$$\mathcal{F}(2,3)=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\left(1+\lambda_1+\frac{\lambda_1^2}{2}\right)(1+\lambda_2).$$

Це і є шукане значення функції розподілу в точці (2,3). Легко зауважити, що, взагалі, для точок (x_1,x_2), $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, одержимо

$$\mathcal{F}(x_1,x_2)=e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k_1=0}^{[x_1]}\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}\sum_{k_2=0}^{[x_2]}\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!},$$

де $[x]$ - ціла частина з числа x. Коли ж хоча б одне з x_1, x_2 - від'ємно, то $\mathcal{F}(x_1,x_2)=0$.

Література

1. Б. В. Гнеденко. Элементы теории функций распределения случайных векторов. Успехи мат. наук, вып. 10, 1944.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. "Наука", 1965.

—o—

УДК 517.9:536.2

Б.М.КОРДУБА, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПЛОЩИНИ З ЩІЛИНАМИ

<u>§ 1. Постановка задачі.</u> Розглянемо площину Oxy, в якій розміщено m прямолінійних щілин $L_1, L_2, \ldots, L_m$ довільних, але скінченних довжин $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m$. Нехай ці щілини розміщені паралельно одній з осей координат, наприклад осі Oy (рис. 1). Необхідно знайти функцію $u(x,y)$, що задовольняє в площині Oxy рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad (1)$$

а на щілинах L_1, L_2, ..., L_m збігається з заданими на них функціями

$$u\Big|_{L_i} = \varphi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2)$$

Сформульована задача (I)-(2) є зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа в необмеженій області.

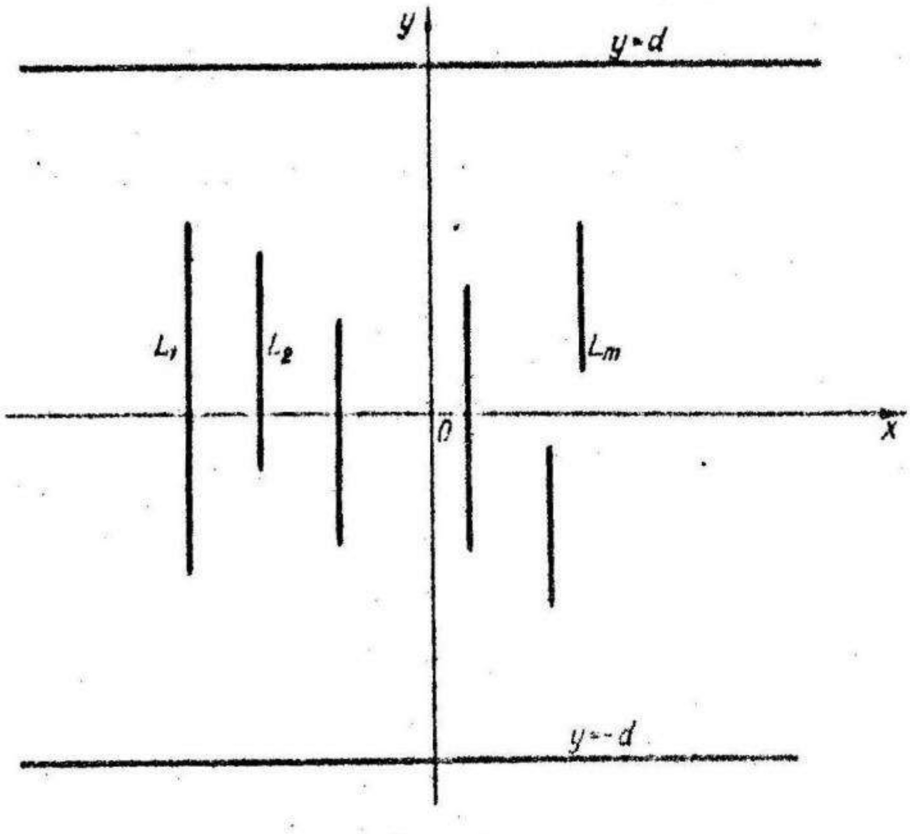

Рис. I.

