УДК 539.337

МЕХАНІКА

Д.В.ГРИЛИЦЬКИЙ, Б.Г.ШЕЛЕСТОВСЬКИЙ

ТИСК ГАРЯЧОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПІВПРОСТІР

Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск гарячого кільцевого штампа на ізотропний півпростір при однорідних умовах для температури на границі розглянута Ф.Н.Бородачовою [I] .

В нашій праці розглядається задача про тиск гарячого кільцевого штампа з плоскою основою на трансверсально-ізотропний півпростір при мішаних умовах для температури на границі півпростору. При розв'язуванні задачі використано метод, запропонований З.Олесяк [2] . За допомогою інтегрального перетворення Ханкеля задача зводиться до розгляду парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких знаходиться за формулою обернення Б.Нобл [3] . Для двох розглянутих нижче випадків наводимо формули, для нормальних контактних напружень під штампом на поверхні півпростору та співвідношення, які встановлюють залежність між стискуючою силою, яка діє на штамп, температурою і зміщенням штампа.

I. Розв'язок осесиметричної температурної задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла за допомогою функцій напружень в циліндричній системі координат дав А.Синг [4] :

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \nabla_1^2 \Phi,$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\left(K_{11}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right), \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z};$$

$$u = -{}_1a_2\left(k_{11}^2\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right),$$

$$w = -{}_1a_2\left(k_{12}^2\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right); \qquad (1.2)$$

$$\nabla_1^2\Phi + k_{22}^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - cT\right),$$

$$\nabla_1^2\Psi + k_{21}^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = a_1^{(1)}T. \qquad (1.3)$$

Температура задовольняє рівняння теплопровідності

$$\nabla_1^2 T + L^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \qquad \left(\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Нами використані позначення праці [4], що дає можливість на цьому не зупинятися.

Якщо на границі півпростору задані температура $T(r)$ і нормальне напруження $\sigma_{zz}(r)$ при відсутності дотичного, то, застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля ([5], [6]) до вищенаведених співвідношень, одержимо формули, які пов'язують переміщення точок границі півпростору з нормальними напруженнями і температурою на границі,

$$W(r,0) = \frac{{}_1a_2}{h_2(k_{21}-k_{22})}\int_0^\infty\Big[\bar{\sigma}(\xi) + \frac{N(L-k_{22})+Mh_2(k_{22}-k_{21})}{L}\bar{T}(\xi)\Big]J_0(\xi r)\,d\xi; \qquad (1.4)$$

$$u(r,0) = {}_1a_2\int_0^\infty\Big[\frac{k_{11}^2h_2(k_{22}-k_{21})+k_{21}}{h_2(k_{21}-k_{22})}\bar{\sigma}(\xi) + \frac{N(L-k_{22})k_{21}+Mh_2(k_{22}-k_{21})L}{Lh_2(k_{21}-k_{22})}\bar{T}(\xi)\Big]J_1(\xi r)\,d\xi. \qquad (1.5)$$

Якщо ввести позначення

$$c_0 = \frac{h_2(K_{22} - K_{21})}{{}_1a_2}; \qquad K_0 = \frac{N(L - K_{22}) + Mh_2(K_{22} - K_{21})}{L},$$

то формула (1.4) набуває вигляду

$$-c_0^* w(r,0) = \int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) + K_0 \bar{T}(\xi)] J_0(\xi r) d\xi. \qquad (1.6)$$

2. Розглядаємо круговий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю Oz циліндричної системи координат. Штамп втискується в трансверсально-ізотропний півпростір $z \geq 0$ під дією сили P, яка направлена вздовж осі симетрії. Границя півпростору зовні і всередині штампа не завантажена, сили тертя між штампом і півпростором відсутні. Площина, яка обмежує штамп, має задану температуру, і тому, вважаючи тепловий контакт штампа з півпростором досконалим, температуру поверхні півпростору в межах площадки контакту будемо вважати рівною температурі поверхні штампа. Температура поверхні півпростору всередині штампа рівна нулеві, а за штампом поверхня півпростору теплоізольована.

