'язку наближеного рівняння (9).

Відображення $H\psi = \psi - G\psi$ на класі неперервних функцій за умов (9) має обернене H^{-1}, неперервність якого випливає з нерівностей

$$\|H\psi_1 - H\psi_2\| \geqslant (1-u)\|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{1}{\eta_3}\|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Величина

$$\lambda = (\eta + \|I-P\|\eta_1)\,\eta_3 = \frac{u(1+2\varepsilon_1)\varepsilon_1}{1-u}$$

на класі неперервних на $[0,a]$ функцій при $u < 1$ і достатньо малих ε_1 (тобто для великих N) менша за 1.

Оскільки виконані умови а, б, то з [7, с.524] $\overline{H}$ має неперервне обернене і для будь-яких y_1 і y_2 з $R_N[0,a]$

$$\|\overline{H}^{-1}y_1 - \overline{H}^{-1}y_2\| \leqslant \frac{\eta_3}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|.$$

3. Збіжність послідовності $\overline{\psi}^*_N$ наближених розв'язків до точного розв'язку. Пригадаємо спочатку, що в позначеннях опускали індекс N у P і $\overline{f}$. З визначення η, η_1 випливає, що вони залежать від $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N)$, тому $\eta = \eta(N)$, $\eta_1 = \eta_1(N)$, а також

$$\lim_{N\to\infty} \eta(N) = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \eta_1(N)\|P_N\| = 0.$$

На підставі 2 та з [7, с.527] ми дійшли висновку: *при достатньо великих N наближене рівняння має розв'язок і послідовність наближених розв'язків $\overline{\psi}^*_N$ збігається до точного ψ^**, тобто

$$\lim_{N\to\infty} \|\psi^* - \overline{\psi}^*_N\| = 0.$$

4. Випадок другий: h_1 – мале

Рівняння (1) після замін

$$\mu = 1 - \frac{h_1}{2\pi}, \quad \psi(\rho) = -[1 - \exp(-\alpha p_1(\rho))] + \frac{\delta_1}{2\pi}$$

перепишемо у вигляді

$$\psi(\rho) = \mu\left[\psi(\rho) - \frac{\delta_1}{2\pi}\right] - \frac{1}{a} A \ln\left[1 + \psi(\rho) - \frac{\delta_1}{2\pi}\right]. \tag{10}$$

Рівняння (10) має єдиний розв'язок у класі неперервних функцій, який можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$\frac{1}{\alpha} \exp\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} < 1 \quad i \quad h_1 < 2\pi. \tag{11}$$

Аналогічно до першого випадку здобудемо нескінченну систему нелінійних рівнянь

$$\gamma_i = \mu\gamma_i - \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j h_{j,i} \quad (i = 1, 2, 3, ...),$$

де

$$\gamma_0 = \mu\gamma_0 - \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{1}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j h_{j,0}. \tag{12}$$

$$\delta_1 = 2\pi\left(1 + \gamma_0 - \exp\left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma_j}{j+1}\right]\right), \quad \sigma_i = \sigma_i\left(\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_1\right)$$

за такими самими позначеннями коефіцієнтів, що і вище, крім $\xi_0 = \gamma_0 + 1 - \frac{\delta_1}{2\pi}$.

За умов (11) на класі неперервних функцій доведення можливості використання методу редукції проводять аналогічно до випадку великих h_1.

5. Числові результати.

Метод послідовних наближень при виконанні описаних умов (5) або (11) застосовують для розв'язування відповідних скінчених систем, які утворилися з нескінчених (7), (8) або (12).

Як нульове наближення в методі послідовних наближень використовуємо

$$\delta_1^{(0)} = h_1\left(1 - \exp\left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}\right]\right) + \frac{\pi Q_1}{2a^2},$$

$$\gamma_0^{(0)} = C\delta_1^{(0)} - \left(1 - \exp\left[-\frac{\alpha Q_1}{\pi a^2}\right]\right) + \frac{\pi Q_1}{2a^2}, \quad (C = \max\{2\pi, h_1\}),$$

$$\gamma_i^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Точність наближених значень функції тиснення дорівнює сумі ε_1 і точності методу послідовних наближень, яку задавали значенням 10^{-6}. Алгоритм реалізовано на мові програмування FORTRAN 77. Результати зображено на рисунках. Якщо графіки розташовані один на одному (малий на великому), то малому відповідає тиск $Q_1 = 0,008625$, а великому здебільшого $Q_1 = 0,5$.

