

У.А.МИШКОВЕЦЬ

ПОБУДОВА ОДНОГО КЛАСУ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Простір Q^2 майже періодичних функцій

Майже періодичні (м.п.) функції Степанова (S^p), Вейля (W^p), Безиковича (B^p) [1,2], Левітана [2,4] являють собою узагальнення м.п. функцій Бора [1,2,3] в сенсі узагальнення поняття майже періоду і, відповідно, в сенсі наближення тригонометричними сумами в більш загальних метриках.

Означення м.п. функцій Бора, Степанова, Вейля, Кованько і Левітана даються за допомогою поняття майже періоду у відповідних метриках. Для кожного з цих класів доводиться теорема про наближення такої функції тригонометричними сумами у відповідній метриці. В якомусь розумінні трактується теорема єдності та виводиться рівність Парозваля для $p = 2$.

О з н а ч е н н я 1. Функція $f(x)$ називається B^p -майже періодичною, якщо існує послідовність тригонометричних сум $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k x}$; ($n = 1, 2, \dots$), для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x) - S_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} = 0.$$

Означення і м.п. функцій Безиковича (B^p) за своїм характером відрізняються від означень м.п. функцій інших класів. Тут береться за означення те, що для інших класів є теоремою.

Число

$$\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1$$

називається нормою функції простору B^p .

В класі м.п. функцій Безиковича (B^2) справедлива теорема Рісса-Фішера.

Дамо означення одного класу м.п. функцій, яке ґрунтується на новій ідеї.

О з н а ч е н н я 2. Сукупність E вимірних локально інтегрованих комплексозначних функцій на дійсній прямій, для яких середнє значення

$$\mathcal{M}_t \{ f(x+t) \overline{g(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{g(t)} dt; \quad f(x), g(x) \in E$$

існує рівномірно для всіх $x \in (-\infty, \infty)$, назовемо простором Q^2 .

З властивостей м.п. функцій Бора випливає, що простір м.п. функцій Бора є підпростором простору Q^2 .

Під скалярним добутком в просторі Q^2 розуміємо число

$$(f, g) = \mathcal{M} \{ f(t) \overline{g(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Функція

$$R_f(x) = \mathcal{M}_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \quad (1)$$

називається згорток функції $f(x)$.

Число

$$\sqrt{R_f(0)} = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} = \|f\| < \infty \quad (2)$$

називається нормою функції $f(x)$.

Покажемо, що простір Q^2 є нормованим простором.

Справді, $\|f\| > 0$; $\|\alpha f(t)\| = |\alpha| \|f(t)\|$. Залишається показати,

що $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

При будь-якому фіксованому T будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t) + g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t) + g(t)] [\overline{f(t)} + \overline{g(t)}] dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt + \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt + 2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}] dt. \end{aligned}$$

З нерівності

$$|\operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}]| \leq |f(t) \overline{g(t)}|$$

і нерівності Коші-Буняковського

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

одержуємо

$$\left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}] dt \right\}^2 \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt.$$

Тому

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t) + g(t)|^2 dt \leq \left\{ \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt} \right\}^2.$$

При переході до границі, $T \rightarrow \infty$, одержуємо

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

При $\overline{g(t)} = e^{-i\lambda t}$ (λ - дійсне число) з означення 2 одержуємо

$$M\{f(x+t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t)e^{-i\lambda t} dt = A_f(\lambda)e^{i\lambda x}, \quad (3)$$

де

$$A_f(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)e^{-i\lambda t} dt. \quad (4)$$

Функції (3) будемо називати **компонентами** функції $f(x)$, а функції $e^{i\lambda x}$ — **базис** простору Q^* . Спектральну функцію (4) можна трактувати як числову "проекцію" функції $f(x)$ на базу $e^{i\lambda x}$. Природно називати функції простору Q^* **вектор-функціями**.

За допомогою періодичності Безельєра можна доводитися, що спектральна функція $A_f(\lambda)$ відрізняється від нуля не тільки як на основній частоті значень аргумента λ .

Сума компонент

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}; \quad A_f(\lambda_k) \neq 0$$

є рядом Фур'є функції $f(x)$.

Будь-якій функції $f(x) \in Q^*$ відповідає ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}.$$

Деяки, для зручності, будемо писати так:

$$f(x) \sim \sum_{\lambda} A_f(\lambda) e^{i\lambda x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}.$$

Тригонометричний многочлен $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k x}$ далі будемо записувати так: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$, бо $A_{\lambda_k}(\lambda) \neq 0$ лише для $\lambda = \lambda_k$, тому $A_k = A(\lambda_k)$.

Т е о р е м а 1. Спектральна функція $A_f(\lambda)$ задовольняє нерівність

$$|A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| \leq \sqrt{2} \|f\|,$$

де λ_0 - довільно фіксоване.

Теорема безпосередньо випливає з нерівності Буняковського-Шварца

$$\begin{aligned} |A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}] f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

та рівності

$$|e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 = 2[1 - \cos(\lambda - \lambda_0)x].$$

Н а о л і д о к. Якщо $A_f(\lambda) \neq 0$, то $\|f\| > 0$.

