УДК 519.21

І.Д.КВІТ

УТОЧНЕННЯ ЗВОРОТНОЇ ФОРМУЛИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

1. Вступ. Розглянемо n -вимірний евклідів простір точок $(x_1,\dots,x_n)$, $(-\infty<x_k<+\infty;\ k=1,2,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$. Декартів добуток n інтервалів вигляду $(a_k, b_k]=\{a_k<x_k\le b_k\}$, $(-\infty\le a_k<b_k\le+\infty;\ k=1,2,\dots,n)$ назвемо n -вимірним інтервалом і позначимо його через $\mathcal{J}_n$:

$$\mathcal{J}_n=(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n]=\{a_k<x_k\le b_k;\ k=1,2,\dots,n\}. \qquad (1)$$

Нехай система n випадкових змінних $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ приймає значення з нашого евклідового простору. Тоді її називаємо n -вимірною випадковою змінною або n -вимірним випадковим вектором. Функція розподілу n -вимірної випадкової змінної $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$

$$\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n)=P\{\xi_1\le x_1,\dots,\xi_n\le x_n\} \qquad (2)$$

1°. n - вимірно неспадна, це значить, для довільного n -вимірного інтервалу (1) невід'ємною є різниця

$$\mathcal{F}(b_1,\dots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}(b_1,\dots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\dots,b_n)+\sum_{1\le i<j\le n}\mathcal{F}(b_1,\dots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\dots,b_{j-1},a_j,b_{j+1},\dots,b_n)$$

$$-\dots+(-1)^n\mathcal{F}(a_1,\dots,a_n)=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}d\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n)=P\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathcal{J}_n\};$$

2°. n - вимірно правобічно неперервна, тобто для довільних незростаючих послідовностей $x_k^{(1)}\ge x_k^{(2)}\ge\cdots$, збіжних до x_k, $(k=1,2,\dots,n)$,

$$\lim_{j\to\infty}\mathcal{F}(x_1^{(j)},\dots,x_n^{(j)})=\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n);$$

3°. для кожного k, $(k=1,2,\dots,n)$, при довільних $x_1,\dots,x_{k-1}$, $x_{k+1},\dots,x_n$, задовольняє співвідношення

$$\lim_{x_k \to -\infty} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

та для довільних неспадних послідовностей $x_k^{(1)} \leq x_k^{(2)} \leq \cdots$, збіжних до безмежності (k = 1,2,..., n), задовольняє співвідношення

$$\lim_{j \to \infty} \mathcal{F}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) = 1.$$

Характеристичною функцією $f(s_1, \dots s_n)$ n-вимірної випадкової змінної ξ = (ξ_1, ..., ξ_n), з функцією розподілу (2), називається інтегральне перетворення Фур'є-Стільт'єса вигляду

$$f(s_1, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n)} d\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n), \tag{3}$$

$$(i = \sqrt{-1}; -\infty < s_1, \dots, s_n < \infty),$$

де інтеграл (3) розуміємо в сенсі Радона-Стільт'єса.

У теорії ймовірностей використовують зворотну формулу, відповідну (3), для довільного "інтервалу з неперервністю на границях" (див., наприклад, [1], стор. 235 та [2], стор. 229). Уточнимо зворотну формулу, відповідну (3), на всі значення $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ і розглянемо наслідки з цього.

2. Обмежник. З математичного аналізу відомо, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha, \tag{4}$$

де

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} -1, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ +1, & \alpha > 0. \end{cases} \tag{5}$$

З (4) випливає, що

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\pi i x} dx = \operatorname{sgn} \alpha, \tag{6}$$

де (V.P.) = valor principalis = головне значення (Коші), тобто

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} \quad = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c} \quad , \quad c>0 .$$

Справді,

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{i\alpha x}}{\pi i x}\,dx = \lim_{c\to\infty}\left\{\int_{-c}^{0} + \int_{0}^{c}\right\} = \lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c}\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{\pi i x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \operatorname{sgn}\alpha .$$