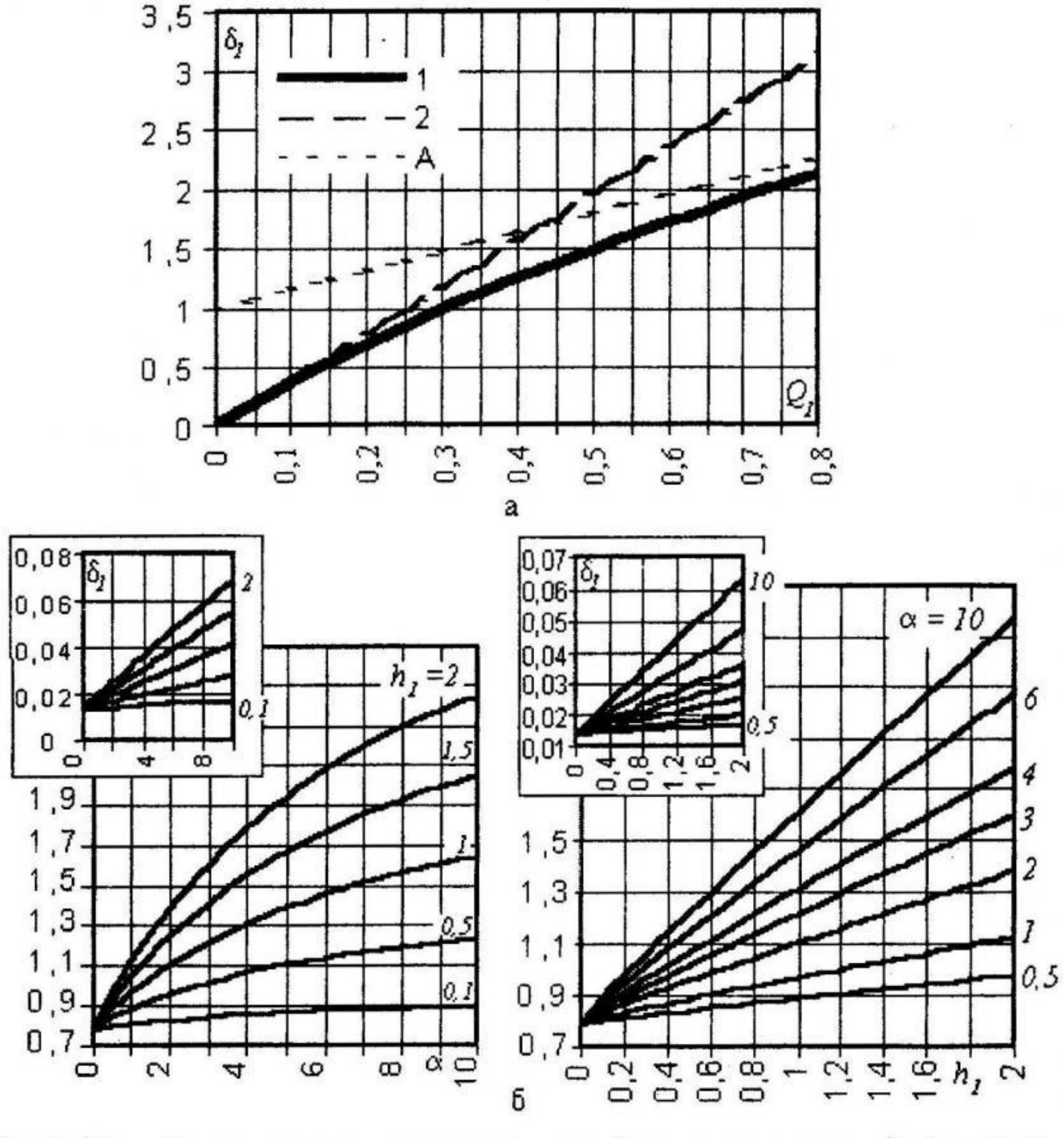

Рис.1. Поглиблення плоского кругового в плані штампу в шорсткий півпростір.

На рис. 1,а зображено графіки поглиблень штампу в пружний півпростір з шорсткістю і залежністю від тиску Q_1, що відповідають поглибленню при дії експоненційного закону за фіксованих $\alpha = 7$ і $h_1 = 1$ (лінія 1) і степеневого закону для $k = 1$ і $B_1 = \alpha h_1 = 7$ (лінія 2). З графіка видно, що ці лінії для малих значень Q_1 дотикаються. Для великих Q_1 графік поглиблень за експоненційним законом наближається до лінії A, значення ординат якої мають вигляд $h_1 + Q_1\frac{\pi}{2}$.

На рис. 1,б зображено графіки поглиблень штампу в пружний півпростір з шорсткістю й залежністю від кожного з коефіцієнтів шорсткості.

На рис. 2,а зображено графіки значень функції тиснення в центрі і на межі площадки контакту для фіксованих $\alpha = 7$, $h_1 = 1$ при дії експоненційного закону і $k = 1$, $B_1 = \alpha h_1 = 7$ при степеневому законі залежно від тиску Q_1. З рис 2, а, 2, б видно, що зі збільшенням значення функції $p_1(\rho)$ у всіх точках збільшується. Для малих значень Q_1 за обома законами значення збігаються.

На рис. 2,в побудовано графіки $p_1(\rho)$ для фіксованих $\alpha = 7$ і різних h_1. На рис. 2,г – графіки $p_1(\rho)$ при фіксованому $h_1 = 1$ і різних α.