Якщо $\|f\| = 0$, то $A_f(\lambda) = 0$.

§ 2. Теорема єдності в просторі Q^2

Двом різним функціям $f(x)$, $g(x)$ відповідають різні ряди Фур'є тоді і лише тоді, коли відповідні їм спектральні функції не тотожні, тобто $A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

Т е о р е м а 2. (єдності). В просторі Q^2 умова

$$\|f - g\| > 0 \tag{5}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб $A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

Н е о б х і д н і о т ь. Позначимо через $A_h(\lambda)$ спектральну функцію різниці $f(x) - g(x) = h(x)$. Якщо $A_h(\lambda) = A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$, то з наслідку теореми 1 одержуємо, що $\|h\| = \|f - g\| > 0$.

Дочотати і сть. Доведемо, що з умови $\|h\| = \|f - g\| > 0$ випливатиме, що $A_h(\lambda) = A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

В просторі Q^2 оправедлива формула

$$\begin{aligned} A_{R_f}(\lambda) &= \mathcal{M} \left\{ R_f(x) e^{-i\lambda x} \right\} = \\ &= \mathcal{M}_x \left\{ \mathcal{M}_t \left\{ f(x+t) \overline{f(t)} \right\} e^{-i\lambda x} \right\} = \\ &= \mathcal{M}_t \left\{ \mathcal{M}_x \left\{ f(x+t) e^{-i\lambda x} \right\} \overline{f(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

і оскільки середнє, яке визначає функцію $R_f(x)$, існує рівномірно, то від перестановки порядку середніх результат не зміниться.

На підставі формули (6) одержуємо, що спектральна функція $A_{R_f}(\lambda)$, згортки функції $f(x)$, визначається через спектральну функцію $A_f(\lambda)$ так:

$$A_{R_f}(\lambda) = |A_f(\lambda)|^2.$$

Тому

$$R_f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Оскільки тригонометричний ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}$ збігається рівномірно, то

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}$$

є м.п. функція Бора. З теореми єдиності для таких функцій одержуємо

$$R_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}. \quad (7)$$



В частинному випадку, при $x = 0$, з формул (2) і (7) одержуємо рівність Парсонаса

$$R_p(0) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_p(\lambda_n)|^2.$$

Зручніше рівність Парсонаса доводиться до константи

$$R_p(0) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_p(\lambda_n)|^2 = \sum_{\lambda} |A_p(\lambda)|^2. \quad (8)$$

Вивчаючи через $R_h(x)$ зворотну різницю $f(x) - g(x) = h(x)$

$$\begin{aligned} R_h(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(x+t) \overline{h(t)} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x+t) \overline{f(t)} - g(x+t) \overline{f(t)} - f(x+t) \overline{g(t)} + g(x+t) \overline{g(t)}] dt. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (6), після деяких перетворень одержимо

$$R_h(\lambda) = |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2.$$

Тому

$$R_h(x) = \sum_{\lambda} |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}. \quad (9)$$

Рівність Парсонаса для різниці записується так:

$$R_h(0) = \|h\|^2 = \|f - g\|^2 = \sum_{\lambda} |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2. \quad (10)$$

З цієї формули і умови $\|f - g\| > 0$ одержуємо, що

$$A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0. \text{ Теорема доведена.}$$

Теорему єдиності в просторі Q^2 можна трактувати ще так: функція $f(x) \in Q^2$ однозначно визначається своїм рядом Фур'є лише з точністю до "нульової" функції $h(x)$ з нормою $\|h\| = 0$.

Іншими словами, во існує н.п. функції $f(x) \in Q^2$ з нор-

моє $\|f\| > 0$, яка була б ортогональна до всіх функцій тригонометричної системи

$$\{e^{i\lambda x}\}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty). \quad (II)$$

Це означає, що $A_f(\lambda) \neq 0$, якщо $\|f\| > 0$.

Цей факт можна виразити таким терміном: тригонометрична система (II) повна в класі м.п. функцій $f(x) \in Q^2$.

Спираючись на факт повноти, доводиться така теорема для простору Q^2 .

Т е о р е м а (Рісса-Фішера). Необхідною і достатньою умовою того, щоб довільно заданий тригонометричний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$ був рядом Фур'є деякої м.п. функції $f(x) \in Q^2$, є просто збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |A(\lambda_k)|^2$.

Відомо, що довільно заданий тригонометричний ряд, якщо навіть сума квадратів модулів його коефіцієнтів збігається, не завжди є рядом Фур'є м.п. функції $f(x) \in W^2$.

Клас м.п. функцій простору Q^2 є ширший класу м.п. функцій W^2 .

Простір Q^2 є гільбертовий простір: нормований (норма породжена скалярним добутком), повний.

Простір S^2 є підпростором простору Q^2 .

Л і т е р а т у р а

1. Г. Б о р. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1934.
2. Б. М. Л е в и т а н. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
3. Б. П. Д е м и д о в и ч. Лекции по математической теории устойчивости. "Наука", 1967.
4. Б. М. Л е в и т а н. Новое обобщение почти периодических функций. Записки Харьков. науч. иссл. ин-та мат. и мех., т. XV, 2, 1938.