3. М. М. Шеремета. Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вып. 2, 1965.

4. М. Н. Шеремета. О связи между ростом целых или аналитических в круге функции нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. Известия вузов, Математика, № 6, 1968.

5. Ж. Валирон. Аналитические функции. М., 1957.

--o--

УДК 517.53

О.М.КОСТОВСЬКИЙ, Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ПОБУДОВА МАЖОРАНТ ТА ДІАГРАМ НЬЮТОНА РЯДІВ ДІРІХЛЕ

В даній роботі розглядається побудова мажорант і діаграм Ньютона рядів Діріхле та застосування останніх для встановлення достатніх умов існування смуг, в яких ряди Діріхле не перетворюються в нуль.

Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu z} \qquad (1)$$

з абсцисою збіжності C $(C<\infty)$, де $A_0 \neq 0$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай $a_\nu = |A_\nu|$ $(\nu = 0, 1, \dots)$.

Означення 1. Точку $P_\nu(x_\nu, y_\nu)$ в площині xy з координатами $x_\nu = \lambda_\nu$, $y = -\ln a_\nu$ будемо називати точкою зображення коефіцієнта A_ν ряду Діріхле (1).

Припустимо, що в площині xy точки зображення P_ν коефіцієнтів

A_ν $(\nu=0,1,\dots)$ побудовані. З кожної точки P_ν $(\nu=0,1,\dots)$ проведемо паралельно осі ординат в додатному напрямку півпряму ℓ_ν. Множину точок півпрямих ℓ_ν $(\nu=0,1,\dots)$ позначимо через E. Побудуємо випуклу оболонку $C(E)$ множини точок E. Границею випуклої оболонки $C(E)$ буде деяка випукла вниз ламана лінія ϑ_f.

Означення 2. Ламану лінію ϑ_f будемо називати діаграмою Ньютона ряду Діріхле (1).

Нехай $B_\nu(\lambda_\nu, \varkappa_\nu)$ – точка діаграми Ньютона ϑ_f, абсциса якої $x_\nu = \lambda_\nu$, а ордината $\varkappa_\nu$ $(\nu=0,1,\dots)$.

Позначимо

$$T_\nu = e^{-\varkappa_\nu} > 0.$$

Ряд Діріхле з додатними коефіцієнтами

$$\mathfrak{M}_f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu e^{-\lambda_\nu z} \tag{2}$$

є мажорантою ряду (1). Дійсно, з побудови діаграми Ньютона випливає, що

$$-\ln a_\nu \geqslant -\ln T_\nu$$

або

$$|A_\nu| = a_\nu \leqslant T_\nu .$$

Означення 3. Ряд (2) будемо називати мажорантою Ньютона ряду Діріхле (1).

Означення 4. Величину

$$R_\nu = \left(\frac{T_{\nu-1}}{T_\nu}\right)^{\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}} \qquad (\nu=1,2,\dots;\ R_0=0)$$

будемо називати ν-м числовим нахилом $\mathfrak{M}_f(z)$ або $f(z)$; величину

$$D_\nu = \frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

будемо називати відхиленням $\mathfrak{M}_f(z)$ або $f(z)$.

Означення 5. Якщо точка зображення P_{ν_i} знаходиться у вершині діаграми Ньютона ϑ_f, то індекс ν_i будемо називати вершинним індексом; якщо точка зображення P_ν знаходиться на ламаній лінії $\mathcal{V}_f$, то індекс ν будемо називати діаграмним індексом.

Коефіцієнти мажоранти Ньютона $\mathfrak{M}_f(z)$ ряду Діріхле (1) визначаються таким чином. Якщо ν_{i-1} і ν_i – два послідовні вершинні індекси, то

$$T_\nu = \sqrt[\lambda_{\nu_i}-\lambda_{\nu_{i-1}}]{a_{\nu_{i-1}}^{\lambda_{\nu_i}-\lambda_\nu} \; a_{\nu_i}^{\lambda_\nu-\lambda_{\nu_{i-1}}}} \qquad (\nu_{i-1} \le \nu \le \nu_i).$$

Якщо діаграма Ньютона має півпряму L_{ν_n}, яка проведена з точки зображення P_{ν_n} вправо з кутовим коефіцієнтом $k = \ln R$, то

$$T_{\nu_n+k} = a_{\nu_n} R^{\lambda_{\nu_n}-\lambda_{\nu_n+k}} \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Т е о р е м а 1. Якщо показники ряду Діріхле задовольняють умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0,$$

то абсцису збіжності ряду Діріхле C можна визначити за формулою

$$C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln T_n}{\lambda_n}.$$

Доведення цієї теореми спирається на властивості мажоранти і діаграми Ньютона.

Розглянемо застосування мажорант і діаграм Ньютона рядів Діріхле для встановлення достатніх умов існування смуг, в яких ряди Діріхле не перетворюються в нуль.

Позначимо через $\mathcal{M} = \{\nu\}$ множину всіх індексів ν ряду Діріхле (1) та розглянемо довільну систему множин індексів

$\mathfrak{A} = \{\mathcal{M}_n\}$ $(n=0,1,2,\ldots,m;\infty)$, що задовольняє умови

1. $\mathcal{M}_n \in \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = 0$, якщо $i \neq j$;
3. $\bigcup_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_\infty = \mathcal{M}$;
4. $\mathcal{M}_2 \neq 0$;
5. $0 \in \mathcal{M}_\infty$.

Даній системі $\mathfrak{A}$ будемо ставити у відповідність класи $\mathfrak{D}_\kappa(\mathfrak{A})$ рядів Діріхле для кожного фіксованого $\kappa \in \mathfrak{M}_2$. Будемо вважати, що ряд Діріхле $f(z)$ належить до класу $\mathfrak{D}_\kappa(\mathfrak{A})$, якщо відхилення цього ряду задовольняють умови

$$D_\kappa > u_\kappa^2,$$

$$D_\nu \geq u_\kappa^{\tau_\nu}, \text{ де } \tau_\nu = n, \text{ якщо } \nu \in \mathfrak{M}_n \ (\nu \neq \kappa);$$

$$D_\nu = \infty, \text{ якщо } \nu \in \mathfrak{M}_\infty,$$

де u_κ – додатний корінь рівняння

$$H_\kappa(u) = -1 + \sum_{\nu=1}^{\kappa} u^{-(\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-\nu}) - \sum_{j=1}^{\nu-1}(\lambda_{\kappa-j} - \lambda_{\kappa-\nu})\tau_{\kappa-j}} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{-(\lambda_{\kappa+\nu} - \lambda_\kappa) - \sum_{j=1}^{\nu-1}(\lambda_{\kappa+\nu} - \lambda_{\kappa+j})\tau_{\kappa+j}} = 0.$$

Т е о р е м а 2. Нехай задана довільна система множин індексів $\mathfrak{A}$ і нехай для фіксованого індекса $\kappa \in \mathfrak{M}_2$ відповідне рівняння $H_\kappa(u) = 0$ має додатний корінь u_κ. Тоді кожний ряд Діріхле, який належить до класу $\mathfrak{D}_\kappa(\mathfrak{A})$, не перетворюється в нуль у смузі

$$-\ln \frac{R_{\kappa+1}}{u_\kappa} \leq Re(z) \leq -\ln R_\kappa u_\kappa.$$

Л і т е р а т у р а

1. А. Н. К о с т о в с ь к и й. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

2. А. І. К а р д а ш, О. М. К о с т о в с ь к и й, І. І. Ч у л и к. Мажоранта та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

--о--