Потрібно знайти розподіл нормальних контактних напружень під штампом.

Граничні умови задачі при $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{zz}(r,0) = 0,\ T(r,0) = 0, \quad 0 < r < b; \qquad &&w(r,0) = \delta,\ T(r,0) = T_0, \quad b < r < a; \qquad (2.1)\\ &\sigma_{zz}(r,0) = 0,\ \frac{\partial T}{\partial z}(r,0) = 0, \quad r > a; &&\sigma_{rz}(r,0) = 0, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned}$$

Знайдемо температуру поверхні півпростору для $r > a$. Розв'язок рівняння теплопровідності беремо у вигляді

$$T(r,z) = \int_0^\infty c(\lambda) e^{-\frac{\lambda z}{L}} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad z \geq 0.$$

Функція $C(\alpha)$ знаходиться, задовольняючи граничні умови для температури,

$$\int_0^\infty C(\alpha) J_0(\alpha r)\,d\alpha = \begin{cases} 0, & 0<r<b, \\ T_0, & b<r<a, \end{cases} \tag{2.2}$$
$$\int_0^\infty \alpha C(\alpha) J_0(\alpha r)\,d\alpha = 0, \quad r>a.$$

Застосовуючи формулу обернення [5] до парних рівнянь (2.2), знаходимо функцію $C(\alpha)$:

$$C(\alpha) = \frac{2}{\pi} a^2 T_0 \int_{b/a}^{1} \frac{x\cos(a\alpha x)}{\sqrt{a^2x^2 - b^2}}\,dx;$$

$$T(r,0) = \int_0^\infty C(\alpha) J_0(\alpha r)\,d\alpha = \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{r^2-b^2}}, \quad r>a.$$

Розглянемо спочатку задачу з такими граничними умовами:

$$\begin{aligned} &w(r,0) = \delta, && & &\sigma_{zz}(r,0) = 0, & & \\ & && 0<r<a; & & & & r>a, \\ &T(r,0) = T_1, && & &\frac{\partial T}{\partial z}(r,0) = 0, & & \\ &\sigma_{rz}(r,0) = 0, && 0<r<\infty; & & & & \end{aligned} \tag{2.3}$$

де

$$T_1 = \begin{cases} 0, & 0<r<b, \\ T_0, & b<r<a. \end{cases}$$

Подібно як і в праці [7], формулу (1.6) запишемо у вигляді

$$-\alpha c_0 w(a\rho) = \int_0^\infty \bar{\bar{\sigma}}\left(\frac{p}{a}\right) J_0(p\rho)\,dp + \frac{2K_0 T_0 a^3}{\pi} \times$$
$$\times \int_{b/a}^{1} \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2t^2-b^2}} \left\{ \int_0^1 \frac{\cos pt\, J_0(p\rho) - 1}{p}\,dp + \int_1^\infty \frac{\cos pt\, J_0(p\rho)}{p}\,dp \right\}. \tag{2.4}$$

Задовольняючи граничні умови (2.3), використовуючи при цьому співвідношення (2.4) і теорему обернення для перетворення Ханкеля, приходимо до парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \bar{\bar{\sigma}}\left(\frac{p}{a}\right) J_0(p\rho)\,dp + \frac{2K_0 T_0}{\pi} a^3 \int_{b/a}^{1} \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2t^2-b^2}} \left\{ \int_1^\infty \frac{\cos pt\, J_0(p\rho)\,dp}{p} \right. +$$

$$+\int_0^1 \frac{\cos pt\, J_0(p\rho)-1}{p}\,dp\Big\} = ac_0 W(a\rho),\quad 0<\rho<1,$$

$$\int_0^\infty p\bar{\sigma}\left(\frac{p}{a}\right)J_0(p\rho)\,dp + \frac{2k_0T_0a^3}{\pi}\int_{b/a}^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{a^2t^2-b^2}}\int_0^\infty \cos pt\, J_0(p\rho)\,dp = \tag{2.5}$$

$$= \frac{2k_0T_0a^2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2\rho^2-b^2}},$$