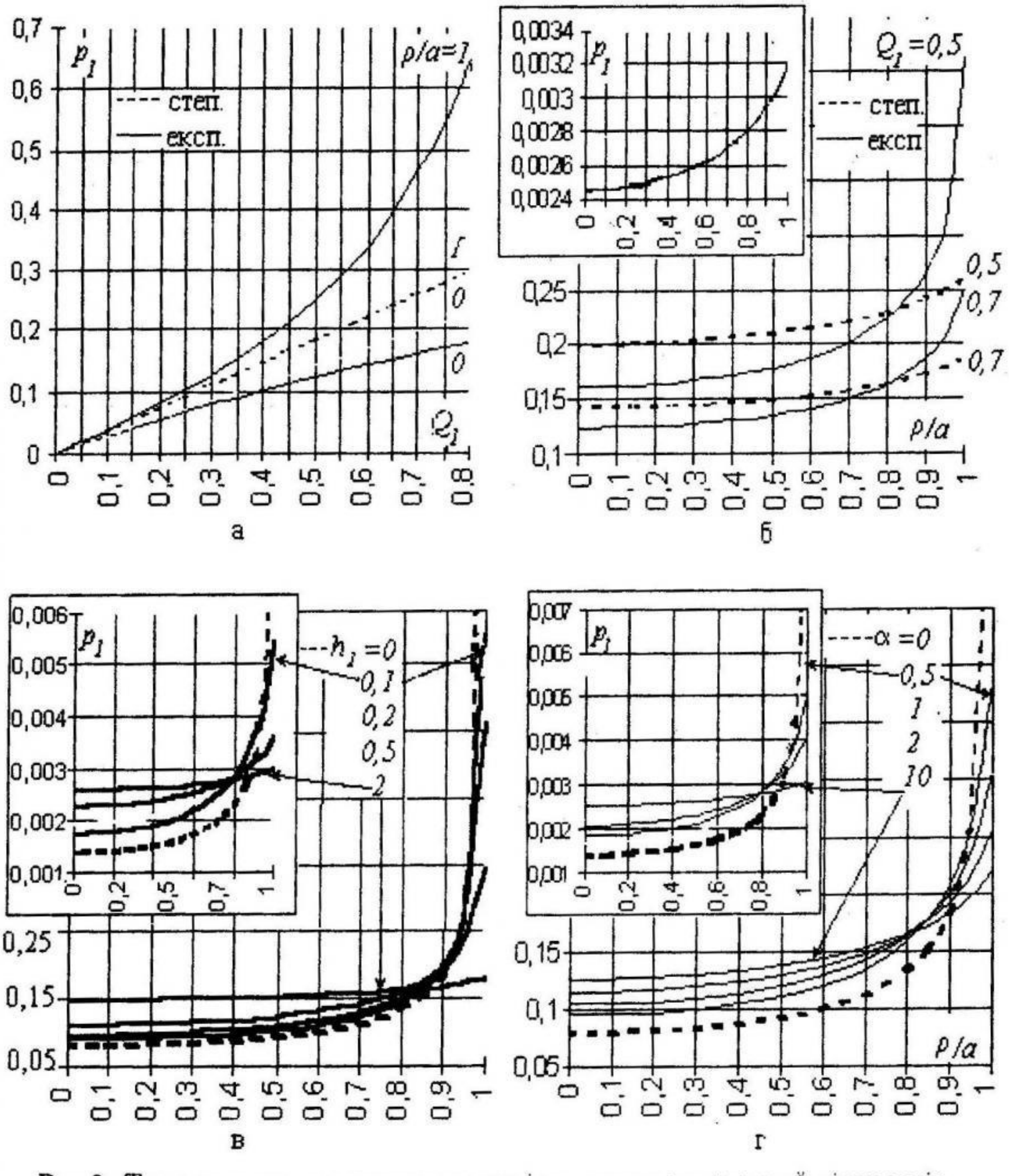

Рис.2. Тиск плоского кругового в плані штампу на шорсткий півпростір.

1. *Бартенев Г.М, Лаврентьев В.В.* Трение и износ полимеров. - М., 1972.
2. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. - М., 1988.
3. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчётов на трение и износ. - М., 1977.
4. *Д'яченко Н.М., Шишканова С.Ф.* Зв'язок розв'язків задачі вдавлення плоского штампа від показників шорсткості пружного півпростору//Вісник ЗДУ. - 1999. - 2.-С.47-52.
5. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и нтегральные уравнения. - М., 1962.
6. *Дубошин Г.Н.*. Теория притяжения. - М., 1961.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ.- М., 1984.

TO THE SOLUTION OF ONE CONTACT PROBLEM AT THE EXPONENTIAL LAW OF A DEFORMATION OF A ROUGHNESS

N. Dyachenko, S. Shishkanova

State University of Zaporizhzhya, 66 Zhukovski Str. 69063 Zaporizhzhya, Ukraine

The problem of contact of circular in the plan flat a punch with an elastic rough half-space by deforming of a roughness on the exponential law is considered. This law corresponds to change of a real contact area, which is output G.M.Bartenev and V.V.Lavrentiev. Deferent methods of the solution of the problem are required a depending on the roughness coefficients (two cases: large and small values). For each of these cases the integral equation of a problem is reduced to infinite system of the nonlinear equations, which is solved by a method of successive approximations and method of reduction. The analysis of dependence of function of pressure and deepening of a punch from roughness of coefficients and working force is investigated in work.

Key words: contact of circular in the plan flat.

Стаття надійшла до редколегії 28.09.2000

Прийнята до друку 03.07.2001

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2001.Вип.59.С.204–212

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2001.Vol.59.P.204–212

УДК 539. 3

В'ЯЗКОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА ПРИ ВНУТРІШНЬОМУ НАРОЩУВАННІ

Андрій СЯСЄВ
Дніпропетровський національний університет
пров.Науковий, 13 49050 Дніпропетровськ, Україна

Розглянуто задачу про в'язко-пружне деформування порожнистого циліндра при внутрішньому нарощуванні тиску. Процес неперервного нарощування є таким, що внутрішній радіус і тиск змінюються за заданими законами. Досліджено задачу у випадку лінійного закону, а також одержано числові результати для тимчасової залежності від тиску і руху для різних точок циліндра.

Ключові слова: в'язко-пружні деформації.