Відмітимо, що (5), а значить і (6), в околі ненульових значень аргумента приймає єдине значення, а в околі нуля - три значення. Значення (6), при нульовій вартості аргумента, нам надалі ніколи не буде потрібне. Треба буде тільки або значення с п р а в а від нуля, або з л і в а від нуля. Тому замість (6) символічно писатимемо:

або

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha+0)x}}{\pi i x}\,dx = \operatorname{sgn}(\alpha+0) = \begin{cases}-1, & \alpha<0,\\ +1, & \alpha\geq 0,\end{cases} \tag{6'}$$

або

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\alpha-0)x}}{\pi i x}\,dx = \operatorname{sgn}(\alpha-0) = \begin{cases}-1, & \alpha\leq 0,\\ +1, & \alpha>0.\end{cases} \tag{6''}$$

Функція (6') - неперервна с п р а в а; функція (6") - неперервна з л і в а.

<u>Означення I.</u> О б м е ж н и к о м називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $(a, b]$ рівна одиниці, а зовні цього інтервалу рівна нулю.

У наступному пункті зустрінеться обмежник

$$J = \frac{\operatorname{sgn}(x-a-0)-\operatorname{sgn}(x-b-0)}{2} . \tag{7}$$

Означення 2. n-вимірним обмежником називаемо довільну функцію, яка на n-вимірному інтервалі (1) рівна одиниці, а зовні цього інтервалу рівна нулю.

У наступному пункті зустрінеться n-вимірний обмежник

$$J = \prod_{k=1}^{n} \frac{sgn(x_k - a_k - 0) - sgn(x_k - b_k - 0)}{2}. \tag{8}$$

Означення 3. Точковим обмежником називаемо довільну функцію, яка в одному пункті c рівна одиниці, а зовні цього пункту рівна нулю.

У дальшому пункті зустрінеться точковий обмежник

$$R = \frac{sgn(x-c+0) - sgn(x-c-0)}{2}. \tag{9}$$

3. Зворотна формула. А. Нехай випадкова змінна ξ мае функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ та характеристичну функцію $f(s)$. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $(a, b]$, де $-\infty \leq a < b \leq \infty$, рівний головному значенню інтеграла від добутку характеристичної функції на ядро

$$N(s,a,b) = \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi i s}, \tag{10}$$

тобто,

$$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = (V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi i s} f(s)\,ds, \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty). \tag{11}$$

Доведення. Коли врахувати означення (3), при n = 1, то правий бік (11) можна записати у формі подвійного інтеграла

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi i s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\, d\mathcal{F}(x)\, ds \tag{12}$$

Оскільки в (12) інтеграл відносно x абсолютно збігається, а відносно s межі інтеграла обмежені, то змінимо черговість інтегрування. Одержимо

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-c}^{c}\frac{e^{-is(a-x+0)}-e^{-is(b-x+0)}}{2\pi is}\,ds\right\}d\mathcal{F}(x). \tag{13}$$

Зважаючи на існування інтеграла (6), можемо (13) записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is(a-x+0)}-e^{-is(b-x+0)}}{2\pi is}\,ds\right\}d\mathcal{F}(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-a-0)-\operatorname{sgn}(x-b-0)}{2}\,d\mathcal{F}(x).$$

В останньому інтегралі інтегрованою функцією є обмежник (7); отже, цей інтеграл рівний

$$\int_a^b d\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a).$$

Зворотна формула (11) – виведена.

Б. Нехай тепер випадковий вектор $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ має функцію розподілу $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$ та характеристичну функцію $f(s_1,\ldots,s_n)$. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $J_n=(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n]$, де $-\infty\le a_k<b_k\le\infty$ $(k=1,2,\ldots,n)$, рівний головному значенню інтеграла від добутку характеристичної функції на ядро

$$N(s_1,\ldots,s_n;a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-is_k(a_k+0)}-e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi is_k},$$

тобто

$$P\{\xi\in J_n\}=(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-is_k(a_k+0)}-e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi is_k}f(s_1,\ldots,s_n)\,ds_n\cdots ds_1. \tag{14}$$

n – кратний інтеграл справа в (14) розуміємо в сенсі головного значення Коші, тобто $(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}(n)\int_{-\infty}^{\infty}=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}(n)\int_{-c}^{c}$, $c>0$.