Функцію $\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{r^2-b^2}}$ апроксимуємо виразом

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{r}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\frac{a^3}{r^3},\qquad r>a.$$

Застосовуючи формулу обернення для парних інтегральних рівнянь (2.5), а також теорему обернення для перетворення Ханкеля, одержимо співвідношення для визначення контактних напружень під штампом

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -\frac{2c_0\delta}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} - k_0T_1 - \frac{4}{\pi^2}k_0T_0\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{\ln 2}{\sqrt{a^2-r^2}} -$$
$$-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\pi a}\right)k_0T_0\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}+\frac{a\sqrt{a^2-r^2}}{r^2}-\right. \tag{2.6}$$
$$\left.-\frac{\pi a^3}{r^3}+\frac{a^3}{r^3}\arccos\frac{r}{a}\right\},\qquad 0<r<a.$$

Щоб зняти напруження на поверхні півпростору в межах $0<r<b$, накладемо на розв'язок задачі (2.3) розв'язок іншої задачі з такими граничними умовами:

$$\sigma_{zz}(r,0) = -\sigma_{zz}^{(1)},\quad 0<r<b,\quad W(r,0)=0,\quad r>b;$$
$$\sigma_{rz}(r,0)=0,\quad 0<r<\infty. \tag{2.7}$$

Розв'язуючи задачу (2.7) за вищезгаданою схемою, одержимо формулу для визначення нормальних напружень на границі півпростору для значень $r > b$.

В результаті накладання напружених станів (2.3) і (2.7) отримаємо формулу для нормальних контактних напружень під штампом. Роблячи заміну $\rho = \frac{r}{a}$ і позначаючи $\ell = \frac{b}{a}$, знаходимо

$$\sigma_{zz}(\rho,0) = -\frac{2c_0\delta}{\pi a\sqrt{1-\rho^2}} - \left(\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} + \frac{4}{\pi^3}\sqrt{1-\ell^2}\,k_0 T_0 \ln 2\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\ell^2}}\ln\frac{1+\ell}{1-\ell} - \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\arcsin\frac{\rho^2+\ell}{\rho(1+\ell)} - \arcsin\frac{\rho^2-\ell}{\rho(1-\ell)}\right)\right] -$$

$$-k_0 T_0 - \frac{4k_0 T\sqrt{1-\ell^2}\ln 2}{\pi^2\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\ell^2}\right)k_0 T_0\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2} - \frac{\pi}{2\rho^3} + \frac{1}{\rho^3}\arccos\rho\right] + \Phi(\rho), \qquad \ell<\rho<1;$$

$$\sigma_{zz}(\rho,0) = -\left(\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} + \frac{4}{\pi^3}\sqrt{1-\ell^2}\,k_0 T_0\ln 2\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\ell^2}}\ln\frac{1+\ell}{1-\ell} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}\ln\frac{\left(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\ell^2)}+\rho^2+\ell\right)(1-\ell)}{\left(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\ell^2)}+\rho^2-\ell\right)(1-\ell)}\right] + \Phi(\rho), \quad \rho>1,$$

де

$$\Phi(\rho) = \frac{4}{\pi^2}\left(1-2\sqrt{1-\ell^2}\right)k_0 T_0\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\rho^2+\frac{15}{56}\rho^4\right)\arcsin\frac{\ell}{\rho} -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}\ell+\frac{1}{5}\ell^3+\frac{1}{7}\ell^5\right)\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\ell^2}} - \left(\frac{3}{10}\ell+\frac{5}{28}\ell^3+\frac{15}{56}\ell\rho^2\right)\sqrt{\rho^2-\ell^2}\right].$$

Напруження σ_{zz} для $\rho>1$ вказує на похибку, яку ми допускаємо при такому наближеному розв'язуванні задачі. Відносна похибка при $\ell \le 0{,}7$ не перевищує 7%.