З прикладної точки зору найбільший інтерес становить розв'язок поставленої задачі не в усій площині Oxy, а в тій її частині, де зосереджені щілини. Будемо розглядати розв'язок задачі тільки в такій частині площини.

Для цього замінимо розв'язок задачі (I)-(2) для необмеженої облаоті розв'язком такої ж задачі для смуги. Виберемо початок системи координат приблизно в центрі системи щілин. По обидві сторони від осі Ox на деякій віддалі d від неї проведемо паралельні їй прямі. Задачі (1)-(2) будемо розглядати в цій смузі.

В зв'язку з тим, що розв'язок задачі (1)-(2) є функція гармонічна в усій площині Oxy, має місце нерівність

$$\min_{1 \le i \le m} \varphi_i(y) \le u(x, \pm d) \le \max_{1 \le i \le m} \varphi_i(y). \tag{3}$$

Щоб з достатньою точністю одержати розв'язок вихідної задачі (1)-(2) в частині області, що нас цікавить, необхідно вияснити:

1) вплив віддалі d ;

2) вплив граничних умов, що будуть задаватися на прямих $y = \pm d$. Найпростіше на прямих $y = \pm d$ задавати не функцію, а постійну

$$u(x, \pm d) = a. \tag{4}$$

Відправляючись від деякого фіксованого d, збільшуючи і зменшуючи його, а також змінюючи величину a в границях (3), розв'язуємо задачу (1), (2), (4) для різних смуг і різних граничних умов на них. При цьому можна вибрати таке d, що дальше збільшення його, а також зміна величини a не впливають з необхідною точністю на значення шуканої функції в тій частині площини, де зосереджені щілини.

<u>§ 2. Розв'язок задачі методом прямих.</u> Розв'язок задачі (1), (2), (4) замінимо розв'язком еквівалентної їй задачі: знайти функцію $U(x,y)$, що задовольняє всередині смуги, включаючи і щілини $L_1, L_2, \dots, L_m$, рівняння Пуассона

$$\Delta U = -q(x,y), \tag{5}$$

де $q(x,y)=0$ всюди в полосі $\{-\infty < x < \infty, \ -d \le y \le d\}$, крім щілин, а на щілинах $q(x,y) \ne 0$ і визначається із умов

$$U(x,y)\Big|_{L_i} = u(x,y)\Big|_{L_i} = \varphi_i(y) \qquad (i=1,2,\dots,m). \tag{6}$$

Крім цього, шукана функція $U(x,y)$ повинна задовольняти умови на границі полоси

$$U(x,-d) = U(x,d) = u(x,-d) = u(x,d) = a . \tag{7}$$

При знайдених $q(x,y)$ на щілинах із умов (6) розв'язки задач (1), (2), (4) і (5), (7) будуть тотожними всередині розглядуваної смуги. Задача (5), (7) є задача Діріхле для рівняння Пуассона всередині однозв'язної області, що значно простіше в порівнянні з задачею (1), (2), (4) для багатозв'язної області.

Припустивши $q(x,y)$ відомою функцією, задачу (5), (7) будемо розв'язувати методом прямих [1] - [7].

Після застосування P -трансформації до рівняння, що одержується методом прямих [6] із (5), маємо

$$\frac{d^2}{dx^2} V_s(x) - \mu_s^2 V_s(x) = -Q_s(x) - \Omega_s(x), \quad (s=1,2,\dots,n), \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}
V_s(x) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} U_i \sin\frac{si\pi}{n+1} ;\\
Q_s(x) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha(x) \sin\frac{s\alpha\pi}{n+1} ;\\
\Omega_s(x) &= \frac{a}{h^2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{s\pi}{n+1} + \sin\frac{sn\pi}{n+1}\right]; \\
\mu_s &= \frac{2}{h}\sin\frac{s\pi}{2(n+1)} > 0 .
\end{aligned} \tag{9}$$

Кожне рівняння системи (8) містить лише одну невідому функцію $V_s(x)$ і розв'язується незалежно від інших.