Процес розвитку нових технологій у виробництві оболонок, труб і інших деталей обертання шляхом нарощування, вимагає розвитку методів розрахунку, які повніше відображають властивості матеріалу, з якого виготовлено деталі. Відомо, що полімери, а останнім часом і деякі метали, які широко використовують для виготовлення труб методом відцентрового лиття [1], мають виражені властивості повзучості. Ця обставина призводить до перерозподілу напружень у деталі (трубі) у процесі нарощування, зміни форми і розмірів після виготовлення і під час навантаження.

Використання теорії в'язкопружності дає змогу теоретично оцінити ці чинники і побудувати технології відповідно до вимог, які ставлять до готової продукції.

Розглянемо порожнистий однорідний в'язкопружний круговий циліндр з внутрішнім радіусом a_0 і зовнішнім b_0. Починаючи з моменту часу $t = 0$, до циліндра зсередини прикладається внутрішній тиск $P(t)$, $P(0) = P_0$ і починають його безупинне нарощування однорідним в'язкопружним матеріалом, так що внутрішній радіус циліндра монотонно спадає за законом $a(t)$, $a(0) = a_0$. У момент часу $t = T$ внутрішній радіус циліндра досягає значення a_1 і процес нарощування припиняється, тобто $a(t) = a_1$ при $t \geqslant T$.

Вважається, що функції $a(t)$ і $P(t)$ неперервно диференційовані на інтервалі $0 < t < T$. Потрібно визначити НДС у циліндрі для усіх $t \geqslant 0$.

У задачі [2] про нарощування циліндра зосереджено увагу на оцінці релаксації залишкових напруг. Мета статті – дослідити вплив часу нарощування на розподіл напружень у в'язкопружному порожнистому циліндрі. Відповідні співвідношення одержимо, використовуючи підхід викладений у [2].

Уведемо полярні координати r, θ, z і розглянемо плоску деформацію циліндра ($u_z = 0$), зберігаючи звичні позначення для переміщень, компонент тензора напружень і деформацій.

Запишемо основні рівняння задачі:
умову нестисливості

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \tag{1}$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \tag{2}$$

співвідношення Коші для швидкостей деформацій і переміщень

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r},\ \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}. \tag{3}$$

Крапкою позначена частинна похідна за часом.

Оскільки усі компоненти деформації, крім ε_r і ε_θ, дорівнюють нулю, то з урахуванням (1), $\varepsilon_u = \left(2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right)^{1/2} = 2\left|\varepsilon_r\right| = 2\left|\varepsilon_\theta\right|$. Звідси і з визначальних рівнянь нелінійної теорії повзучості для неоднорідно-старіючих тіл [3] через умову $\varepsilon_\theta > 0$ рівняння стану запишемо у вигляді

$$\sigma_r(t,r) - \sigma_\theta(t,r) = 2G_1(t-\tau^*)\left(\varepsilon_r(t,r) - \varepsilon_\theta(t,r)\right)\varepsilon_\theta^{m-1}(t,r) -$$
$$- \int\limits_{\tau^*}^{t} R_1(t-\tau^*, \tau-\tau^*)\left(\varepsilon_r(\tau,r) - \varepsilon_\theta(\tau,r)\right)\varepsilon_\theta^{m-1}(\tau,r)\,d\tau. \tag{4}$$

Тут позначено $G_1 = G \cdot 2^{m-1}$, $R_1 = R \cdot 2^{m-1}$.

Функція $\tau^* = \tau^*(r)$ дорівнює нулю при $a_0 \leqslant r \leqslant b_0$ і збігається з функцією, оберненої до функції $a(t)$, при $a_1 \leqslant r \leqslant a_0$.

Граничні умови мають вигляд

$$\sigma_r|_{r=b_0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=a(t), 0\leqslant t<T} = -P(t), \quad \sigma_\alpha|_{r=a_1, t\geqslant T} = 0, \quad \alpha = r, \theta. \tag{5}$$

Продиференціювавши (1) за часом і підставивши в отримане рівняння співвідношення (3), прийдемо до рівняння

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} = 0.$$

Звідси

$$\dot{u}_r = \frac{c(t)}{r},\ \dot{\varepsilon}_r = -\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{c(t)}{r^2}, \tag{6}$$

де $c(t)$ – деяка функція, яку потрібно визначити.

З (6) із урахуванням початкової умови $u_r(\tau^*(r), r) = \varepsilon_\theta(\tau^*(r), r) = 0$ випливає, що

$$u_r(t,r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r}, \tag{7}$$

$$-\varepsilon_r(t,r) = \varepsilon_\theta(t,r) = \frac{A(t) - A(\tau^*(r))}{r^2}, \text{ якщо } a(t) \leqslant r < a_0; \tag{8}$$

$$u_r(t,r) = A(t)/r, \tag{9}$$

$$-\varepsilon_r(t,r) = \varepsilon_\theta(t,r) = A(t)/r^2, \text{ якщо } a_0 \leqslant r \leqslant b_0; \tag{10}$$

$$A(t) = -\int\limits_0^t c(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Інтегрування в (11) містить точку $t = 0$. Отже, якщо сингулярну складову функції $c(t)$ позначити через $c_0\delta(t)$, то границя функції $A(t)$ у точці $t = 0$ праворуч дорівнює c_0.

Виразимо напруження σ_r через функцію $A(t)$ для вихідного циліндра й області нарощування.

A^0. Область $a_0 \leqslant r \leqslant b_0$.