Встановимо залежність між силою P, температурою T_0 і зміщенням штампа δ

$$P = -2\pi \int_b^a \sigma_{zz}(r,0)\, r\, dr,$$

$$P = a\left\{\frac{4c_0\delta}{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{8c_0\delta}{\pi}\arcsin\sqrt{1-\varepsilon^2}\right\} + J;$$

$$J = k_0 T_0 a^2\left\{(1-\varepsilon^2)\pi + \frac{8\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\pi^2}\ln 2\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left. + 2\arcsin\sqrt{1-\varepsilon^2}\right] + 4\left(1-\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\arccos\varepsilon\right) +$$

$$+\frac{8}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}\right)\left[0{,}23927\arcsin\varepsilon - \left(\frac{1}{6}\varepsilon+\frac{1}{8}\varepsilon^3+\frac{1}{12}\varepsilon^5\right)\sqrt{1-\varepsilon^2} + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{8}\varepsilon+\frac{5}{28}\varepsilon^3\right)\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3} - \frac{17}{336}\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon^2)^5} - \frac{\pi}{12}\varepsilon^2 -$$

$$\left.\left. - \frac{3\pi}{80}\varepsilon^4 - \frac{5\pi}{224}\varepsilon^6\right]\right\}.$$

3. Розглянемо осесиметричну контактну задачу термопружності для трансверсально-ізотропного півпростору при таких умовах на границі:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{zz}(r,0)=0, & & w(r,0)=\delta, \\ \frac{\partial T}{\partial t}(r,0)=0, & 0<r<b; & T(r,0)=T_0, \quad b<r<a; \\ & & \sigma_{zz}(r,0)=0, \\ \sigma_{rz}(r,0)=0, & 0<r<\infty; & T(r,0)=0, \quad r>a; \end{array} \qquad (3.1)$$

Температура поверхні півпростору для $0<r<b$ визначається за формулою

$$T(r,0) = \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Як і в попередньому випадку, розв'язок цієї задачі знайдемо шляхом накладання розв'язків таких двох задач:

$$w(r,0)=\delta,\quad 0<r<a;\quad \sigma_{zz}(r,0)=0,\quad r>a;$$
$$T(r,0)=0,\quad 0<r<\infty;\quad \sigma_{rz}(r,0)=0,\quad 0<r<\infty. \tag{3.2}$$

Розв'язок задачі з граничними умовами (3.2) відомий. Для нормальних напружень під штампом маємо формулу

$$\sigma_{zz}^{(1)}=-\frac{2c_0\delta}{\pi\sqrt{a^2-r^2}},\qquad 0<r<a. \tag{3.3}$$

Другий напружений стан відповідає таким умовам при $z=0$:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}(r,0)=-\sigma_{zz}^{(1)}, && && \\
& && 0<r<b; && w(r,0)=0,\quad r>b,\\
&\frac{\partial T}{\partial z}(r,0)=0, && && T(r,0)=T_0,\ b<r<a;\\
&T(r,0)=0, && r>a; && \sigma_{rz}(r,0)=0,\ 0<r<\infty.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Задовольняючи граничні умови (3.4), приходимо до парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \xi\left[\bar{\sigma}(\xi)+k_0\bar{T}(\xi)\right]J_0(\xi r)\,d\xi=\frac{2c_0\delta}{\pi\sqrt{a^2-r^2}}+$$
$$+\frac{2k_0T_0}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}},\quad 0<r<b; \tag{3.5}$$

$$\int_0^\infty \left[\bar{\sigma}(\xi)+k_0\bar{T}(\xi)\right]J_0(\xi r)\,d\xi=0,\qquad r>b.$$

Функцію $\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-r^2}}$ на $0<r<b$ апроксимуємо виразом

$$c_1^0+c_2^0r^2+c_3^0r^4,$$

де

$$c_1^0=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

$$c_2^0 = \frac{32}{3\pi b^2} \arcsin \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}} - \frac{10}{\pi b^2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{1}{3b^2},$$

$$c_3^0 = \frac{8}{\pi b^4} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{32}{3\pi b^4} \arcsin \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}} + \frac{4}{3b^4}.$$

Застосувавши формулу обернення для парних інтегральних рівнянь, а також теорему обернення інтегрального перетворення Ханкеля, одержимо співвідношення для визначення нормальних напружень на границі півпростору для значень $r > b$.

