УДК 517.535.4

М.М.ШЕРЕМЕТА

ПРО ЛАКУНАРНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ФУНКЦІЙ

Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

аналітична в крузі $|z|<1$ функція і $M(r)=M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|\to\infty$ при $r\to 1$, а $\mu(r)$ і $\nu(r)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1), $0<r<1$. Ріст функції $f(z)$ переважно вивчають за допомогою порядку і нижнього порядку, які визначаються формулами

$$\rho=\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln\ln M(r)}{-\ln(1-r)}, \qquad \lambda=\varliminf_{r\to 1}\frac{\ln\ln M(r)}{-\ln(1-r)}. \tag{2}$$

В [1] встановлюється зв'язок між λ, ρ і послідовністю індексів ненульових коефіцієнтів $\{a_n\}$ ряду (1) при умові, що $0<\rho<\infty$. Нашою метою буде доведення аналогічних теорем для випадку, коли $\rho=0$ і $\rho=\infty$.

Ми будемо використовувати функції з класу Λ, який визначається так. Приймемо, що додатна функція $\alpha(x)$, визначена на $[a,\infty)$, належить до класу Λ, якщо вона диференційована на $[a,\infty)$, строго монотонно зростає на $[a,\infty)$, при $x\to\infty$ прямує до ∞ і є повільно зростаючою функцією [2], тобто для всіх c, $0<c<\infty$, виконується $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(cx)/\alpha(x)=1$. Будемо вважати, що $\alpha(\infty)=\infty$. Нам будуть зустрічатись значення функції $\alpha(x)\in\Lambda$ в точках, де вона не визначена. Тоді приписуємо їй значення 1. За означенням $\ln^{+} x = \ln x$, якщо $x \geq 1$, $\ln^{+} x = 0$, якщо $x < 1$.

Нехай $\varphi(r)$ – неспадна додатна функція, $0 < r < 1$, яка прямує до ∞ при $r \to 1$. Позначимо

$$\rho(\alpha, \beta, \varphi(r)) = \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\varphi(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \qquad \lambda(\alpha, \beta, \varphi(r)) = \underline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\varphi(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \tag{3}$$

$$\rho(\alpha, \varphi(r)) = \overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\ln \varphi(r))}{\alpha(-\ln(1-r))}, \qquad \lambda(\alpha, \varphi(r)) = \underline{\lim_{r \to 1}} \frac{\alpha(\ln \varphi(r))}{\alpha(-\ln(1-r))}, \tag{4}$$

де $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$. Очевидно, що при $\varphi(r) = \ln M(r)$, $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = \ln x$ означення (3) збігається з означенням (2).

Позначимо: $F(x;c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $\Phi(x;c) = \alpha^{-1}(c\alpha(x))$.

Лема 1. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$, а функція $F(x;c)$ для всіх c, $0 < c < \infty$, задовольняє умовам

$$\alpha\left(x[F(x;c)]^{-1}\right) = \alpha(x)\left(1 + o(1)\right) \quad \text{при } x \to \infty; \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \, x F'(x;c)[F(x;c)]^{-1} < 1. \tag{6}$$

Тоді

$$\rho(\alpha, \beta, \ln M(r)) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\alpha(n)}{\beta\{n[\ln^{+}|a_n|]^{-1}\}}.$$

Лема 1'. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$. Тоді, якщо $\rho(\alpha, \ln M(r)) \geq 1$ і для всіх c $(0 < c < 1)$ виконуються умови

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \, \Phi'(x;c) < 1; \tag{7}$$

$$\lim_{x \to \infty} \alpha(\ln x)/\alpha(x) = 0. \tag{8}$$

то

$$\rho(\alpha, \ln M(r)) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha\left(\ln\{n[\ln^{+}|a_n|]^{-1}\}\right)} ; \tag{9}$$

а якщо $\rho(\alpha, \ln M(r)) < 1$ і виконується умова (8), то

$$\rho(\alpha, \ln M(r)) = \varlimsup_{n\to\infty} \alpha(\ln^{+}\ln^{+}|a_n|)/\alpha(\ln n) . \tag{10}$$

Доведення лем 1 і 1' проведене в [3] і [4] .