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є

$$V_s^{(0)}(x) = A_s e^{\mu_s x} + B_s e^{-\mu_s x} . \tag{10}$$

Визначимо тепер функції $q_{\alpha}(x)$, що входять в праві частини системи (8). В зв'язку з тим, що функція $q(x,y)$ повинна бути рівна нулю всюди, крім щілин L_j $(j=1,2,\dots,m)$, а функції $q_{\alpha}(x)$ одержуються із неї при перетині прямої з номером α, перпендикулярної до осі Oy, то природно $q_{\alpha}(x)$ зобразити у вигляді

$$q_{\alpha}(x)=\sum_{j=1}^{m_{\alpha}} q_{\alpha}^{(j)}(x)\,\delta(x-x_{\alpha}^{(j)}), \tag{11}$$

де m_{α} - кількість щілин, що перетинаються прямою з номером;

$\delta(x-x_{\alpha}^{(j)})$ - δ - функція Дірака;

$x_{\alpha}^{(j)}$ - координата точки перетину α-прямою j-ї щілини;

$q_{\alpha}^{(j)}(x)$ - невідомі параметри, які знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь, складеної при задоволенні на кожній прямій $y=\alpha$ граничних умов на щілинах

$$U\Big|_{L_j}=\varphi_j(y) \qquad (j=1,2,\dots,m).$$

Враховуючи (9) і (11), система (8) набуде вигляду

$$\frac{d^2V_s(x)}{dx^2}-\mu_s^2V_s(x)=-\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m_{\alpha}}q_{\alpha}^{(j)}(x)\,\delta(x-x_{\alpha}^{(j)})\right]\sin\frac{s\alpha\pi}{n+1}-$$

$$-\frac{a}{h^2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{s\pi}{n+1}+\sin\frac{sn\pi}{n+1}\right]. \tag{12}$$

В зв'язку з тим, що функція $q(x,y)$ рівна нулю всюди, за винятком щілин, в зовнішній сумі правої частини останнього рівняння сумування фактично ведеться з $\alpha=\mathcal{R}$ до $\alpha=\omega$, де α і ω - відповідно номери першої і останньої прямої, що перетинає систему щілин.

Частковий розв'язок рівняння

$$\frac{d^2V_s(x)}{dx^2}-\mu_s^2V_s(x)=-\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,q_{\alpha}^{(j)}(x)\,\delta(x-x_{\alpha}^{(j)})\sin\frac{s\alpha\pi}{n+1} \tag{13}$$

знайдемо з допомогою прямого і оберненого перетворення Фур'е [9]

$$F\left[V(x)\right] = W(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, e^{ipx}\, dx\,,$$
$$F^{-1}\left[W(p)\right] = V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} W(p)\, e^{-ipx}\, dp\,, \qquad (14)$$

враховуючи його властивості

$$F\left[V^{(k)}\right] = (ip)^k F\left[V\right] \quad (k=1,2,\ldots). \qquad (15)$$

Тут $F\left[V^{(k)}\right]$ - перетворення Фур'є k-ї похідної функції V. Цей розв'язок набуває вигляду

$$V_{s,\alpha}^{(j)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\, \sin\frac{s\alpha\pi}{n+1}\, q_\alpha^{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-x_\alpha^{(j)})}}{p^2+\mu_s^2}\, dp. \qquad (16)$$

Згідно з [10],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-x_\alpha^{(j)})}}{p^2+\mu_s^2}\, dp = \frac{\pi}{\mu_s}\, e^{-\mu_s|x-x_\alpha^{(j)}|} \,. \qquad (17)$$

Таким чином,

$$V_{s,\alpha}^{(j)} = \frac{1}{2\mu_s}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\, q_\alpha^{(j)} \sin\frac{s\alpha\pi}{n+1}\, e^{-\mu_s|x-x_\alpha^{(j)}|}\,, \qquad (18)$$

і загальний розв'язок рівняння (8) запишеться у вигляді

$$V_s = -\frac{1}{2\mu_s}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{\alpha=\mathcal{R}}^{\omega}\sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x)\sin\frac{s\alpha\pi}{n+1}\, e^{-\mu_s|x-x_\alpha^{(j)}|} +$$
$$+ \frac{a}{\mu_s^2 h^2}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{s\pi}{n+1} + \sin\frac{sn\pi}{n+1}\right] + A_s e^{\mu_s x} + B_s e^{-\mu_s x}. \qquad (19)$$

Якщо шукається розв'язок, обмежений на безконечності, необхідно прийняти $A_s = B_s = 0$.