Підставляючи в (4) вирази для компонент деформації (10), отримаємо

$$\sigma_r(t,r) - \sigma_\theta(t,r) = -\frac{2}{r^{2m}}\left[2G_1(t)A^m(t) - \int\limits_0^t R_1(t,\tau)A^m(\tau)\,d\tau\right]. \tag{12}$$

Зінтегрувавши рівняння (2) у межах від r до b_0 (з урахуванням граничної умови (5), і підставивши в результат інтегрування (12), одержимо

$$\sigma_r(t,r) = -\int\limits_r^{b_0}\frac{2dr}{r^{2m+1}}\left[2G_1(t)A^m(t) - \int\limits_0^t R_1(t,\tau)A^m(\tau)\,d\tau\right]. \tag{13}$$

$Б^0$. Область $a(t) \leqslant r < a_0$.

Підставляючи в (4) вирази для компонент деформації (8), матимемо

$$\sigma_r(t,r) - \sigma_\theta(t,r) = -\frac{2}{r^{2m}}\left[2G_1(t-\tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\tau^*(r)}^t R_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m\,d\,\tau\right]. \tag{14}$$

Зінтегрувавши (2) у межах від $a(t)$ до r (з урахуванням граничної умови (5)), і підставивши результат інтегрування в (14), отримаємо

$$\sigma_r(t,r) = -P(t) + \int\limits_{a(t)}^r \frac{2dr}{r^{2m+1}}\left[2G_1(t-\tau^*(r))(A(t) - A(\tau^*(r)))^m - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\tau^*(r)}^t R_1(t-\tau^*(r), \tau-\tau^*(r))(A(\tau) - A(\tau^*(r)))^m\,d\,\tau\right]. \tag{15}$$

Після заміни змінної $r = a(s) \quad (s = \tau^*(r))$ у рівнянні (15) і зміни порядку інтегрування, одержуємо

$$\sigma_r(t,r) = -P(t) - \left[\int\limits_{\tau^*(r)}^t \frac{2\dot a(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)}2G_1(t-\tau)(A(t) - A(\tau))^m\,d\tau - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\tau^*(r)}^t d\tau \int\limits_{\tau^*(r)}^\tau ds R_1(t-s, \tau-s)\frac{2\dot a(s)}{a^{2m+1}(s)}(A(\tau) - A(s))^m\right]. \tag{16}$$

Рівняння для визначення $A(t)$ отримуємо з умови неперервності напружень $\sigma_r(t,r)$ на межі розділу двох розглянутих областей, тобто при $r = a_0$. Підставляючи в (13) і (16) значення $r = a_0$ і прирівнюючи праві частини, прийдемо до нелінійного інтегрального рівняння для визначення функції $A(t)$

$$H_1\left(2G_1(t)A^m(t)-\int_0^t R_1(t,\tau)A^m(\tau)\,d\tau\right)+\int_0^t H_2(t,\tau)\left(A(t)-A(\tau)\right)^m d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^\tau H_3(t,\tau,s)\left(A(\tau)-A(s)\right)^m ds\,d\tau=P(t). \qquad (17)$$

Тут

$$\mathrm{H}_1=\int_{a_0}^{b_0}\frac{2dr}{r^{2m+1}},\quad \mathrm{H}_2(t,\tau)=\frac{2\dot a(\tau)}{a^{2m+1}(\tau)}2G_1(t-\tau),$$

$$\mathrm{H}_3(t,\tau,s)=\frac{2\dot a(s)}{a^{2m+1}(s)}R_1(t-s,\tau-s).$$

Визначивши з рівняння (17) функцію $A(t)$, знаходимо переміщення u_r і компоненти деформацій ε_r і ε_θ за формулами (7) - (10), а напруження σ_r і σ_θ за формулами (12), (13), (14), (16). Для напруження σ_z з умови $\varepsilon_z=0$ і рівняння стану, згаданого в [3, 4], маємо $\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta)$.

Розглянемо випадок нарощування за лінійного закону повзучості. Випадок лінійного закону повзучості можна досліджувати, прийнявши у визначених співвідношеннях $m=1$. Наведемо зведення відповідних формул; з (9), (10), (12), (4) матимемо

$$u_r(t,r)=A(t)/r,\quad -\varepsilon_r(t,r)=\varepsilon_\theta(t,r)=A(t)/r^2,$$

$$\sigma_r(t,r)-\sigma_\theta(t,r)=-\frac{2}{r^2}\left(2G(t)A(t)-\int_0^t R(t,\tau)A(\tau)\,d\tau\right),$$

якщо $a_0\leqslant r\leqslant b_0$.

З (7), (8), (14), (16) одержимо

$$u_r(t,r)=\frac{A(t)-A(\tau^*(r))}{r},\quad -\varepsilon_r(t,r)=\varepsilon_\theta(t,r)=\left(A(t)-A(\tau^*(r))\right)/r^2,$$

$$\sigma_r(t,r)-\sigma_\theta(t,r)=-\frac{2}{r^2}\Big[2G(t-\tau^*(r))\left(A(t)-A(\tau^*(r))\right)-$$

$$-\int_{\tau^*(r)}^t R(t-\tau^*(r),\tau-\tau^*(r))\left(A(\tau)-A(\tau^*(r))\right)d\tau\Big], \qquad (19)$$

якщо $a(t)\leqslant r<a_0$, і

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_r+\sigma_\theta),$$

$$D_1(t)A(t)-\int_0^t D_2(t,\tau)A(\tau)\,d\tau=P(t), \qquad (20)$$

$$D_1(t)=\int\limits_{a(t)}^{b_0}2G\left(t-\tau^*(r)\right)\frac{2dr}{r^3},$$

$$D_2(t,\tau)=\int\limits_{a(\tau)}^{b_0}R\left(t-\tau^*(r),\tau-\tau^*(r)\right)\frac{2dr}{r^3}+$$

$$+\frac{2\dot a(\tau)}{a^3(\tau)}\left(2G(t-\tau)-\int\limits_{\tau}^{t}R(t-\tau,s-\tau)\,ds\right).$$

Зауважимо, що рівняння (20) одержали з рівняння (17) і його розв'язок можна подати в квадратурах [2, 3].

