УДК 517.535.4

А.А.ГОЛЬДБЕРГ, М.М.ШЕРЕМЕТА

ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(z)$ – ціла функція. Корені рівняння $f(z)=z$ називаються нерухомими точками функції $f(z)$. Нерухома точка a функції $f(z)$ називається відштовхуючою, індиферентною або притягуючою, яка відповідно виконується $|f'(a)|>1$, $|f'(a)|=1$ або $|f'(a)|<1$.

В роботі [1] доведено, якщо ріст цілої функції $f(z)$ не перевищує мінімального типу порядку $\frac{1}{2}$, то $f(z)$ має нескінченну кількість відштовхуючих або індиферентних точок. В [1] побудовано також приклад, який показує, що для цілих функцій нормального типу порядку $\frac{1}{2}$ це твердження не виконується: всі нерухомі точки можуть бути притягуючими.

Нижче ми побудуємо приклади цілих функцій порядку $\rho>\frac{1}{2}$, в яких число відштовхуючих та індиферентних точок скінченне. Ми будемо користуватись функцією Міттаг-Леффлера (див., наприклад, [2])

$$E_\rho(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)},\quad \frac{1}{2}<\rho<\infty,$$

яка є цілою функцією порядку ρ. Як відомо ([2], стор. 134), для функції $E_\rho(z)$ при $\rho>\frac{1}{2}$ мають місце такі асимптотичні співвідношення:

$$E_\rho(z)=\begin{cases}\rho e^{z^\rho}-\sum\limits_{k=1}^{\nu}\dfrac{z^{-k}}{\Gamma\left(1-\frac{k}{\rho}\right)}+O\left(|z|^{-1-\nu}\right), & \text{якщо } |\arg z|\le\alpha;\\ -\sum\limits_{k=1}^{\nu}\dfrac{z^{-k}}{\Gamma\left(1-\frac{k}{\rho}\right)}+O\left(|z|^{-1-\nu}\right), & \text{якщо } \alpha\le|\arg z|\le\pi,\end{cases}\qquad (1)$$

де α – довільне дійсне число, яке задовольняє умову

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right). \tag{2}$$

Відомо також ([2] , стор. 142), що для нулів a_k функції $E_\rho(z)$ при $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, $\rho \neq 1$ справджується

$$a_k = |a_k| \exp\left(\pm i \left\{\frac{\pi}{2\rho} + o(1)\right\}\right), \tag{3}$$

де $|a_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Використовуючи формулу Коші для похідних аналітичних функцій, легко довести, що асимптотичну формулу (1) можна диференціювати, причому

$$E_\rho(z) = \begin{cases} P(z) e^{z^\rho} - (-1)^\nu \dfrac{\nu!}{z^{\nu+1}\Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} + O\left(\dfrac{1}{|z|^{\nu+2}}\right), \text{ якщо } |\arg z| \leq \alpha; \\ \\ -(-1)^\nu \dfrac{\nu!}{z^{\nu+1}\Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} + O\left(\dfrac{1}{|z|^{\nu+2}}\right), \text{ якщо } \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \tag{4}$$

де ν = 1,2,3,..., $P(z)$ - функція виду $P(z) = b_0 z^{\mu_0} + \dots + b_m z^{\mu_m}$, $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_m$, а α задовольняє умову (2). Легко показати (порівн. [2] , стор. 143), що нулі функції $E_\rho^{(\nu)}(z)$ мають асимптотику (3).

Перейдемо тепер до наших прикладів. Ми будемо розрізняти три випадки: 1) $\frac{1}{2} < \rho < 1$, 2) $1 < \rho < 2$, 3) $2 \leq \rho < \infty$. Для випадків $\rho = 1$ і $\rho = \infty$ прикладами можуть служити функції $z + e^z$ та $z + e^{e^z}$, які взагалі не мають нерухомих точок.