Застосовуючи ще раз P-трансформацію, одержуємо

$$U_k(x) = -\frac{1}{n+1}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\mu_s}\sum_{\alpha=\mathcal{R}}^{\omega}\sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x)\sin\frac{s\alpha\pi}{n+1}\sin\frac{ks\pi}{n+1}\, e^{-\mu_s|x-x_\alpha^{(j)}|} +$$

$$+\frac{4a}{(n+1)h^2}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^{s+1}}{\mu_s}\cos\frac{s\pi(n-1)}{2(n+1)}\sin\frac{ks\pi}{n+1}\ . \qquad (20)$$

Система, яку ми тільки що розв'язали, апроксимує задачу (5), (7) з точністю $O(h^2)$. Розкладаючи функцію $U(x,y)$, а також $U''_y(x,y)$ в ряд Тейлора, відкидаючи при цьому величини порядку $O(h^6)$ [7], одержимо систему рівнянь

$$\frac{5}{6}\frac{d^2U_k(x)}{dx^2}+\frac{1}{12}\left[\frac{d^2U_{k+1}(x)}{dx^2}+\frac{d^2U_{k-1}(x)}{dx^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{h^2}\left[U_{k+1}(x)-2U_k(x)+U_{k-1}(x)\right]=-\left\{\frac{5}{6}q_k(x)+\frac{1}{12}\left[q_{k+1}(x)+q_{k-1}(x)\right]\right\}, \qquad (21)$$

що апроксимує вихідне рівняння з точністю $O(h^4)$. Розв'язок одержується у вигляді (20), лише μ_s має вигляд

$$\mu_s=\frac{2\sqrt{3}\sin\frac{s\pi}{2(n+1)}}{h\sqrt{3-\sin^2\frac{s\pi}{2(n+1)}}}\ . \qquad (22)$$

<u>§ 3. Розрахунок поля плоскої лінзи.</u> Викладеним методом розрахуємо поле плоскої електронної лінзи, конфігурація і розміри якої зображені

