УДК 517.512

Я.Г.ПРИТУЛА

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Нехай $f(x)$ - рівномірна майже періодична (р.м.п.) функція, спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$ [1] . Запишемо її ряд Фур'є в симетричній формі

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \qquad (1)$$

($\lambda_j > 0$ при $j>0$; $\lambda_{-j} = -\lambda_j$; $|A_j|+|A_{-j}|>0$; $\lambda_j \neq 0$; $\lambda_{j+1} < \lambda_j$ при $j>0$).

Для ряду (1) розглянемо такий ряд:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^p |j|^r . \qquad (2)$$

Нижче подаємо достатні умови збіжності ряду (2).

Розглянемо для р.м.п. функції $f(x)$ функцію

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t\delta} f(x-t)\,dt , \quad \delta > 0.$$

Легко показати, що $\mathcal{F}(x)$ є р.м.п. функція.

Нехай

$$\bar{\omega}_p(\delta, f) = \delta \left[M_x \left\{ \left| \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x-t)\,dt \right|^p \right\} \right]^{1/p}, \quad \delta > 0 .$$

Як побачимо, величина $\bar{\omega}_p(\delta, f)$ у випадку, якщо р.м.п. функція $f(x)$ має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$, є аналогом звичайного модуля неперервності для випадку $\lambda^* = \infty$.

Т е о р е м а І. Якщо для р.м.п. функції $f(x)$, спектр якої має точку згущення $\lambda^* = 0$, ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} \bar{\omega}_p^{\beta}(\lambda_{2^\nu}, f) \tag{3}$$

$$1<p\leq 2, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad 0<\beta<q, \quad \gamma>0$$

збігається, то і ряд (2) збігається.

Д о в е д е н н я. Запишемо ряд Фур'е функції $\mathcal{F}(x)$

$$\mathcal{F}(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\delta A_j}{\delta + i\lambda_j} e^{i\lambda_j x}.$$

Дійсно

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathcal{F}(x) e^{-i\lambda_j x} dx = M_x \{\mathcal{F}(x) e^{-i\lambda_j x}\} =$$

$$= M_x \left\{\delta \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x-t) dt \cdot e^{-i\lambda_j x}\right\} =$$

$$= \delta \int_0^{\infty} [M_x \{f(x-t) e^{-i\lambda_j x}\} e^{-\delta t}] dt =$$

$$= \delta A_j \int_0^{\infty} e^{-(\delta + i\lambda_j)t} dt = \frac{\delta A_j}{i\lambda_j + \delta}.$$

З нерівності Хаусдорфа-Юнга [4], доведення якої переноситься на випадок р.м.п. функцій повністю, одержуємо

$$\bar{\omega}_p(\delta, f) = \delta \left[M_x \left\{\left|\int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x-t) dt\right|^p\right\}\right]^{1/p} \geq \left[\delta^q \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\frac{A_j}{\delta + i\lambda_j}\right|^q\right]^{1/q}, \quad 1<p\leq 2. \tag{4}$$

Приймемо в (4) $\delta = \lambda_{2^{\nu-1}}$, одержимо

$$2^{-q/2} \sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^q < \bar{\omega}_p^q(\lambda_{2^{\nu-1}}, f). \tag{5}$$

Використавши нерівність Гельдера і нерівність (5), знаходимо

$$\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}|A_j|^\beta j^r \le \left\{\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}|A_j|^q\right\}^{\beta/q}\cdot\left\{\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} j^{r\frac{q}{q-\beta}}\right\}^{1-\beta/q} \le$$

$$\le 2^{\beta/2}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\cdot\left(2^{\nu r\frac{q}{q-\beta}}\cdot 2^{\nu-1}\right)^{\frac{q-\beta}{q}} =$$

$$= 2^{\beta/2}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\cdot 2^{\nu r+\frac{(\nu-1)(q-\beta)}{q}} =$$

$$= 2^{\beta/2+r}\cdot 2^{(\nu-1)(r+\frac{q-\beta}{q})}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\,.$$

Звідси маємо, що

$$\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}|A_j|^\beta j^r < C\,2^{(\nu-1)(r+\frac{q-\beta}{q})}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\,. \qquad (6)$$

Сумуємо нерівність (6) по ν і одержуємо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}|A_j|^\beta j^r < C\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{(\nu-1)(r+\frac{q-\beta}{q})}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)$$

або

$$\sum_{j=2}^{\infty}|A_j|^\beta j^r < C\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})}\,\bar\omega_p^{\,\beta}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\,. \qquad (7)$$

Враховуючи, що $\lambda_{-j} = -\lambda_j$, і прийнявши в (4) $\delta=|\lambda_{-2^{\nu-1}}|$, маємо

$$2^{-q/2}\sum_{j=-2^\nu}^{-2^{\nu-1}+1}|A_j|^q \le \bar\omega_p^{\,q}(|\lambda_{-2^{\nu-1}}|,f)=\bar\omega_p^{\,q}(\lambda_{2^{\nu-1}},f)\,.$$

Далі, подібно як вище, приходимо до нерівності

$$\sum_{j=-2}^{-\infty} |A_j|^{\beta} |j|^{r} < C \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})} \overline{\omega}_p^{\beta}(\lambda_{2^\nu}, f). \tag{8}$$

З нерівностей (7) і (8) випливає справедливість теореми 1.

