УДК 517.512

М А Т Е М А Т И К А

О.С.КОВАНЬКО

ПРО ОДНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОХ КЛАСІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В нашій статті "Взаимоотношение различных обобщений почти периодических функций" (Изв. НИИММ Томск. ун-та, т. 3, вып. I, 1946) було побудовано дев'ять підкласів відомих S_p, W_p і B_p класів майже періодичних функцій (див. стор. 12). Два з цих підкласів, логічно різних, виявились збіжними.

Покажемо конкретно про що йде мова. Для цього пригадаємо деякі означення і позначення.

Розглянемо такі метрики в просторі функцій, які означені на всій дійсній осі:

$$D_{S_p}^{\ell E}(\varphi,\psi)=\sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\frac{1}{\ell}\int_{E(x,\,x+\ell)}|\varphi(t)-\psi(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}},\quad (p\geq 1),$$

$$D_{W_p}^{E}(\varphi,\psi)=\lim_{\ell\to\infty}D_{S_p}^{\ell}(\varphi,\psi).$$

Також розглянемо дві щільності множини (вимірної і необмеженої, яка лежить на осі ОХ):

$$\delta_S^{\ell}E=D_{S_1}^{\ell E}(1,0);\qquad \delta_W E=\lim_{\ell\to\infty}\delta_S^{\ell}E.$$

Будемо скорочено позначати тригонометричний поліном загального вигляду $\sum_{1}^{n}a_k e^{i\lambda_n x}$ через $S_m(x)$.

Відзначимо ряд означень і властивостей узагальнених майже періодичних функцій і функцій, які означені на всій дійсній осі ОХ.

О з н а ч е н н я 1. $f(x) \in$ (S_p майже періодична (м. п.)), якщо для будь-яких чисел $\varepsilon > 0$ і $\ell > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $D_{S_p}^{\ell E}(f, S_n) < \varepsilon$ для будь-якої множини E.

О з н а ч е н н я 2. $f(x) \in$ (W_p м.п.), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $D_{W_p}^{E}(f, S_n) < \varepsilon$ для будь-якої множини E.

О з н а ч е н н я 3. $f(x) \in$ ($\left\{ \begin{matrix} S_p \\ W_p \end{matrix} \right\}$ рівномірно сумована (р.с.)), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, що

$$\begin{cases} D_{S_p}^{\ell E}(f, 0) < \varepsilon, & \text{якщо } \delta_S^{\ell} E < \sigma, \\ D_{W_p}^{E}(f, 0) < \varepsilon, & \text{якщо } \delta_W E < \sigma, \end{cases}$$

О з н а ч е н н я 4. $f(x) \in \left\{ \begin{matrix} \tilde{S} \\ \tilde{W} \end{matrix} \right\}$ майже періодична ($\begin{matrix} \tilde{S} \\ \tilde{W} \end{matrix}$ м.п.), якщо для будь-якого додатного $1 > \varepsilon > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, за винятком хіба такої множини E, що

$$\begin{cases} \delta_s^{\ell} E < \varepsilon, \\ \delta_w E < \varepsilon, \end{cases}$$

В л а с т и в і с т ь 1. $(S_p \text{ м.п.}) \subset (W_p \text{ м.п.})$.

В л а с т и в і с т ь 2. $[(\tilde{S} \text{ м.п.}) \cap (S_p \text{ р.с.})]$ є клас, який збігається з класом (S_p м.п.).

В л а с т и в і с т ь 3. $\{$ Клас ($\tilde{S}$ м.п.) $\cap$ (W_p м.п.)$\} \subset$ $\subset \{$клас W_p м.п.$\}$.

О с н о в н а т е о р е м а. Класи $[(\tilde{S}$ м.п.) $\cap$ (S_p р.с.)$]$ і клас $[(\tilde{S}$ м.п.) $\cap$ (W_p р.с.)$]$ тотожні.

В к а з і в к а. Доведення даного твердження грунтується на такому співвідношенні:

$$\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^{\frac{1}{p}} D_{S_p}^{\ell_1 E}(\varphi, \psi) \le D_{S_p}^{\ell_2 E}(\varphi, \psi), \qquad \text{якщо } (\ell_1 < \ell_2).$$

—o—