здається довшою за діагональ AE меншого паралелограма, в той час як вони рівні. Аналогічну картину ми дістанемо, якщо порівняємо величини відрізків AB і BC (рис. 2,о), які нам здаються нерівними.

З наведених прикладів вже можна бачити, яке велике значення мають ілюзії в кресленні. При здійсненні геометричних побудов необхідно їх враховувати, щоб досягти якнайбільшої точності. Для цього при виконанні будь-якого креслення не треба покладатись на зорове враження і не вносити в нього ніяких виправлень "на око" без попередніх уважних вимірів. Щоб зменшити вплив ілюзії Поггендорфа на точність побудов рисунок треба виготовляти лініями однакової товщини. При визначенні точок перетином двох прямих треба перевіряти їх прямолінійність провіреною лінійкою та уникати перетину їх під дуже гострим кутом, пам'ятаючи, що ефект ілюзії обернено пропорціональний розмірам гострого кута перетину.

Література

1. С. Толанский. Оптические иллюзии. "Мир", М., 1967.
2. И. Д. Артамонов. Иллюзии зрения. "Наука", М., 1969.
3. Kazimierz Bartel. Perspektywa malarska, tom II, Warszawa, 1958.

—o—

УДК 511

О.М.ВВЕДЕНСЬКИЙ

ДУАЛЬНІСТЬ У ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД КВАЗІЛОКАЛЬНИМ ПОЛЕМ

Нехай k - квазілокальне поле (тобто повне дискретно нормоване поле з алгебраїчно замкненим полем лишків характеристики p ; далі з суто технічних міркувань $p>3$).

Метою цієї роботи є побудова аналога квазілокальної теорії полів класів мультиплікативної групи [1] для елептичних кривих.

Питання про побудову квазілокальної теорії дуальності для абелевих многовидів було поставлене І.Р.Шафаревичем в роботі [2], де фактично розв'язано випадок $q \neq p$ компонент (див. також у [3]).

1. Позначення. Вони в основному стандартні. $\mathcal{O}_k$ - кільце цілих, U_k - група одиниць, P - максимальний ідеал кільця цілих - все у полі k ; ℓ/k - скінченне розширення Галуа, $g = \mathcal{G}al(\ell/k)$; $\mathcal{O}_\ell$, U_ℓ - відповідні об'єкти для поля ℓ. Якщо X - g - модуль, то $\hat{H}^n(g, X)$ $(n \in \mathbb{Z})$ - тейтівські когомології.

Нехай A - еліптична крива над k, V - представник класу з групи $H^1(k, A)$ головних однорідних просторів над A. $m = \sum z_i$ (z_i - різні точки V) - дивізор на кривій V з сепарабельним носієм, раціональний над k. Через V/m позначимо звичайну [4] факторизацію $V \bmod m$. Якщо X - схема над $\mathcal{O}_k$, то $X_n = X \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_k/p^n$ $(n \in \mathbb{Z},\ n > 0)$. Якщо ж X - схема над схемою $\mathcal{Y}$, то $\underline{Pic}^{\circ}_{X/\mathcal{Y}}$ - зв'язна компонента схеми Пікара [5], якщо остання існує. Врешті, якщо X - проалгебраїчна група, то $\pi_1(X)$ - фундаментальна група групи X ; якщо X - проалгебраїчна група розмірності нуль, то X^* - її дуальна.

2. Аналог ізоморфізму взаємності. Нехай $\mathcal{M}(V)$ - мінімальна модель для V, тобто регулярна схема над $\mathcal{O}_k$, для якої $\mathcal{M}(V) \otimes_{\mathcal{O}_k} k = V$. Нескладне коректування міркувань дає існування деякої "мінімальної моделі" $\mathcal{M}(V/m)$ для V/m у відношенні до морфізму факторизації $V \longrightarrow V/m$ (див. [4]). Застосування до даної ситуації методики теореми існування відносних схем Пікара [5] визначає морфізм схем

$$\underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_k} \longrightarrow \underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_k}.$$

Нехай ℓ вибрано так, що $\ell \supset k(P_i)$ для всіх $P_i \in supp\, m$. Запишемо стандартно [4] ядра у стрічках комутативних діаграм

$$\begin{array}{ccc}\left(\underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_\ell}\right)_n & \longrightarrow & \left(\underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_\ell}\right)_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_\ell}\right)_{n+s} & \longrightarrow & \left(\underline{Pic}^{\circ}_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_\ell}\right)_{n+s}\end{array} .$$