1°. П е р ш и й в и п а д о к. Розглянемо функцію $\varphi(z) = z - E_\rho(z)$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Нерухомі точки функції $\varphi(z)$ будуть нулями функції $E_\rho(z)$ і матимуть асимптотику (3). Далі $\varphi'(z) = 1 - E'_\rho(z)$ і, використовуючи (1), маємо

$$\rho e^{a_k^\rho} = \frac{1}{a_k \Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right),$$

звідки

$$\varphi'(a_k) = 1 - \rho e^{a_k^\rho} \rho a_k^{\rho-1} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\rho a_k^{\rho-2}}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right) = 1 - \frac{\gamma_k}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})}, \tag{5}$$

де, внаслідок (3),

$$\gamma_k = (1+o(1))|a_k|^{\rho-2} \exp\left(\pm i\left\{\pi\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}\right) + o(1)\right\}\right).$$

Враховуючи, що $\frac{1}{2} < \rho < 1$, а отже $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) < 0$, стає очевидним, що $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$, і всі точки $-\gamma_k / \Gamma(1-\frac{1}{\rho})$, за винятком найбільш скінченного числа, лежать в крузі $|z+1|<1$, і для всіх k, починаючи з деякого, виконується

$$|\varphi'(a_k)| < 1, \tag{6}$$

тобто функція $\varphi(z)$ може мати хіба що скінченну кількість відштовхуючих та індиферентних точок.

З а у в а ж е н н я. Можна показати, що наша функція має скінченне додатне число відштовхуючих точок принаймні при ρ, досить близьких до $\frac{1}{2}$.

2^0. Д р у г и й в и п а д о к. У цьому випадку розглядаємо ту ж саму функцію, що і в першому випадку, але при $1 < \rho < 2$, і аналогічно одержуємо (5), де $\gamma_k \to 0$ при $k \to \infty$. В цьому випадку $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) > 0$ і для всіх k, починаючи з деякого, виконується нерівність (6).

3^0. Т р е т і й в и п а д о к. Якщо $\rho \geq 2$, то ми розглянемо функцію $\varphi(z) = z + E_\rho^{(\nu-2)}(z)$, де ν - деяке непарне число таке, що $\rho < \nu < 2\rho$ (таке число існує, бо $\rho \geq 2$). Нерухомими точками функції $\varphi(z)$ будуть нулі функції $E_\rho^{(\nu-2)}(z)$, і ці нерухомі точки матимуть асимптотику (3). Далі

$$\varphi'(a_k) = 1 + P(a_k) e^{a_k^\rho} \left(\frac{P'(a_k)}{P(a_k)} + \rho a_k^{\rho-1} \right) - (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{a_k^\nu \Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|a_k|^{\nu+1}} \right) =$$

$$= 1 + (-1)^{\nu-2} \frac{(\nu-2)!}{a_k^{\nu-1} \Gamma(1-\frac{1}{\rho})} \left\{ O\left(\frac{1}{|a_k|}\right) + \rho a_k^{\rho-1} \right\} + O\left(\frac{1}{|a_k|^\nu} \right) =$$

$$= 1 - \frac{\rho(1+o(1))(\nu-2)!}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) a_k^{\nu-\rho}} = 1 - \gamma_k' \exp\left(\pm i \left\{ (\nu-\rho)\frac{\pi}{2\rho} + o(1) \right\} \right),$$

де $\gamma_k' = \dfrac{\rho(1+o(1))(\nu-2)!}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})|a_k|^{\nu-\rho}} > 0$, бо $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) > 0$ при $\rho \geq 2$ і $\gamma_k' \to 0$ при $k \to \infty$. Тому що при $\rho < \nu < 2\rho$ виконується $0 < (\nu-\rho)\frac{\pi}{2\rho} + o(1) < \frac{\pi}{2}$, починаючи з деякого k, то величина $\gamma_k' \exp\left(\pm i \left\{(\nu-\rho)\frac{\pi}{2\rho} + o(1)\right\}\right)$ при $k \geq k_0$ лежить в $|z-1| < 1$, звідки одержуємо (6). Значить, $\varphi(z)$ не може мати більше, ніж скінченну кількість відштовхуючих та індиферентних точок.

Зауважимо, що при нецілому ρ, $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, ми не спроможні вказати цілу функцію порядку ρ, яка мала б лише притягуючі точки.

Література

1. J. E. Whittington. On the fixpoints of entire functions. Proc. London Math. Soc., vol. 17, 1967, 530-546.

2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. "Наука", М., 1966.

—o—