УДК 513.015.6

С.В.ДЕНИСКО

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ПОВЕРХНІ $\sum$ ТА Δ -ПОВЕРХНІ

1. Нехай конгруенція C згинається в конгруенцію $\overset{*}{C}$. Якщо при цьому деяка лінійчаста поверхня конгруенції C еквівалентно відображається на відповідну лінійчасту поверхню конгруенції $\overset{*}{C}$, то ці поверхні називаються поверхнями $\sum$ [1].

Нехай другі квадратичні форми Куммера конгруенцій C, $\overset{*}{C}$ відповідно будуть [2] :

$$-\left[a(\omega_1^3)^2+(b+b')\omega_1^3\omega_2^3+c(\omega_2^3)^2\right];$$

$$-\left[\overset{*}{a}(\overset{*}{\omega}{}_1^3)^2+(\overset{*}{b}+\overset{*}{b}{}')\overset{*}{\omega}{}_1^3\overset{*}{\omega}{}_2^3+\overset{*}{c}(\overset{*}{\omega}{}_2^3)^2\right].$$

Притому вважаємо, що опорні поверхні конгруенцій C, $\overset{*}{C}$ є різними положеннями поверхні, яка здійснює згинання конгруенції C. Тоді диференціальні рівняння поверхонь $\sum$ запишуться таким чином:

$$\left.\begin{aligned}&(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2=(\overset{*}{\omega}{}_1^3)^2+(\overset{*}{\omega}{}_2^3)^2; \quad (a)\\ &a(\omega_1^3)^2+(b+b')\omega_1^3\omega_2^3+c(\omega_2^3)^2=\\ &=\overset{*}{a}(\overset{*}{\omega}{}_1^3)^2+(\overset{*}{b}+\overset{*}{b}{}')\overset{*}{\omega}{}_1^3\overset{*}{\omega}{}_2^3+\overset{*}{c}(\overset{*}{\omega}{}_2^3)^2. \quad (б)\end{aligned}\right\}$$

З цих рівнянь випливає така теорема.

Т е о р е м а 1. Для того щоб відповідні лінійчасті поверхні конгруенцій C, $\overset{*}{C}$ були поверхнями $\sum$, необхідно і достатньо, щоб

1) сферичні відображення цих поверхонь згинанням конгруенції C в конгруенцію $\overset{*}{C}$ ізометрично відображались одне на друге;

2) стрикційні лінії на цих поверхнях згинанням конгруенції C в конгруенцію $\overset{*}{C}$ відображались одна на другу.

Т е о р е м а 2. Якщо ізотропні конгруенції C, $\overset{*}{C}$ містять в собі поверхні Σ, то згинанням конгруенції C в конгруенцію $\overset{*}{C}$ середні поверхні цих конгруенцій відображаються одна на другу.

Д о в е д е н н я. В силу теореми I стрикційні лінії поверхонь Σ згинанням конгруенції C в конгруенцію $\overset{*}{C}$ відображаються одна на другу. Але стрикційні лінії всіх лінійчастих поверхонь ізотропної конгруенції проходять через центр променя [2]. Тому, оскільки середня поверхня конгруенції є поверхня, що складається з центрів променів, справедливе наше твердження.

2. Нехай в тривимірному евклідовому просторі задано поле вектора $\bar{v}$. Зв'язуємо з кожною точкою простору ортонормальний репер векторів $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ так, щоб вектор $\bar{e}_3$ був напрямним ортом вектора $\bar{v}$. Тоді для довільного елементарного переміщення одержуємо

$$\left.\begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}, \\ d\bar{e}_{k} &= \omega_{k}^{\alpha}\bar{e}_{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Введемо позначення:

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p, \quad \omega_1^3 = -\omega_3^1 = -q,$$
$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = r.$$

Оскільки форми ω^1, ω^2, ω^3 лінійно незалежні, то

$$p = p_{\alpha}\omega^{\alpha}, \quad q = q_{\alpha}\omega^{\alpha}, \quad r = r_{\alpha}\omega^{\alpha}. \tag{2}$$

Повертаємо в кожній точці простору вектор $\bar{v}$ на один і той же нескінченно малий кут φ. Будемо вважати, що вектор $\bar{e}_1$ вибрано в площині повертання вектора $\bar{v}$.