Застосуємо до цих діаграм з ядрами функтор Грінберга, потім по одержаних діаграмах квазіалгебраїчних груп перейдемо до проективної границі і отримаємо точну послідовність проалгебраїчних груп

$$0 \longrightarrow U_\ell \longrightarrow H_\ell \longrightarrow F_\ell \longrightarrow A^{\circ}_\ell \longrightarrow 0 ,$$

де A°_ℓ - зв'язна компонента проалгебраїчної групи A_ℓ . Звідси маємо точну послідовність g -модулів

$$0 \longrightarrow \pi_1(U_\ell) \longrightarrow \pi_1(H_\ell) \longrightarrow \pi_1(F_\ell) \longrightarrow \pi_1(A^{\circ}_\ell) \longrightarrow 0 ,$$

яка визначає гомоморфізм

$$\delta_2(V,m) : \pi_1(A_k) \longrightarrow H^2(g, \pi_1(U_\ell)) \subset$$

$$\subset \lim_{\ell \to k_s} H^2(g, \pi_1(U_\ell)) \xrightarrow{\ \sim\ } Q/Z .$$

<u>Теорема I.</u> $\delta_2(V,m)$ залежить лише від класу головних однорідних просторів, у якому лежить V , і визначає, таким чином, відображення множин

$$H^1(k, A) \xrightarrow{\ \theta\ } \pi_1(A_k)^* ,$$

яке є ізоморфізмом відповідних групових структур.

Доведення теореми I - це доведення гомоморфності θ за допомогою Вейлівського означення добутку двох головних однорідних просторів і техніки, а також пряме обчислення аналога ізоморфізму взаємності для простих циклічних розширень у кривих трьох основних типів.

3. Уточнення аналога ізоморфізму взаємності – взаємодія фільтрації.

Задамо зростаючу фільтрацію у $\mathcal{H}^1(k,A)$ підгрупами ($n\in \mathbb{Z}$, $n>0$)

$(\mathcal{H}^1(k,A))^n =$ індуктивна границя $\mathcal{H}^1(g,A_\ell)$ по всіх ℓ/k таких, що $g^n=\{1\}$ (n-на підгрупа верхньої фільтрації у g – одинична).

Для кривих трьох основних типів нехай A_k° – зв'язана компонента A_k;

$A_k^n=\mathcal{T}_k^n$ – n-на підгрупа фільтрації Лютц підгрупи Лютц $\mathcal{T}_k=\mathcal{T}_k^1$ групи A_k для всіх $n\geq 1$. Аналогічно визначається фільтрація у групі A_k для довільної кривої A над k (потрібно використати $\mathcal{M}(A)$).

Нехай для $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$

$(\pi_1(A_k)^*)^n =$ група всіх характерів $\pi_1(A_k)$, які тривіальні на підгрупі $\pi_1(A_k^n)$.

Теорема 2. $\theta((\mathcal{H}^1(k,A))^n)\subset(\pi_1(A_k)^*)^n$ для всіх $n\in\mathbb{Z}, n\geq 0$.

4. Когомології вищих розмірностей.

Розглядаючи добуток g-модулів за Тейтом,

$$\mathcal{H}^1(\ell,A)\times\pi_1(A_\ell)\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

який визначено теоремою I, дістаємо:

Теорема 3. Існує добуток

$$\mathcal{H}^n(g,A^\ell)\times\mathcal{H}^{1-n}(g,\pi_1(A_\ell))\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

який встановлює дуальність за Понтрягіним груп-множників для всіх $n\in\mathbb{Z}$.

Доведення теорем 2 і 3 без особливих труднощів випливає з теореми I і обчислень.

Література

1. J. P. Serre. BSMF, 89, 1961.
2. И. Р. Шафаревич. Труды МИАН, 64, 1961.
3. A. P. Ogg. Ann. Math., 76, 1962.
4. Ж. П. Серр. Алгебраические группы и поля классов. М., 1968.
5. A. Grothendieck. Sem. Bourbaki, № 232, 236, 1961.