Лема 2. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$ і виконуються умови

$$\alpha(xy) \leq \alpha(x) + \alpha(y) \tag{11}$$

при $x > x_0$, $y > y_0$;

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x)/\beta(x) = 0 . \tag{12}$$

Тоді

$$\rho(\alpha, \beta, \ln M(r)) = \rho(\alpha, \beta, \nu(r)), \quad \lambda(\alpha, \beta, \ln M(r)) = \lambda(\alpha, \beta, \nu(r)) .$$

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що

$$\mu(r) \leq M(r) \leq \frac{2}{1-r}\, \mu\left(\frac{r+1}{2}\right) . \tag{13}$$

Дійсно, ліва частина нерівності (13) є відомою нерівністю Коші, а права одержується так:

$$M(r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\frac{r+1}{2}\right)^n \left(\frac{2r}{1+r}\right)^n \leq \mu\left(\frac{r+1}{2}\right) \frac{1}{1-\frac{2r}{1+r}} = \frac{2}{1-r}\, \mu\left(\frac{r+1}{2}\right).$$

Далі, для максимального члена і центрального індекса має місце (див. [1] , стор. 199) співвідношення

$$\ln \mu(r_2) = \ln \mu(r_1) + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\nu(x)}{x}\, dx , \qquad r_2 > r_1 > 0 , \tag{14}$$

звідки одержуємо

$$\ln\mu\left(\frac{r+1}{2}\right) \geq \int_r^{\frac{r+1}{2}} \frac{\nu(x)}{x}\,dx \geq \nu(r)\int_r^{\frac{r+1}{2}} \frac{dx}{x} \geq \nu(r)\int_r^{\frac{r+1}{2}} dx = \frac{\nu(r)}{2}(1-r). \qquad (15)$$

Разом з тим, при $r \geq r_0 > 0$ з (14) маємо

$$\ln\mu(r) = \ln\mu\left(\frac{r}{2}\right) + \int_{\frac{r}{2}}^{r} \frac{\nu(x)}{x}\,dx \leq$$

$$\leq \ln\mu\left(\frac{1}{2}\right) + \nu(r)\ln 2 \leq \ln\mu\left(\frac{1}{2}\right) + \nu(r). \qquad (16)$$

З (13) і (16) одержуємо

$$\ln M(r) \leq \nu\left(\frac{r+1}{2}\right) + \ln\frac{1}{1-r} + \ln\left(2\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq$$

$$\leq 2\max\left\{\nu\left(\frac{r+1}{2}\right), \ln\frac{1}{1-r}\right\} + \ln\left(2\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right), \qquad (17)$$

а з (13) і (15) маємо

$$\nu(r) \leq \frac{2}{1-r}\ln M\left(\frac{r+1}{2}\right). \qquad (18)$$

Завдяки умовам леми, з (18) одержуємо, що

$$\rho(\alpha,\beta,\nu(r)) \leq \rho(\alpha,\beta,\ln M(r)), \quad \lambda(\alpha,\beta,\nu(r)) \leq \lambda(\alpha,\beta,\ln M(r)). \qquad (19)$$

А тому що за умовою (12) $\alpha\left(\ln\frac{1}{1-r} + O(1)\right) = o\left(\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$, то з (17) одержуємо нерівності, протилежні до нерівностей (19). Лема 2 доведена.

__Лема 2'.__ Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$ задовольняє умову (8). Тоді

$$\rho(\alpha,\ln M(r)) \leq \rho(\alpha,\nu(r)) \leq \max\{1, \rho(\alpha;\ln M(r))\},$$
$$\lambda(\alpha,\ln M(r)) \leq \lambda(\alpha,\nu(r)) \leq \max\{1, \lambda(\alpha,\ln M(r))\}. \qquad (20)$$

Д о в е д е н н я. Завдяки тому, що $\alpha(x) \in \Lambda$ і що

$$\ln\ln M\left(\frac{r+1}{2}\right)+\ln\frac{2}{1-r}\le 2\max\left\{\ln\frac{2}{1-r},\ln\ln M\left(\frac{r+1}{2}\right)\right\},$$

маємо із (18)

$$\rho(\alpha,\nu(r))\le\max\{1,\rho(\alpha,\ln M(r))\},\quad \lambda(\alpha,\nu(r))\le\max\{1,\lambda(\alpha,\ln M(r))\}.$$

Разом з тим, з (17), завдяки умові (8) і означенню класу Λ, маємо

$$\rho(\alpha,\ln M(r))\le\max\{0,\rho(\alpha,\nu(r))\}=\rho(\alpha,\nu(r)),$$

$$\lambda(\alpha,\ln M(r))\le\max\{0,\lambda(\alpha,\nu(r))\}=\lambda(\alpha,\nu(r)).$$

Лема 2′ доведена.