Лінійчасті поверхні поля, лінійний елемент яких в результаті повороту поля змінюється на нескінченно малу вище першого порядку мализни відносно кута φ, називаються поверхнями Δ, а криві, навколо яких здійснюється поворот твірних поверхонь Δ, - кривими δ [3], [4].

Для того щоб крива була кривою δ, необхідно і достатньо, щоб елементарне переміщення вздовж цієї кривої задовольняло умови

$$\left.\begin{aligned} &\omega^2 r - \omega^3 q = 0, \\ &p r = 0, \\ &\omega^1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

З третьої рівності системи (3) маємо таку теорему.

Т е о р е м а 1. Дотична до кривої δ міститься в площині, що проходить через вектор поля перпендикулярно до площини повороту.

Як видно з (3), існують тільки такі криві δ :

1) $r=0, \ q=0, \ \omega^1=0$;
2) $r=0, \ \omega^3=0, \ \omega^1=0$;
3) $p=0, \ \omega^2 r-\omega^3 q=0, \ \omega^1=0$,

які відповідно будемо називати кривими δ_1 , δ_2 , δ_3 . Поверхні $\triangle$, що відповідають кривим δ_1 , δ_2 , δ_3 , будемо називати поверхнями $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$.

В силу (2) рівняння кривих δ_1 , δ_2 , δ_3 записуються таким чином:

$$r_2\omega^2+r_3\omega^3=0, \quad q_2\omega^2+q_3\omega^3=0, \quad \omega^1=0; \qquad (4)$$

$$r_2\omega^2=0, \quad \omega^3=0, \quad \omega^1=0; \qquad (5)$$

$$p_2\omega^2+p_3\omega^3=0, \quad (\omega^2)^2 r_2+\omega^2\omega^3(r_3-q_2)-(\omega^3)^2 q_3=0, \quad \omega^1=0. \qquad (6)$$

Т е о р е м а 2. Для того щоб криві простору були кривими δ_1 , необхідно і достатньо, щоб вони були ортогональними траєкторіями поля сталого вектора $\bar{e}_1$.

Д о в е д е н н я. Нехай дана крива простору є кривою δ_1 . Тоді в силу (4_1), (4_2) з (1_2) маємо, що вектор $\bar{e}_1$ – сталий. Крім цього, з (4_3) та (1_1) виходить, що дана крива є ортогональною траєкторією поля вектора $\bar{e}_1$.

Очевидно і навпаки, якщо дана крива простору є ортогональною траєкторією поля сталого вектора $\bar{e}_1$, то вона є кривою δ_1 .

Т е о р е м а 3. Для того щоб криві простору були кривими δ_2, необхідно і достатньо, щоб вони були векторними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ і геодезичними лініями поля вектора $\bar{v}$.

Д о в е д е н н я. З (5) виходить, що криві простору є кривими δ_2 тоді і тільки тоді, коли вони є векторними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ і коли

$$r_2 = 0. \tag{7}$$

Оскільки умова (7) є необхідною і достатньою для того, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{e}_2$ були геодезичними лініями поля вектора $\bar{v}$ [5], то теорему доведено.

Т е о р е м а 4. Криві δ_2, δ_3 є асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$.

Д о в е д е н н я. Рівняння асимптотичних ліній поля вектора $\bar{e}_1$ записуються таким чином [5] :

$$\left.\begin{aligned} &r_2(\omega^2)^2+(r_3-q_2)\omega^2\omega^3-q_3(\omega^3)^2=0,\\ &\omega^1=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Звідси та з рівнянь (5), (6) виходить справедливість теореми.

Т е о р е м а 5. Для того щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_1, необхідно і достатньо, щоб вони були геодезичними лініями та лініями кривини поля вектора $\bar{e}_2$.