Візьмемо ядро релаксації у формі [2]

$$R(t,\tau)=\frac{\partial\mu(t,\tau)}{\partial\tau},\quad \mu(t,\tau)=2G(\tau)-\varphi(\tau)\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right). \tag{21}$$

Рівняння (20), використовуючи співвідношення (21), можна записати у вигляді

$$A(t)\,\mu_1(t,t)-\int\limits_0^t\frac{\partial\mu_1(t,\tau)}{\partial\tau}A(\tau)\,d\tau=P(t), \tag{22}$$

де

$$\mu_1(t,\tau)=\int\limits_{a(t)}^{b_0}\mu\left(t-\tau^*(r),\tau-\tau^*(r)\right)\frac{2dr}{r^3}. \tag{23}$$

Підставляючи (21) у (23), одержимо

$$\mu_1(t,\tau)=2G_2(\tau)-\varphi_2(\tau)\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right),$$

$$G_2(\tau)=\int\limits_{a(t)}^{b_0}G\left(\tau-\tau^*(r)\right)\frac{2dr}{r^3},\quad \varphi_2(\tau)=\int\limits_{a(t)}^{b_0}\varphi\left(\tau-\tau^*(r)\right)\frac{2dr}{r^3}. \tag{24}$$

Рівняння (22) можна звести до диференціального рівняння другого порядку щодо функції $A(t)$ [4, 5]. Справді, зінтегрувавши це рівняння врозріб із урахуванням (23), (24), запишемо його у вигляді

$$\int\limits_0^t\dot A(\tau)\quad\left[2G_2(\tau)-\varphi_2(\tau)\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right]d\tau=P(t).$$

Диференціюючи останнє рівняння послідовно два рази за t, одержимо

$$2G_2(t)\,\dot A(t)-\int\limits_0^t\dot A(\tau)\,\varphi_2(\tau)\,\gamma e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=\dot P(t), \tag{25}$$

$$2G_2(t)\,\ddot A(t)+2\dot G_2(t)\,\dot A(t)-\gamma\varphi_2(t)\,\dot A(t)+$$

$$+\gamma^2\int\limits_0^t\dot A(\tau)\,\varphi_2(\tau)\,e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau=\ddot P(t).$$

Виключивши з цих співвідношень інтеграл $\int_0^t \dot{A}(\tau)\varphi_2(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}d\tau$, отримаємо диференціальне рівняння для $A(t)$

$$2G_2(t)\ddot{A}(t) + \dot{A}(t)\left[2\dot{G}_2(t) - \gamma\varphi_2(t) + \gamma 2G_2(t)\right] = \ddot{P}(t) + \gamma\dot{P}(t), \qquad (26)$$

з початковими умовами, що випливають безпосередньо з (22) і (25) з урахуванням (23), (24)

$$A(0) = \frac{P(0)}{2G_2(0)}, \qquad \dot{A}(0) = \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}. \qquad (27)$$

Розв'язавши рівняння (26) з початковими умовами (27), остаточно одержимо розв'язок для функції $A(t)$

$$A(t) = \frac{P_0}{2G_2(0)} + \frac{\dot{P}(0)}{2G_2(0)}\int_0^t e^{-\eta(\tau)}d\tau + \int_0^t e^{-\eta(\tau)}d\tau\int_0^\tau \frac{\ddot{P}(x) + \gamma\dot{P}(x)}{2G_2(x)}e^{\eta(x)}dx, \quad (28)$$

де $\eta(\tau) = \int_0^\tau \left[\gamma + \left(2\dot{G}_2(z) - \gamma\varphi_2(z)\right)2G_2^{-1}(z)\right]dz.$

Визначивши функцію $A(t)$ з рівняння (28), знаходимо переміщення u_r, компоненти деформацій ε_r, ε_θ а також напруження за формулами (18), (19).

Розглянемо лінійний випадок. Функцію $\mu(t,\tau)$ візьмемо у вигляді (21), за умови, що

$$G = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = 2G\left(C_0 + A_0 e^{-\beta\tau}\right). \qquad (29)$$

Закон зміни внутрішнього радіуса циліндра $a(t)$ задовольняє співвідношення

$$\frac{1}{a^2(t)} = \frac{1}{a_0^2} + \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_0^2}\right)\frac{t}{T}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (30)$$

За допомогою співвідношень (26) і (27) ядро рівняння (22), а також ядра інтегральних операторів у (18), (19) виражаються елементарними функціями. Нехай внутрішній тиск рівномірно спадає на проміжку $[0,T]$ до значення удвічі меншого, ніж початкове, і в момент закінчення нарощування $t = T$ стає нульовим.

На рис. 1, 2 і 3, 4 зображені часові залежності максимального дотичного напруження і переміщень u_r для таких точок циліндра: $1 - r = b_0$; $2 - r = a_0 - 0 = 0,9b_0 - 0$; $3 - r = 0,79b_0$. Під час обчислень параметри C_0, A_0, β, γ і розміри a_0, a_1 були фіксовані і становили: $C_0 = 0.05$; $A_0 = 0.75$; $в = 0.02$год$^{-1}$; $г = 0,1$год$^{-1}$; $a_0 = 0,9b_0$; $a_1 = 0,5b_0$. Тому що напруження не залежать від величини миттєвого модуля пружності G, а переміщення і деформації обернено пропорційні йому, в обчисленнях можна вважати, що $G = 1$.