Нехай $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ спектр р.м.п. функції. Введемо такі позначення:

$$B_n = \{j : 2^{-n-1} \le \lambda_j < 2^{-n}\};$$

$$B_{-n} = \{j : -2^{-n-1} \le \lambda_j < -2^{-n}\}; \tag{9}$$

$$J_n = \max_{j \in B_n} |j|; \qquad \mu(a) = \sum_{\lambda_j \ge a} 1.$$

Т е о р е м а 2. Якщо для р.м.п. функції $f(x)$, спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^{r} [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/q} \overline{\omega}_p^{\beta}(2^{-n}, f) \tag{10}$$

$$1 < p \le 2, \ 1/p + 1/q = 1, \ 0 < \beta < q, \ r > 0$$

збігається, то і ряд (2) збігається.

Д о в е д е н н я. З нерівності (4), прийнявши $\delta = 2^{-n}$, одержуємо

$$\sum_{j \in B_n} |A_j|^{q} < 2^{q/2} \overline{\omega}_p^{q}(2^{-n}, f). \tag{11}$$

Використовуючи нерівність Гельдера і (11), маємо

$$\sum_{j \in B_n} |A_j|^{\beta} j^{r} \le \Big\{\sum_{j \in B_n} |A_j|^{q}\Big\}^{\beta/q} \Big\{\sum_{j \in B_n} j^{r\frac{q}{q-\beta}}\Big\}^{1-\beta/q} \le$$

$$\le J_n^{r} [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/q} \cdot 2^{\beta/2} \overline{\omega}_p^{\beta}(2^{-n}, f).$$

Просумуємо одержану нерівність по n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} |A_j|^{\beta} j^{r} \le$$

$$\le 2^{\beta/2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n^{r} \left[\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})\right]^{1-\beta/q} \bar{\omega}_p^{\beta}(2^{-n}, f). \tag{12}$$

Дальше зауважимо, що $J_{-n} = J_n$ (це випливає з рівності $\lambda_{-j} = -\lambda_j$) і кількість елементів множин B_n і B_{-n} збігається. Тому одержимо, подібно як вище, нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_{-n}} |A_j|^{\beta} |j|^{r} \le$$

$$\le 2^{\beta/2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n^{r} \left[\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})\right]^{1-\beta/q} \bar{\omega}_p^{\beta}(2^{-n}, f). \tag{13}$$

З нерівностей (12) і (13) випливає твердження теореми.

Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє для деякого α $/0<\alpha\le 1/$ таку умову:

$$\left| \int_0^u f(x-t)\,dt \right| \le K |u|^{1-\alpha}. \tag{14}$$

Покажемо, що в цьому випадку

$$\bar{\omega}_p(\delta, f) \le N \delta^{\alpha}. \tag{15}$$

Дійсно, проінтегруємо по частинах внутрішній інтеграл у виразі для $\bar{\omega}_p(\delta, f)$. (Такі міркування є в роботі [2]).

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x-t)\,dt \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-\delta t} d\left(\int_0^{t} f(x-t_1)\,dt_1 \right) \right| =$$

$$=\left| e^{-\delta t}\int_0^t f(x-t_1)dt_1 \Big|_0^\infty + \delta\int_0^\infty e^{-\delta t}\left(\int_0^t f(x-t_1)dt_1\right)dt \right| \leq$$

$$\leq K\delta\int_0^\infty e^{-\delta t} t^{1-\alpha} dt = K\delta^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} dt =$$

$$= N\delta^{\alpha-1},$$

де

$$N = K\int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} dt .$$

Тепер уже легко побачити, що з умови (I4) випливає (I5).

З теорем I і 2 одержуємо:

Н а с л і д о к I. Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє умови (I4) і

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-\beta/q} (\lambda_n)^{\beta\alpha} < \infty , \tag{I6}$$

тоді ряд (2) збігається.

Дійсно, з умови (I4) випливає (I5), а тому

$$\sum_{\nu=1}^\infty 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})} \bar{\omega}_p^\beta(\lambda_{2^\nu}, f) \leq N\sum_{\nu=1}^\infty 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})} (\lambda_{2^\nu})^{\beta\alpha}$$

Збіжність ряду в правій частині нерівності еквівалентна збіжності ряду (I6) внаслідок монотонності послідовності $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$.

Н а с л і д о к 2. Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє умови (I4) і

$$\sum_{n=1}^\infty J_n^r \left[\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})\right]^{1-\beta/q} \cdot 2^{-n\alpha} < \infty ,$$

тоді ряд (2) збігається.