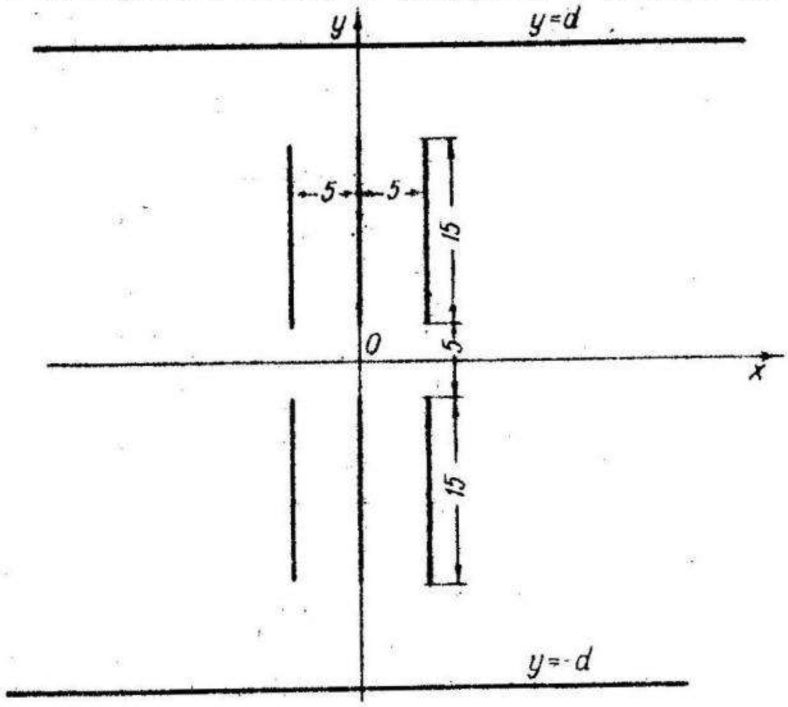

Рис. 2

на рис. 2. $L_1, L_2, \ldots, L_6$ – система плоских електродів (щілин) однакових довжин $\ell_1 = \ldots = \ell_6 = 15$ (мм), розміщених симетрично відносно осей. На електродах задається потенціал

$$U\Big|_{L_1} = U\Big|_{L_3} = U\Big|_{L_4} = U\Big|_{L_6} = 1\,; \quad U\Big|_{L_2} = U\Big|_{L_5} = 0\,.$$

Необхідно знайти поле потенціалу цієї системи в області, що лежить між електродами (рис. 3). Виберемо $h = \frac{5}{3}$ (мм). Враховуючи симетрію задачі, складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів $q_{\alpha}^{(j)}(x)$ (в нашому випадку система 18-го порядку).

