3) дає змогу практично використати центральні аксонометричні проекції;

4) об'єднує два методи побудови в єдиний метод.

—о—

УДК 517.944:947

МАРІЯ Д. МАРТИНЕНКО

ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається задача про визначення розв'язку еліптичної системи рівнянь в частинних похідних другого порядку варіаційного типу від додатного визначеного функціоналу у тривимірному просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова за заданими на двох сторонах цієї поверхні граничними умовами типу Діріхле або типу Неймана.

I. Розглянемо еліптичну систему рівнянь другого порядку:

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(C_i'(x)u\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3}C_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+B_o u=0, \text{ [1]} \qquad (1)$$

де $B_{ji}'=B_{ij}$, $B_o=B_o'$ (штрихом позначено транспонування). Систему (I) запишемо у вигляді

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv A_o\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0, \qquad (2)$$

де $A_o\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - однорідний оператор другого порядку; $A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - оператор, що містить всі інші похідні, $x=(x_1,x_2,x_3)$.

Має місце така теорема.

Т е о р е м а. Нехай існує така додатна в E_3 функція $\mathcal{F}(x)$, що

[1] Система (1) - загальна система другого порядку варіаційного типу.

$$\iiint\limits_{\infty} \frac{dx}{\mathcal{F}(x)} < \infty \quad \text{та} \quad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i\alpha) - \ldots^{2} I)|}{[\mathcal{F}(x)]^{p} |\alpha|^{2p} + \lambda^{2p}} \geqslant \mu > 0 \tag{3}$$

для кожної точки $x \in E_3$ і для кожної дійсної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$; нехай p – достатньо велике додатне число. Якщо при цьому коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовані три рази в E_3, коефіцієнти при похідних порядку j (j = 0; 1) в операторі $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовані в E_3 j раз, причому коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ будуть порядку $O(\mathcal{F}(x))$; похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ та їх похідних до другого порядку ростуть не швидше, ніж $\mathcal{F}(x)$ при $|x| \to \infty$, а система (2) являє собою систему Ейлера від додатно визначеного функціоналу, тоді існує єдина фундаментальна матриця системи (1) в рімановому просторі з простою гладкою замкненою лінією галуження.

Доведення теореми проводиться за допомогою інтегральних рівнянь. Цей метод є узагальненням методу Д.П.Мельник відносно ріманового простору.

Далі вважаємо, що коефіцієнти системи (1) задовольняють умови сформульованої теореми.

2. Позначимо через S незамкнену поверхню типу Ляпунова, обмежену гладкою кривою $\mathcal{T}$, через R – дволистий рімановий простір з лінією галуження $\mathcal{T}$, а через $K(x, y)$ – фундаментальну матрицю системи (1) у дволистому рімановому просторі, лінією галуження є крива $\mathcal{T}$.

Розглянемо такі крайові задачі.

Задача типу Діріхле: визначити неперервно диференційований у всьому тривимірному просторі, два рази неперервно диференційований в просторі E_3 зовні поверхні S розв'язок системи (1), що зникає на безмежності та приймає на даній незамкненій поверхні S задані значення f_+ та f_- при наближенні до поверхні S по напрямку додатної та від'ємної нормалей відповідно. Тут f_+ та f_- - неперервні функції, визначені на S, які збігаються на контурі $\mathcal{T}$, що обмежує S.

Задача типу Неймана: визначити неперервно диференційований розв'язок системи в просторі E_3, що задовольняє на поверхні S умови

$$B(y,\tfrac{\partial}{\partial y})v(y)\Big|_{S_+}=f_+(y),\ \cdot B(y,\tfrac{\partial}{\partial y})v(y)\Big|_{S_-}=f_-(y), \tag{4}$$

де f_+ та f_- - задовольняють вказане вище припущення, а

$$B(y,\tfrac{\partial}{\partial y})=2\sum_{i,j=1}^{3}\widetilde{B}_{ij}(y)\nu_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}+\sum_{i=1}^{3}C_i'(y)\nu_i(y), \tag{5}$$