Зауважимо, що нерівності (20) покращити не можна, на що вказує приклад функції $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\exp\{\exp(\sqrt{\ln n})\}z^n$. Легко перевірити, що $\rho(\ln x,\nu(r))=1$, а за лемою 1 (див. (10)) виконується $\rho(\ln x,\ln M(r))=\frac{1}{2}$

Теорема 1. Нехай $\alpha(x)\in\Lambda$, $\beta(x)\in\Lambda$ і виконуються умови (11) і (12). Тоді, якщо

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{n_p}z^{n_p},\tag{21}$$

то

$$\lambda(\alpha,\beta,\ln M(r))\le\rho(\alpha,\beta,\ln M(r))\cdot\varliminf_{p\to\infty}\frac{\alpha(n_p)}{\alpha(n_{p+1})}.\tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\rho(\alpha,\beta,\ln M(r))=0$, то нерівність (22) тривіальна. Якщо $\rho(\alpha,\beta,\ln M(r))>0$, то за лемою 4 нерівність (22) еквівалентна нерівності

$$\frac{\lambda(\alpha,\beta,\nu(r))}{\rho(\alpha,\beta,\nu(r))}\le\varliminf_{p\to\infty}\frac{\alpha(n_p)}{\alpha(n_{p+1})}.\tag{23}$$

Позначимо нижню границю в правій частині (23) через σ; якщо $\sigma=\infty$, то нерівність (23) очевидна, а тому можна припустити, що $\sigma<\infty$. Тоді для всякого $\varepsilon>0$ існує послідовність індексів $\{p_k\}$ така, що $\alpha(n_{p_k})\le(\sigma+\varepsilon)\alpha(n_{p_k}+1)$, тобто $n_{p_k}\le\alpha^{-1}\{(\sigma+\varepsilon)\alpha(n_{p_k}+1)\}$. Нехай r_k – значення r, при якому $\nu(r_k-0)\le n_{p_k}<n_{p_k+1}\le\nu(r_k+0)$

Тоді

$$\lambda(\alpha,\beta,\nu(r)) \le \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(\nu(r_k+0))}{\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)} \le (6+\varepsilon)\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\alpha(\nu(r_k+0))}{\beta\left(\frac{1}{1-r_k}\right)} \le (6+\varepsilon)\rho(\alpha,\beta,\nu(r)),$$

звідки, завдяки довільності $\varepsilon>0$, одержуємо (23).

__Теорема 1'.__ Нехай $\alpha(x)\in\Lambda$ задовольняє умову (8), а $f(z)$ має зображення (21). Тоді

$$\lambda(\alpha,\ln M(r)) \le \max\{1,\rho(\alpha,\ln M(r))\}\varliminf_{p\to\infty}\frac{\alpha(\ln n_p)}{\alpha(\ln n_{p+1})}.$$

Доведення теореми 1' аналогічне доведенню теореми 1, лише використовується лема 2'.

__Теорема 2.__ Нехай $\alpha(x)\in\Lambda$, $\beta(x)\in\Lambda$ і виконуються умови (5) і (6). Нехай, крім того, $\lambda(\alpha,\beta,\ln M(r))<\gamma<\rho(\alpha,\beta,\ln M(r))$. Тоді $f(z)=g_\gamma(z)+h_\gamma(z)$, де $g_\gamma(z)$ – аналітична в крузі $|z|<1$ функція така, що $\rho(\alpha,\beta,\ln M(r,g_\gamma))\le\gamma$, а $h_\gamma(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{m_p}z^{m_p}$ – аналітична в $|z|<1$ функція, яка задовольняє умову

$$\lambda(\alpha,\beta,\ln M(r,h_\gamma)) \ge \gamma\varliminf_{p\to\infty}\frac{\alpha(m_p)}{\alpha(m_{p+1})}.$$