Доведення очевидне.

Прийнявши в (15) $\gamma = 0,\ \beta = 1,\ p = 2,\ \lambda_n = O(1/n)$, одержимо, що при $\alpha > 1/2$ ряд Фур'є збігається абсолютно. Цей результат одержано як наслідок також в роботі [2], де вивчаються умови абсолютної збіжності рядів Фур'є р.м.п. функцій.

2. Нехай $f(x)$ - майже періодична функція Безіковича (B^p - м.п. функція) [1], спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = \infty$. Її ряд Фур'є запишемо в симетричній формі

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \tag{17}$$

$$(\lambda_j > 0,\ \lambda_{j+1} > \lambda_j \ \text{при}\ j > 0;\ \lambda_{-j} = -\lambda_j;\ |A_j| + |A_{-j}| > 0).$$

Нехай

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \le \delta} \left[M_x \left\{ |f(x+h) - f(x)|^p \right\} \right]^{1/p}.$$

Наведемо одну теорему про збіжність ряду

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^\beta |j|^\gamma. \tag{18}$$

Умови збіжності ряду (18) вивчаються і в роботі [3].

Т е о р е м а 3. Якщо для B^p - м.п. функції $f(x)$ $(1 < p \le 2)$, спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = \infty$, ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{2^\nu}/\lambda_{2^{\nu-1}})^\beta \omega_p^\beta (1/\lambda_{2^\nu}, f)\, 2^{\nu(\gamma + \frac{q-\beta}{q})} \tag{19}$$

$$0 < \beta < q,\ \gamma > 0$$

збігається, тоді і ряд (18) збігається.

Д о в е д е н н я. Легко побачити, що

$$f(x+h) - f(x-h) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j\, i \sin h\lambda_j\, e^{i\lambda_j x}.$$

З нерівності Хаусдорфа-Юнга маємо:

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^q |\sin h\lambda_j|^q \right]^{1/q} \le \left[M_x \left\{ |f(x+h) - f(x-h)|^p \right\} \right]^{1/p}. \tag{20}$$

Прийнявши в (20) $h = 1/2\lambda_{2^\nu}$, одержуємо

$$|\sin \lambda_{2^{\nu-1}}/2\lambda_{2^\nu}|^q \sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^q \le \omega_p^q (1/\lambda_{2^\nu}, f);$$

враховуючи нерівність

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x , \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 ,$$

приходимо до нерівності

$$\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^q \le (\pi\lambda_{2^\nu}/\lambda_{2^{\nu-1}})^q \omega_p^q (1/\lambda_{2^\nu}, f). \tag{21}$$

Використовуючи нерівність Гельдера і (21), маємо

$$\sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^\beta j^r \le \left\{ \sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^q \right\}^{\beta/q} \cdot \left\{ \sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} j^{r\frac{q}{q-\beta}} \right\}^{1-\beta/q} \le$$

$$\le C(\lambda_{2^\nu}/\lambda_{2^{\nu-1}})^\beta \cdot 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})} \omega_p^\beta (1/\lambda_{2^\nu}, f).$$

Далі доведення проводиться аналогічно теоремі I.

Аналог теореми 2 для випадку, коли B^p – м.п. функція має єдину точку згущення $\lambda^* = \infty$, наведений в роботі [3] .

Використовуючи теорему I з роботи [5] , можна одержати з теорем I, 2, 3 твердження відносно абсолютної сумовності по Чезаро від'ємного порядку рядів Фур'є м.п. функцій (I), (I7).

Література

1. Б. М. Левитан. Почти периодические функции. М., 1953.

2. Н. П. Купцов. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Мат. сборник, т. 40 (82), № 2, 1956.

3. J. Musielak. On absolute convergence of Fourier series of some almost periodic functions. Ann.polon.math, VI, № 2, 1959.

4. F. Hausdorf. Eine Ausdehnung des Parsevalsehen Satzes uber Fourier reihen. Math. Zeitschrift, 16, 1929.

5. G. Sunouchi. On the absolute summability of Fourier series. J. Math. Japan, v. 1, № 2, 1949.

—o—

УДК 517.946

М.І.ІВАНЧОВ

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

В необмеженій області Ω n-вимірного евклідового простору, що лежить зовні поверхні S, розглянемо рівняння еліптичного типу

$$Lu \equiv a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x) \tag{1}$$

з обмеженими коефіцієнтами і правою частиною, що належить до класу $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Для рівняння (1) задамо граничну умову

$$u(x)\big|_S = \varphi(x). \tag{2}$$

Відомо [1], що коли $f(x) \equiv 0$, то задача Діріхле для рівняння (1) завжди має обмежений розв'язок при $a(x) \le 0$. Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то вимоги, які потрібно накласти на $f(x)$ для існування обмеженого розв'язку, істотно залежать від поведінки $a(x)$ при великих $|x|$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. У випадку, коли $a(x) \le -m^2 < 0$, $m = const$, від правої ча-