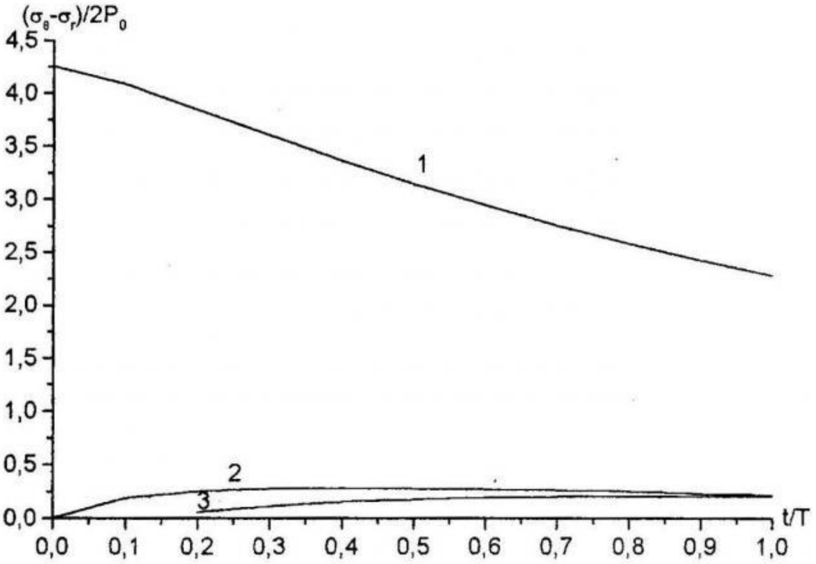

Рис. 1. Розподіл максимального дотичного напруження за часом нарощування при $T = 10$, $P = 1 - t/2T$.

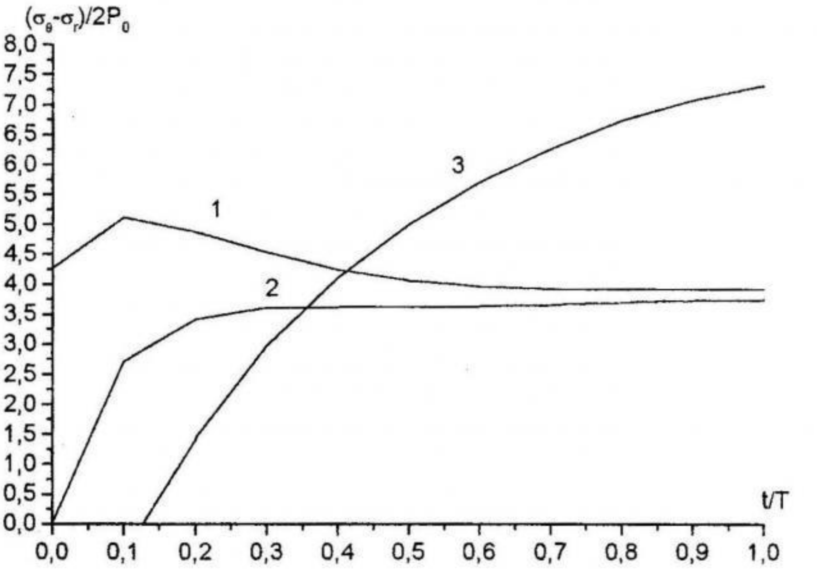

Рис. 2. Розподіл максимального дотичного напруження за часом нарощування при $T = 50$, $P = 1 - t/2T$.

Як видно з рис. 1, 2, 3, 4 тривалість процесу нарощування впливає як на напружений стан, так і на переміщення точок циліндра. Характер кривих змінюється незначно, проте значно змінюються величини самих напружень і переміщень. Наприклад, із рис. 1, 2 очевидно, що при десятьох годинах нарощування напруження в точці 1 монотонно спадають, а в точці 2 зростають незначно і до кінця процесу нарощування навіть дещо спадають, при п'ятидесятьох годинах нарощування картина зовсім інша – напруження в другій точці починають значно збільшуватися згодом і за своїми значеннями наближаються до значень у точці 1, а напруження в точці 3 зростають настільки, що перевищують напруження в точках 1 і 2 удвічі.

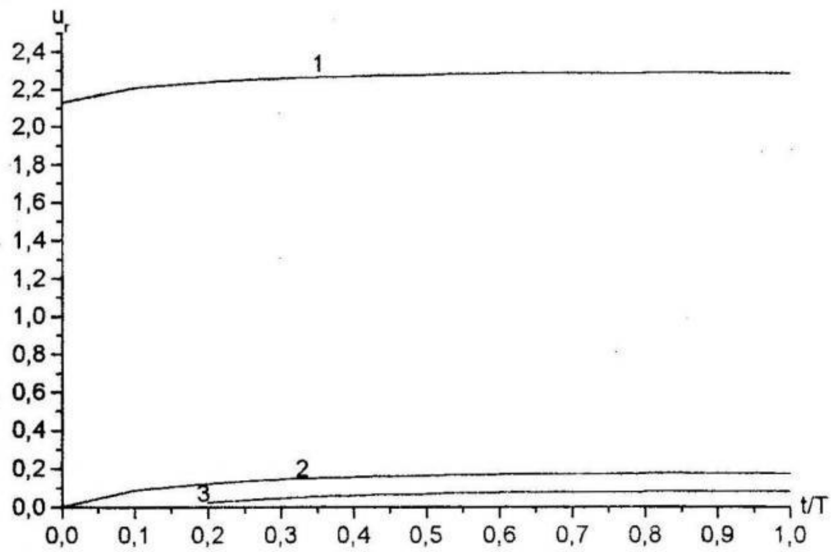

Рис. 3. Розподіл переміщень за часом нарощування при $T = 10$, $P = 1 - t/2T$.