Доведення. Коли врахувати означення (3), то правий бік (14) можна записати у формі $2n$-кратного інтеграла

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\cdots\int_{-c}^{c}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-is_k(a_k+0)}-e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi i s_k}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s_1x_1+\cdots+s_nx_n)}\,d\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)\,ds_n\ldots ds_1\,. \quad (15)$$

Оскільки в (15) інтеграли відносно x-ів абсолютно збігаються, а відносно s-ів межі інтегралів обмежені, то змінимо черговість інтегрування. Одержимо

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-is_k(a_k-x_k+0)}-e^{-is_k(b_k-x_k+0)}}{2\pi i s_k}\,ds_k\right\}d\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n). \quad (16)$$

Зважаючи на існування інтеграла (6), можемо (16) записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is_k(a_k-x_k+0)}-e^{-is_k(b_k-x_k+0)}}{2\pi i s_k}\,ds_k\right\}d\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{sgn}(x_k-a_k-0)-\operatorname{sgn}(x_k-b_k-0)}{2}\right\}d\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

В останньому інтегралі інтегрованою функцією є n-вимірний обмежник (8); отже, останній інтеграл рівний

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}d\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)\,,$$

і, з огляду на вираз 1° п. 1, одержано лівий бік (14). Обернена формула (14) – доведена.

4. Наслідки. Безпосереднім наслідком зворотної формули (14) є n-вимірна теорема єдиності. Характеристична функція (3) о д н о з н а ч н о визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(x_1,\ldots,x_n)$, причому

$$\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n)=\lim_{\sup a_k\to-\infty}(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-is_k(a_k+0)}-e^{-is_k(x_k+0)}}{2\pi i s_k}f(s_1,\dots,s_n)ds_n\dots ds_1. \quad (17)$$

Для доведення (17) досить у зворотній формулі (14) замість b_k прийняти x_k та спрямувати a_k у мінус безмежність для всіх $k = 1, 2, \dots, n$.

Формули (3) і (17) вказують на те, що відповідність між функцією розподілу $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n)$ та характеристичною функцією $f(s_1,\dots,s_n)$ випадкового вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ взаємно однозначна.

Першим безпосереднім наслідком зворотної формули (11) є

Одномірна теорема єдиності. Характеристична функція $f(s)$ однозначно визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$, причому

$$\mathcal{F}(x)=\lim_{a\to-\infty}(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is(a+0)}-e^{-is(x+0)}}{2\pi i s}f(s)ds. \quad (18)$$

Для доведення (18) досить у зворотній формулі (11) замість b прийняти x та спрямувати a в мінус безмежність, або в (17) прийняти $n = 1$.

Другим безпосереднім наслідком зворотної формули (11) є

Теорема про величину стрибка функції розподілу в точці. Нехай випадкова змінна ξ має функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ та характеристичну функцію $f(s)$. Тоді стрибок функції розподілу в точці c рівний

$$\mathcal{F}(c+0)-\mathcal{F}(c-0)=(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-is(c-0)}-e^{-is(c+0)}}{2\pi i s}f(s)ds. \quad (19)$$

Для доведення (19) досить у зворотній формулі (11) замість b прийняти $c+0$, замість a – $c-0$ і повторити доведення (11). При доведенні замість обмежника (7) зустрінеться точковий обмежник (9). Правий бік (19) зводиться до

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sgn(x-c+0)-sgn(x-c-0)}{2}\, d\mathcal{F}(x) = \int_{x=c} d\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(c+0)-\mathcal{F}(c-0).$$

Зауважимо, що коли функція розподілу $\mathcal{F}(x)$ неперервна в точці c, то інтеграл справа в (19) обертається в нуль.

5. Приклади. 1) Дано характеристичну функцію $f(s)=e^{ics}$. Знайти величину стрибка відповідної функції розподілу в точці $x=c$.

