Л і т е р а т у р а

1. Б. М. Л е в и т а н. Почти периодические функции. М., 1953.
2. Н. П. К у п ц о в. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Мат. сборник, т. 40 (82), № 2, 1956.
3. J. M u s i e l a k. On absolute convergence of Fourier series of some almost periodic functions. Ann.polon.math, VI, № 2, 1959.
4. F. H a u s d o r f. Eine Ausdehnung des Parsevalsehen Satzes uber Fourier reihen. Math. Zeitschrift, 16, 1929.
5. G. S u n o u c h i. On the absolute summability of Fourier series. J. Math. Japan, v. 1, № 2, 1949.

—o—

УДК 517.946

М.І.ІВАНЧОВ

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

В необмеженій області Ω n-вимірного евклідового простору, що лежить зовні поверхні S, розглянемо рівняння еліптичного типу

$$Lu = a_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + a_i(x)\,u_{x_i} + a(x)\,u = f(x) \tag{1}$$

з обмеженими коефіцієнтами і правою частиною, що належить до класу $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Для рівняння (1) задамо граничну умову

$$u(x)\big|_S = \varphi(x). \tag{2}$$

Відомо [1], що коли $f(x) \equiv 0$, то задача Діріхле для рівняння (1) завжди має обмежений розв'язок при $a(x) < 0$. Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то вимоги, які потрібно накласти на $f(x)$ для існування обмеженого розв'язку, істотно залежать від поведінки $a(x)$ при великих $|x|$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. У випадку, коли $a(x) \leq -m^2 < 0$, $m = const$, від правої частини рівняння (I) досить вимагати обмеженості для того, щоб існував обмежений розв'язок задачі Діріхле для рівняння (I) [2]. Якщо ж коефіцієнт $a(x)$ прямує до нуля при $|x|\to\infty$, то для існування обмеженого розв'язку задачі (I)-(2) від $f(x)$ теж потрібно вимагати прямування до нуля з деякою швидкістю. Дійсно, розглянемо рівняння

$$\Delta u-\frac{n-2+\varepsilon}{|x|^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{1}{|x|^\varepsilon}u=-1 \tag{3}$$

у випадку центральної симетрії, тобто $u=u(r)$, $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Тоді для знаходження невідомої функції $u(x)$ одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$\Delta u-\frac{n-2+\varepsilon}{|x|^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{1}{|x|^\varepsilon}u=-1, \tag{4}$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u(r)=C_1\varphi_1(r)+C_2\varphi_2(r)+r^\varepsilon,$$

де $\{\varphi_1(r),\varphi_2(r)\}$ – фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння. Легко бачити, що при довільних значеннях постійних C_1 і C_2 цей розв'язок буде необмежено зростати при $r\to\infty$. А це й означає, що в даному випадку рівняння (3) не має жодного обмеженого розв'язку.

Наведемо достатню умову існування обмеженого розв'язку задачі Діріхле для рівняння (I) у випадку, коли $a(x)\le-\frac{c}{\tau(x)}$, де $\tau(x)>0$ – деяка необмежена зростаюча функція.

Т е о р е м а I. Нехай коефіцієнти і права частина рівняння (I) обмежені і належать до класу $C_{0,\alpha}(\bar\Omega)$, гранична функція $\varphi(x)$ в умови (2) належить до класу $C_{2,\alpha}(S)$ і, крім того,

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2.$$

Якщо $a(x)\le-\frac{c}{\tau(x)}$, то для існування обмеженого розв'язку задачі (I)-(2) з класу $C_{2,\alpha}(\bar\Omega)$ досить вимагати, щоб права частина рівняння (I) задовольняла умову $|f(x)|\le\frac{c_1}{\tau(x)}$.

Доведення опирається на таку теорему [I] :

Т е о р е м а 2. Якщо коефіцієнти і права частина рівняння (I) і гранична функція $\varphi(x)$ неперервні і обмежені в $\bar{\Omega}$ і, крім того, $a_{ij}\xi_i\xi_j>0$, то необхідною і достатньою умовою розв'язності задачі (I)-(2) в класі $C(\bar{\Omega})\cap C_2(\Omega)$ є існування пари обмежених функцій $\bar{\omega}(x)$ і $\underline{\omega}(x)$ в класу $C_2(\bar{\Omega})$, таких, що

$$L\bar{\omega}(x)\leq f(x)\leq L\underline{\omega}(x).$$

Д о в е д е н н я т е о р е м и I. Легко бачити, що в ролі функції $\bar{\omega}(x)$ досить взяти $\frac{c_1}{c}$, а $\underline{\omega}(x)$ можна прийняти рівною $-\frac{c_1}{c}$. Звідси випливає справедливість теореми I.

Твердження теорем I і 2 легко переносяться на випадок необмежених областей з нескінченними границями.

Л і т е р а т у р а

I. N. M e y e r s, J. S e r r i n. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. Journal of Mathematics, 9, N 4, 1960, 513-538.

2. T. K u s a n o. On bounded solutions of exterior boundary value problems for linear and quasilinear elliptic differential equations. Japanese Mathematical Journal, 9, 1965, 536-562.