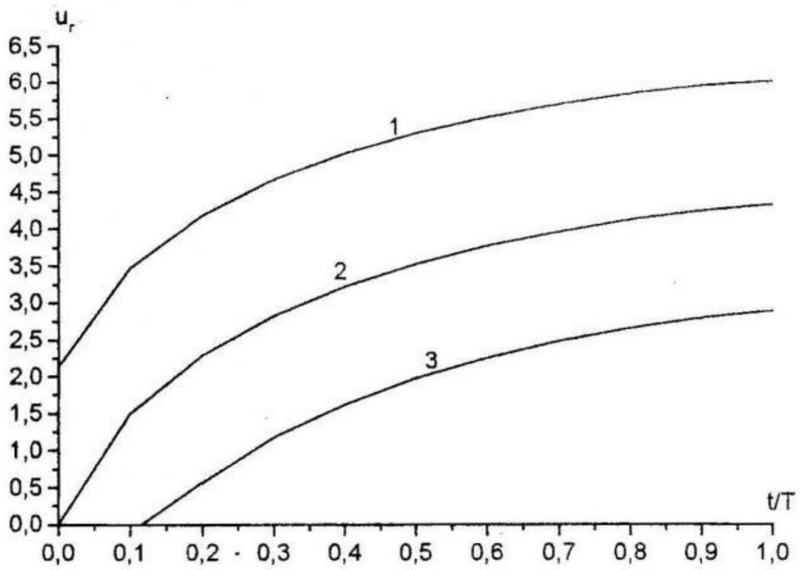

Рис. 4. Розподіл переміщень за часом нарощування при $T = 50$, $P = 1 - t/2T$.

Такий розподіл напружень можна пояснити так: по-перше, точки 2 і 3 увесь час перебувають ближче до лінії дії навантаження порівняно з точкою 1, по-друге, за швидшого процесу нарощування матеріал не встигає до кінця виявити свої в'язкопружні властивості, що підтверджують і криві для переміщень, зображені на рис.3, 4. Варто зауважити, що на всіх графіках характерна кутова точка у момент часу $t/T = 0.1$ є наслідком недостатньо малого кроку розбиття за часом.

Отже, викладений метод обчислення дає змогу оцінити вплив часу нарощування на розподіл напружень і переміщень у в'язкопружному порожнистому круговому циліндрі, який виготовляють з однорідного в'язкопружного матеріалу.

1. *Юдин С.Б.* Центробежное литье. – М., 1972.
2. *Сясев А.В., Бинкевич Е.В.* Наращивание вязкоупругого полого цилиндра при действии внутреннего давления // Вісн. Дніпропетров. держ. ун-ту. – 1999. – Т. 2. – Вип. 2. – С.153-160.
3. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. – М., 1983.
4. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязкоупруго-пластических тел. – М., 1987.
4. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. М., – 1967.

VISCO-ELASTIC DEFORMATION OF A CIRCULAR CYLINDER ON THE INNER JOINTING

A. Syasev

National University of Dnipropetrovsk

13 Naukovyi Side Str., 49050 Dnipropetrovsk, Ukraine

The task of the stress deformed condition of a visco-elastic hollow cylinder, which is jointed under the activity of internal pressure. The process of a continuous jointing is taking place on inner radius by such way that the radius and pressure change according to the given law. The special case of a linear law of creepage is considered, also the numerical results in the forms of the graphs of temporary dependence of stresses and moving for various points of cylinder are presented.

Key words: visco-elastic deformation.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.2001

Прийнята до друку 03.07.2001

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним іхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані праці не допустимі.

2. Текст статті повинен бути виконаний на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

резюме та ключові слова українською й англійською мовами, ім'я, прізвище автора та назву статті англійською мовою (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву);

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *diffeq@uli2.franko.lviv.ua*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – \vsize 20.5 true cm, ширина – \hsize 13 true cm. На першій сторінці потрібно зазначити номер УДК.

Статті, запропоновані іноземними мовами, до публікації не приймаються (треба подати переклад українською).

3. Вимоги до набору:

текст статті створювати в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймають;

номери формул ставити з правого боку; нумерувати лише формули, на які є посилання;

у посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

4. Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх потрібно створювати засобами TEX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

5. Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.) у працях:

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.
2. *Кравчук О.М.* Назва// Мат. сб.–1985.–Т. 2. – №2.– С.4–20.
3. *Михайленко Г.Д.* Назва.– М., 1993.– 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. *Коваленко О. В.* Назва: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977.
5. *Сенів С.М.* Назва.– К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня – 2 вересня 1994 р. – К., 1994.– С. 540–551.

Збірник наукових праць

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 59

Видається з 1965 р.

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX).
Підписано до друку 02.11.2001. Формат 70×100/16. Папір друк.
Фіз. друк. арк. 13.4. Умовн. друк. арк. 17.3. Обл.-вид. арк. 17.7.
Тираж 200. Зам. 419.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.