Накладаючи напружені стани (3.2) та (3.4), одержимо формулу для визначення контактних напружень під кільцевим штампом. Зробивши заміну $\rho = \frac{r}{a}$ і ввівши позначення

$$c_1^0 = c_1, \quad c_2^0 = \frac{c_2}{b^2}, \quad c_3^0 = \frac{c_3}{b^4}, \quad \varepsilon = \frac{l}{a},$$

знаходимо

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0\delta}{\pi a\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} \ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}} +$$

$$+ \frac{2c_0\delta}{\pi^2 a\sqrt{1-\rho^2}} \left[\arcsin\frac{\rho^2+\varepsilon}{\rho(1+\varepsilon)} - \arcsin\frac{\rho^2-\varepsilon}{\rho(1-\varepsilon)}\right] - K_0 T_0 +$$

$$+ \frac{2}{\pi} K_0 T_0 \left[\left(c_1 + c_2\frac{\rho^2}{\varepsilon^2} + c_3\frac{\rho^4}{\varepsilon^4}\right) \arcsin\frac{\varepsilon}{\rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{(15c_1 - 5c_2 - 2c_3)\varepsilon^4 + (15c_2 - 5c_3)\varepsilon^2\rho^2 + 15c_3\rho^4}{15\varepsilon^3\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}}\right], \quad \varepsilon < \rho < 1;$$

$$\sigma_{zz}(\rho,0) = -\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\ell^2}}\ln\frac{1+\ell}{1-\ell} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{\left(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\ell^2)}+\rho^2+\ell\right)(1-\ell)}{\left(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\ell^2)}+\rho^2-\ell\right)(1+\ell)}\right) + \frac{2}{\pi}K_0T_0\left[\left(c_1+c_2\frac{\rho^2}{\ell^2}+c_3\frac{\rho^4}{\ell^4}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\arcsin\frac{\ell}{\rho} - \frac{(15c_1-5c_2-2c_3)\ell^4+(15c_2-5c_3)\ell^2\rho^2+15c_3\rho^4}{15\ell^3\sqrt{\rho^2-\ell^2}}\right],\quad \rho>1.$$

Як і в першому випадку, напруження σ_{zz} для $\rho>1$ вказує на похибку розв'язку. Відносна похибка не перевищує 7% при $\ell<0,7$.

Зв'язок між силою P, переміщенням δ і температурою T_0 штампа дається за формулою

$$P = a\left[\frac{4c_0\delta}{\pi}\sqrt{1-\ell^2}\ln\frac{1+\ell}{1-\ell} + \frac{8c_0\delta}{\pi}\arcsin\sqrt{1-\ell^2}\right]+J;$$

$$J = K_0T_0a^2\left\{(1-\ell^2)\pi - 4\left[\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{4\ell^2}+\frac{c_3}{6\ell^4}\right)\arcsin\ell -\right.\right.$$

$$-(30c_1+25c_2+22c_3)\frac{\ell\sqrt{1-\ell^2}}{60} - (16c_3+9c_2)\frac{\sqrt{(1-\ell^2)^3}}{36\ell} -$$

$$\left.\left.-\frac{\sqrt{(1-\ell^2)^5}}{6\ell^3} - \frac{\pi\ell^2}{4}\left(c_1+\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}\right)\right]\right\}.$$

Нами знайдені також формули для визначення нормальних переміщень граничних точок півпростору, але для скорочення викладу тут їх не наводимо.