Д о в е д е н н я. Приймемо $g_\gamma(z)=\sum_1 a_n z^n$, де сумування береться по тих значеннях n, для яких $|a_n|\le\exp\left\{\frac{n}{F(n;\frac{1}{\gamma})}\right\}$. За лемою 1 з останньої нерівності випливає, що $\rho(\alpha,\beta,\ln M(r,g_\gamma))\le\gamma$. Тоді приймаємо $h_\gamma(z)=f(z)-g_\gamma(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{m_p}z^{m_p}$, де $|a_{m_p}|>$ $>\exp\left\{\frac{m_p}{F(m_p;\frac{1}{\gamma})}\right\}$. Виберемо $r_p=1-\frac{1}{2F(m_p;\frac{1}{\gamma})}$. Тоді, якщо $r_p\le r\le r_{p+1}$, то $\ln M(r,h_\gamma)\ge\ln|a_{m_p}|+m_p\ln r_p\ge$

$$\ge m_p\left\{\frac{1}{F(m_p;\frac{1}{\gamma})}+\ln\left(1-\frac{1}{2F(m_p;\frac{1}{\gamma})}\right)\right\}\ge\frac{A\,m_p}{F(m_p;\frac{1}{\gamma})},$$

де A – постійна величина $0<A<\infty$, $p\ge p_0$. Звідси, внаслідок умови (5) і того, що $\alpha(x)\in\Lambda$ і $\beta(x)\in\Lambda$, одержуємо

$$\frac{\alpha(\ln M(r,h_r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \geq \frac{\alpha\left(\frac{A m_p}{F(m_p;\frac{1}{\gamma})}\right)}{\beta\left(\frac{1}{1-r_{p+1}}\right)} \geq \frac{\alpha(m_p)(1+o(1))}{\beta(2F(m_{p+1};\frac{1}{\gamma}))} = \gamma\frac{\alpha(m_p)}{\alpha(m_{p+1})}(1+o(1)),$$

що і вказує на справедливість теореми 2.

<u>Теорема 2'</u>. Нехай $\alpha(x)\in\Lambda$ і виконуються умови (7) і (8). Нехай, крім того, $\lambda(\alpha,\ln M(r))<\gamma<\rho(\alpha,\ln M(r))$. Тоді $f(z) = g_\gamma(z)+h_\gamma(z)$, де $g_\gamma(z)$ – аналітична в $|z|<1$ функція така, що $\rho(\alpha,\ln M(r,g_\gamma))\leq\gamma$, а $h_\gamma(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{m_p}z^{m_p}$ – аналітична в $|z|<1$ функція, яка задовольняє умову

$$\lambda(\alpha,\ln M(r,h_\gamma))\geq \max(1,\gamma)\varliminf_{p\to\infty}\frac{\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1})}.$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\rho(\alpha,\ln M(r))\geq 1$, приймемо $g_\gamma(z) = \sum_1 a_n z^n$, де сумування береться по тих індексах n, для яких $|a_n|\leq \exp\left\{\frac{n}{\exp\{\Phi(\ln n;\frac{1}{\gamma})\}}\right\}$. За лемою 1 з останньої нерівності маємо $\rho(\alpha,\ln M(r,g_\gamma))\leq\gamma$. Тоді приймаємо $h_\gamma(z)=f(z)-g_\gamma(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{m_p}z^{m_p}$, де $|a_{m_p}|>\exp\left\{\frac{m_p}{\exp\{\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\}}\right\}$. Виберемо $r_p=1-\frac{1}{e\cdot\exp\{\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\}}$. Тоді, якщо $r_p\leq r\leq r_{p+1}$, то

$$\ln M(r,h_\gamma)\geq\ln|a_{m_p}|+m_p\ln r_p\geq m_p\left\{\frac{1}{\exp\{\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\}}+\right.$$

$$\left.+\ln\left(1-\frac{1}{e\cdot\exp\{\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\}}\right)\right\}\geq\frac{A\,m_p}{\exp\{\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\}},$$ де A – постійна величина, $0<A<\infty$, $p\geq p_0$. Тому $\ln\ln M(r,h_\gamma)\geq\ln A+\ln m_p + \Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})\geq B_1\ln m_p$, якщо $\gamma\geq 1$, де B_1 – постійна величина, $0<B_1<\infty$ і $\ln\ln M(r,h_\gamma)\geq B_2\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma})$, $0<B_2<\infty$,