Д о в е д е н н я. Рівняння ліній кривини поля вектора $\bar{e}_2$ мають вигляд [5]

$$\left.\begin{aligned} &r_3(\omega^3)^2+(r_1+p_3)\omega^3\omega^1+p_1(\omega^1)^2=0,\\ &\omega^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

З рівнянь (4) маємо необхідні і достатні умови для того, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_1,

$$r_3=0, \quad q_3=0. \tag{10}$$

Але умова (10_2) є необхідною і достатньою, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були геодезичними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ [5], а умова (10_1), з огляду на (9), є необхідною і достатньою, щоб ці лінії були лініями кривини поля вектора $\bar{e}_2$.

Отже, теорему доведено.

Т е о р е м а 6. Для того щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_3 , необхідно і достатньо, щоб вони були асимптотичними лініями як поля вектора $\bar{e}_1$, так і поля вектора $\bar{e}_2$.

Д о в е д е н н я. З (6) видно, що векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ є лініями δ_3 тоді і тільки тоді, коли

$$p_3 = 0 , \quad q_3 = 0 . \tag{11}$$

Тому, якщо взяти до уваги (8), а також рівняння асимптотичних ліній поля вектора $\bar{e}_2$, переконуємось в справедливості теореми.

Т е о р е м а 7. Якщо асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$ невизначені, то і лінії δ_1 невизначені.

Д о в е д е н н я. Оскільки асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$ невизначені, то з системи (8) маємо

$$r_2 = 0 , \quad r_3 = q_2 , \quad q_3 = 0 .$$

Тому рівняння (4) набувають вигляду

$$q_2 \omega^3 = 0 , \quad q_2 \omega^2 = 0 , \quad \omega^1 = 0 ,$$

звідки $q_2 = 0$, що і доводить справедливість нашого твердження.

Л і т е р а т у р а

1. С. В. Д е н и с к о. Про один клас метричних згинань прямолінійної конгруенції. Доповіді АН УРСР, 3, 1965, 288-290.

2. С. П. Ф и н и к о в. Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.-Л., 1950.

3. С. В. Д е н и с к о. Об одном классе линейчатых поверхностей прямолинейной конгруэнции. Тезисы докладов Второй всесоюзной геометрической конференции, Харьков, 1964.

4. С. В. Д е н и с к о, О. І. П р и х о д ь к а. $\triangle$ -поверхні прямолінійної конгруенції. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

5. С. С. Б ю ш г е н с. Геометрия векторного поля. Известия АН СССР, 10, 1946, 73-96.

—o—

УДК 515.69

А.О.КОПИСТЯНСЬКИЙ

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОБУДОВ АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ

Згідно з теоремою Польке-Шварца, довільний чотирикутник є паралельною проекцією тетраедра, подібного заданому (рис. І). Ця узагальнююча

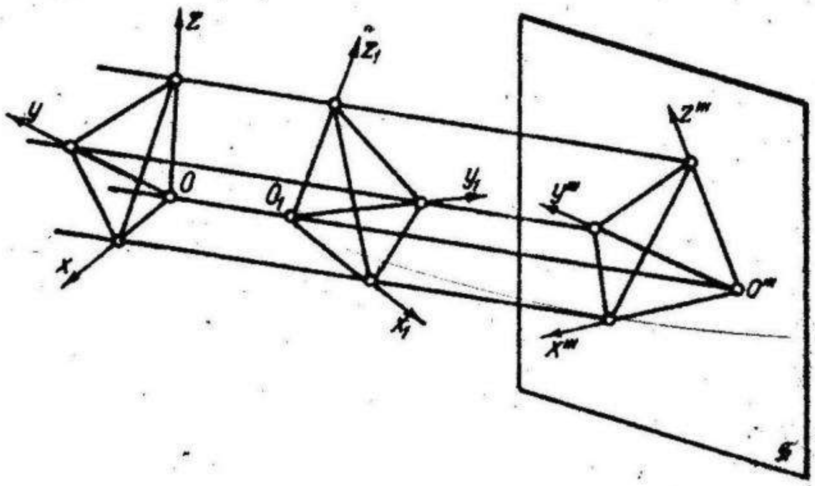

Рис. І.

основа, використана в побудові аксонометричних проекцій, зберігається тільки з певним наближенням точності до подібності.

Причини відхилень точності такі:

І. Перетворення побудов виконуються в графічній площині реальними інструментами.