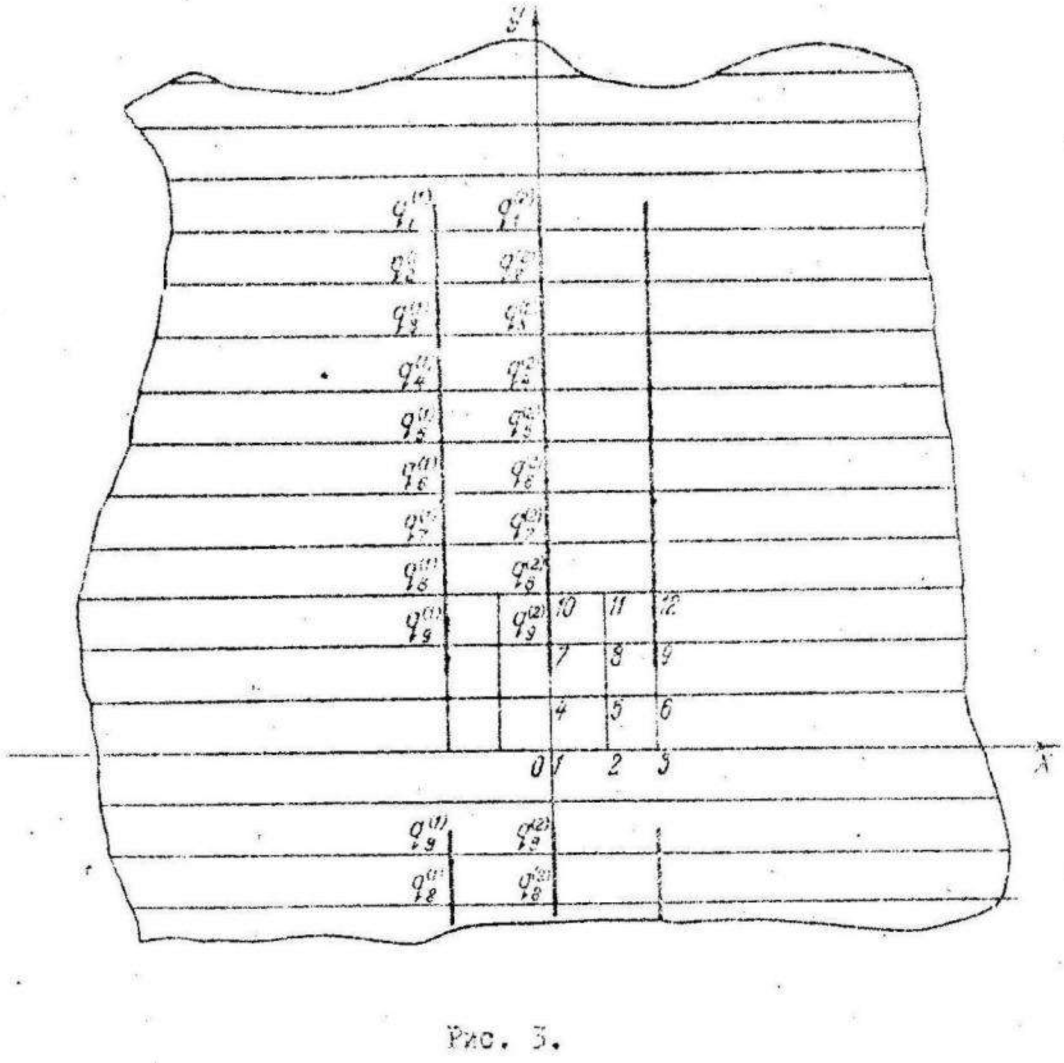

Рис. 3.

Задача розв'язувалась при $d_1 = 90$ (мм), $d_2 = 180$ (мм), $d_3 = 270$ (мм), а також при різних граничних умовах

$$U(x_1 \pm d) = 1; \quad U(x_1 \pm d) = 0{,}5; \quad U(x_1 \pm d) = 0.$$

Наведемо результати деяких обчислень при $d = 90$ (мм), $U(x_1 \pm d) = 1$:

а) Параметри $q_\alpha^{(j)}$:

$q_1^{(1)} = 0{,}269947$	$q_1^{(2)} = -0{,}334806$
$q_2^{(1)} = 0{,}212035$	$q_2^{(2)} = -0{,}222594$
$q_3^{(1)} = 0{,}208597$	$q_3^{(2)} = -0{,}206514$
$q_4^{(1)} = 0{,}208247$	$q_4^{(2)} = -0{,}202287$
$q_5^{(1)} = 0{,}208169$	$q_5^{(2)} = -0{,}201171$
$q_6^{(1)} = 00{,}208442$	$q_6^{(2)} = -0{,}201500$
$q_7^{(1)} = 0{,}209742$	$q_7^{(2)} = -0{,}203989$
$q_8^{(1)} = 0{,}216525$	$q_8^{(2)} = -0{,}214780$
$q_9^{(1)} = 0{,}287903$	$q_9^{(2)} = -0{,}300326$

б) Значення потенціалу (для порівняння наводимо значення потенціалу, знайдені іншим методом).

№ точки	За формулою (20) даної роботи	За формулами (10), (11) роботи [11]
1	0,457685	0,457856
2	0,586304	0,586710
3	0,792855	0,792885
4	0,385598	0,385614
5	0,570627	0,570955
6	0,823663	0,823573
7	0,000000	0,000000
8	0,532592	0,532734
9	1,000000	1,000000
10	0,000000	0,000000
11	0,512760	0,512817
12	1,000000	1,000000

Розрахунок проводився на ЕОМ "Минск-22".

Література

1. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнения с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. мат. и механ., 3, вып. 1, 1939, 75-81.

2. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 28, 1949, 73-103.

3. Я. И. Алихашкин. Решение задачи о несовершенной скважине методом прямых. Сб. "Вычисл. мат.", вып. 1, М., 1957, 136-152.

4. Б. М. Будак, Ф. П. Васильев. Сходимость и оценка погрешностей метода прямых для решения некоторых задач фильтрации. Сб. "Численные методы в газовой динамике". ВЦ МГУ, М., 1963.

5. В. И. Лебедев. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода. Вестник МГУ, вып. 7, № 10, 1955, 47-57.

6. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. ЖВМ и МФ, 5, № 6, 1965.

7. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Решение пространственной осесимметрической задачи Дирихле методом прямых с повышенной точностью аппроксимации. Сб. "Численные методы решения задач математической физики", М., 1966.

8. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.

9. Г. Е. Шилов. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. УМН, т. XIУ (5), 1959.

10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

11. Є. С. Дорожовський, Б. М. Кордуба, В. Г. Костенко. Задача Діріхле плоскої електростатики. Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат., вип. 1, 1965.

—o—