[2]

причому $\widetilde{B}_{ij}$ однозначно визначається із співвідношення

$$-2\sum_{i,j=1}^{3}\widetilde{B}_{ij}\nu_i\tau_j=Re\Big[\int_+ A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\Big]^{-1}\int_+\beta A_0^{-1}(\beta\nu+\tau)d\beta\sum_{i,j=1}^{3}(\widetilde{B}_{ij}+\widetilde{B}_{ji})\nu_i\nu_j, \tag{6}$$

[3]

де $\widetilde{B}_{ij}+\widetilde{B}_{ji}=2\widetilde{B}_{ij}$, $\widetilde{B}_{ij}=\widetilde{B}_{ji}'$, ν та τ - одиничні вектори; $(\tau,\nu)=0$, $\int_+(\ldots)d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому контуру, що охоплює β корені рівняння $\det A_0(\beta\nu+\tau)=0$ з додатними уявними частинами,

$$A_0(\alpha)=\sum_{i,j=1}^{3}B_{ij}\alpha_i\alpha_j,\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3).$$

Зобразимо розв'язок задачі типу Діріхле у вигляді

$$u(x)=\iint_S\mathcal{Y}^{(\nu)}(x,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S\mathcal{Y}^{(\nu)}(x,y_-)\mu_-(y)d_yS, \tag{7}$$

де

$$\mathcal{Y}(x,y)=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial K(x,y)}{\partial y_i}\widetilde{B}_{ij}\nu_j+\sum_{i=1}^{3}C_i(x)\nu_i(x)K(x,y), \tag{8}$$

---

2) Оператор $B(y,\frac{\partial}{\partial y})$ вперше був введений М.С.Волошиною [1].

3) Це співвідношення вперше введене М.С.Волошиною [1].

а $\mu_+(y)$ та $\mu_-(y)$ - невідомі густини, для визначення яких легко одержимо таку систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$\begin{gathered}\mu_+(x)+\iint_S \mathcal{G}^{(\nu)}(x_+,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S \mathcal{G}^{(\nu)}(x_+,y_-)\mu_-(y)d_yS=f_+(x), \\ -\mu_-(x)+\iint_S \mathcal{G}^{(\nu)}(x_-,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S \mathcal{G}^{(\nu)}(x_-,y_-)\mu_-(y)d_yS=f_-(x).\end{gathered} \tag{9}$$

Подамо розв'язок задачі типу Неймана у вигляді

$$v(x)=\iint_S K(x,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S K(x,y_-)\mu_-(y)d_yS\ , \tag{10}$$

де μ_+ , μ_- - невідомі густини, що визначаються з системи інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered}-\mu_+(x)+\iint_S B^{(\nu)}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x_+,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S B^{(\nu)}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x_+,y_-)\mu_-(y)d_yS= \\ =f_+(x); \\ \mu_-(x)+\iint_S B^{(\nu)}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x_-,y_+)\mu_+(y)d_yS+\iint_S B^{(\nu)}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)K(x_-,y_-)\mu_-(y)d_yS= \\ =f_-(x).\end{gathered} \tag{11}$$

Таке зображення розв'язку істотно спирається на те, що ядра відповідних інтегралів мають тільки точкову особливість в розглядуваному випадку [1] . Єдиність розв'язку сформульованих задач випливає з першої формули Гріна.

Дослідження резольвент систем (9), (11) показує, що всі полюси їх прості, дійсні та лежать зовні проміжку. Звідси випливає розв'язність систем (9) та (11) методом послідовних наближень.

Л і т е р а т у р а

1. М. С. В о л о ш и н а. Про деякі властивості одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. ДАН УРСР, № 10, 1958, 1033-1036.

2. Д. П. М е л ь н и к. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. ДАН УРСР, № 6, 1958.

3. М. М а р т и н е н к о і М. М а р т и н е н к о. Фундаментальні розв'язки еліптичних систем у рімановому просторі. ДАН УРСР, сер. А, 603, 1968.

—о—