За формулами (19) і (6) одержуємо

$$\mathcal{F}(c+0)-\mathcal{F}(c-0) = (V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(+0)}-e^{is(-0)}}{2\pi i s}\, ds = \frac{sgn(+0)-sgn(-0)}{2} = 1.$$

2) Дано характеристичну функцію

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} e^{iks}.$$

Знайти значення та величину стрибка відповідної функції розподілу в точці $x=4$ та показати, що функція розподілу неперервна в точці $x=\pi$.

За формулами (18) і (6), значення функції розподілу в точці $x=4$ рівне

$$\mathcal{F}(4) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \cdot \lim_{a\to-\infty} (V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(k-a-0)}-e^{is(k-4-0)}}{2\pi i s}\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \cdot \frac{1-sgn(k-4-0)}{2} = p(1+q+q^2+q^3).$$

За формулами (19) і (6), величина стрибка функції розподілу в точці $x=4$ рівна

$$\mathcal{F}(4+0)-\mathcal{F}(4-0) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} (V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(k-4+0)}-e^{is(k-4-0)}}{2\pi i s}\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \cdot \frac{sgn(k-4+0) - sgn(k-4-0)}{2} = pq^3 .$$

Величина стрибка функції розподілу в точці $x = \pi$ рівна

$$\mathcal{F}(\pi+0) - \mathcal{F}(\pi-0) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \cdot \frac{sgn(k-\pi+0) - sgn(k-\pi-0)}{2} = 0 .$$

Отже, $\mathcal{F}(x)$ - неперервна в точці $x = \pi$.

3) Дано характеристичну функцію

$$f(s_1, s_2) = e^{\lambda_1(e^{is_1}-1) + \lambda_2(e^{2is_2}-1)} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} e^{is_1 k_1} e^{2is_2 k_2} , \qquad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0) .$$

Знайти значення відповідної функції розподілу в точці (2,3).

За формулою (17), значення функції розподілу в точці (x_1 , x_2) = = (2,3) рівне

$$\mathcal{F}(2,3) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \times$$

$$\times \lim_{\substack{a_1 \to -\infty \\ a_2 \to -\infty}} (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is_1(k_1-a_1-0)} - e^{is_1(k_1-2-0)}}{2\pi i s_1} \cdot \frac{e^{is_2(2k_2-a_2-0)} - e^{is_2(2k_2-3-0)}}{2\pi i s_2} ds_2\, ds_1 .$$

З огляду на (6) одержуємо:

$$\mathcal{F}(2,3) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \cdot \frac{1 - sgn(k_1-2-0)}{2} \cdot \frac{1 - sgn(2k_2-3-0)}{2} .$$

Тільки при k_1 = 0,1,2 та k_2 = 0,1 останні два множники подвійної суми рівні одиниці; при дальших k_1 та k_2 вони рівні нулю. Отже,

$$\mathcal{F}(2,3)=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\left(1+\lambda_1+\frac{\lambda_1}{2}\right)(1+\lambda_2).$$

Це і є шукане значення функції розподілу в точці (2,3). Легко зауважити, що, взагалі, для точок (x_1, x_2), $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, одержимо

$$\mathcal{F}(x_1, x_2)=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k_1=0}^{[x_1]}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}\sum_{k_2=0}^{[x_2]}\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!},$$

де $[x]$ - ціла частина з числа x. Коли ж хоча б одне з x_1, x_2 - від'ємно, то $\mathcal{F}(x_1, x_2)=0$.

Література

1. Б. В. Гнеденко. Элементы теории функций распределения случайных векторов. Успехи мат. наук, вып. 10, 1944.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. "Наука", 1965.

—o—

УДК 517.9:536.2

Б.М.КОРДУБА, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПЛОЩИНИ З ЩІЛИНАМИ

§ 1. Постановка задачі. Розглянемо площину Oxy, в якій розміщено m прямолінійних щілин L_1, L_2, ..., L_m довільних, але скінченних довжин ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_m. Нехай ці щілини розміщені паралельно одній з осей координат, наприклад осі Oy (рис. 1). Необхідно знайти функцію $u(x,y)$, що задовольняє в площині Oxy рівняння Лапласа