На рис. І і 2 показано розподіл нормальних контактних напружень під штампом, відповідно у першому і другому випадках при ℓ = 0,2.

$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{\pi a^2 \sigma_{zz}^{(P)}}{P}$ – напруження, які викликані отискуючою силою P;

$\sigma_{zz}^{(2)} = \frac{\sigma_{zz}^{(T)}}{K_0 T_0}$ – напруження, які викликані температурою T_0.

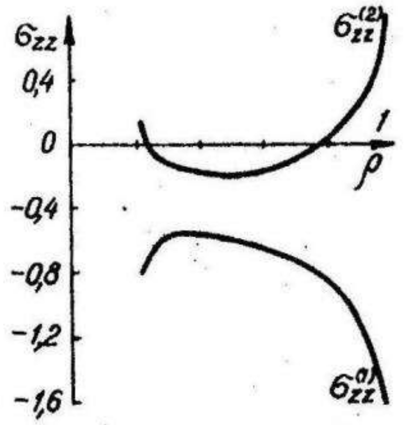

Рис. I.

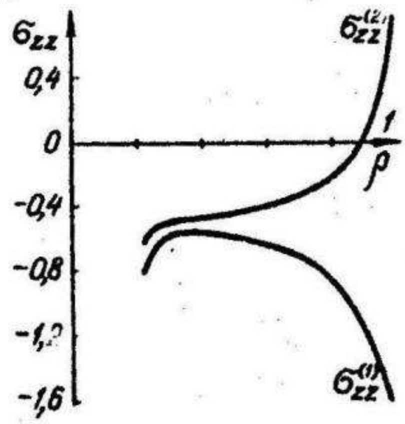

Рис. 2.

В таблиці подано значення коефіцієнтів K_0, C_0 для деяких матеріалів

Матеріал	Магній	Пісковик	Ізотропний магній
$C_0\left(\frac{кг}{см^2}\right)$	$2{,}523 \cdot 10^5$	$1{,}957 \cdot 10^5$	$2{,}283 \cdot 10^5$
$K_0\left(\frac{кг}{°C\,см^2}\right)$	8,42	8,50	8,18

Для ізотропного матеріалу коефіцієнти K_0 та C_0 набирають значення

$$C_0 = \frac{G}{1-\nu}; \quad K_0 = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} G,$$

де G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; α – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Л і т е р а т у р а

1. Ф. Н. Б о р о д а ч е в а. Термоупругая контактная задача для кольцевого штампа. Сб. "Некоторые задачи прочности и устойчивости плоских и пространственных систем", Приволжское кн. изд-во, Саратов, 1966.

2. Z. O l e s i a k. Annular Punch on Elastic Semispace, Arch. Mech. Stosow; vol. 17, N 4, 1965.

3. B. N o b l e. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 59, N 2, 1963.

4. A. S i n g h. Axisymmetrical Thermal Stresses in Transversaly Geotropic Bodies, Arch. Mech. Stosow., vol. 12, N 3, 1960.

5. И. С н е д д о н. Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.

6. Я. С. У ф л я н д. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Л., 1967.

7. Mahalanalis Ranjiz Kumars. A mixid boundary values problem of thermoelasticity for a halfspace, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 20, N 1, 1967.

—o—

УДК 539

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.П.ВУШКО

КРУГОВЕ ЕКСЦЕНТРИЧНЕ КІЛЬЦЕ З ПІДСИЛЕНИМ ВНУТРІШНІМ КРАЄМ

Розглянемо пластинку, обмежену двома неконцентричними колами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ радіусів r_1 и r_2' ($r_2' > r_1$). Нехай для означеності внутрішній край пластинки $\mathcal{L}_1$ підсилений пружним кільцем (стержнем) сталого перерізу, а до зовнішнього краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладені напруження N_2 и T_2 (N_2 , T_2 - нормальна і дотична складові заданих напружень).