якщо $\gamma<1$. Звідси одержуємо, що якщо $\gamma>1$, то

$$\frac{\alpha(\ln\ln M(r,h_\gamma))}{\alpha(-\ln(1-r))} \geq \frac{\alpha(B_1 \ln m_p)}{\alpha(\ln(2\exp\Phi(\ln m_{p+1};\frac{1}{\gamma})))} =$$

$$= \frac{\alpha(\ln m_p)(1+o(1))}{\alpha(1+\Phi(\ln m_{p+1};\frac{1}{\gamma}))} = \frac{\gamma\alpha(\ln m_p)(1+o(1))}{\alpha(\ln m_{p+1})}, \qquad (24)$$

а якщо $\gamma<1$, то

$$\frac{\alpha(\ln\ln M(r,h_\gamma))}{\alpha(-\ln(1-r))} \geq \frac{\alpha(B_2\Phi(\ln m_p;\frac{1}{\gamma}))}{\alpha(1+\Phi(\ln m_{p+1};\frac{1}{\gamma}))} = \frac{(1+o(1))\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1})}. \qquad (25)$$

Якщо $\rho(\alpha,\ln M(r,f))<1$, приймемо $g_\gamma(z)=\sum_1 a_n z^n$, де сумування береться по тих індексах n , для яких $|a_n|\leq exp\{exp\{\Phi(\ln n;\gamma)\}\}$. З леми I' очевидно, що $\rho(\alpha,\ln M(r,g_\gamma))\leq\gamma$. Тоді приймаємо $h_\gamma(z)=$ $=f(z)-g_\gamma(z)=\sum_{p=0}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p}$, де $|a_{m_p}|>exp\{exp[\Phi(\ln m_p;\gamma)]\}$. Виберемо $r_p=1-\frac{exp\{\Phi(\ln m_p;\gamma)\}}{m_p}$. Легко зауважити, що $0<r_p<1$, а також, що $r_p\to 1$ (див. [4] , лема 2). Отже, якщо $r_p\leq r<r_{p+1}$, то $\ln\ln M(r,h_\gamma)\geq\ln\{\ln|a_{m_p}|+m_p\ln r_p\}\geq\ln m_p$, звідки

$$\frac{\alpha(\ln\ln M(r,h_\gamma))}{\alpha(-\ln(1-r))} \geq \frac{\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1}-\Phi(\ln m_{p+1};\frac{1}{\gamma}))} = \frac{(1+o(1))\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1})}. \qquad (26)$$

Тепер справедливість теореми 2 випливає з нерівностей (24), (25), (26) і того факту, що якщо $\gamma>1$, то $\rho(\alpha,\ln M(r,f))>1$.

Література

1. L. R. S o n s. Regularity of growth and gaps. Journ. of Math. Analys. and Appl., v. 24, 1968, 296-306.

2. Б. Я. Л е в и н. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

3. М. М. Шеремета. Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 2, 1965.

4. М. Н. Шеремета. О связи между ростом целых или аналитических в круге функции нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. Известия вузов, Математика, № 6, 1968.

5. Ж. Валирон. Аналитические функции. М., 1957.

--0--

УДК 517.53

О.М.КОСТОВСЬКИЙ, Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ПОБУДОВА МАЖОРАНТ ТА ДІАГРАМ НЬЮТОНА РЯДІВ ДІРІХЛЕ

В даній роботі розглядається побудова мажорант і діаграм Ньютона рядів Діріхле та застосування останніх для встановлення достатніх умов існування смуг, в яких ряди Діріхле не перетворюються в нуль.

Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z} \tag{1}$$

з абсцисою збіжності $C \ (C<\infty)$, де $A_0 \neq 0, \ 0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай $a_\nu = |A_\nu| \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$.

Означення 1. Точку $P_\nu(x_\nu, y_\nu)$ в площині xy з координатами $x_\nu = \lambda_\nu$, $y = -\ln a_\nu$ будемо називати точкою зображення коефіцієнта A_ν ряду Діріхле (1).

Припустимо, що в площині xy точки зображення P_ν коефіцієнтів