Л і т е р а т у р а

I. Ф. Н. Б о р о д а ч е в а. Термоупругая контактная задача для кольцевого штампа. Сб. "Некоторые задачи прочности и устойчивости плоских и пространственных систем", Приволжское кн. изд-во, Саратов, 1966.

2. Z. O l e s i a k. Annular Punch on Elastic Semispace, Arch. Mech. Stosow; vol. 17. N 4, 1965.

3. B. N o b l e. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 59, N 2, 1963.

4. A. S i n g h. Axisymmetrical Thermal Stresses in Transversaly Geotropic Bodies, Arch. Mech. Stosow., vol. 12, N 3, 1960.

5. И. С н е д д о н. Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.

6. Я. С. У ф л я н д. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Л., 1967.

7. Mahalanalis Ranjiz Kumars. A mixid boundary values problem of thermoelasticity for a halfspace, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 20, N 1, 1967.

—o—

УДК 539

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.П.ВУШКО

КРУГОВЕ ЕКСЦЕНТРИЧНЕ КІЛЬЦЕ З ПІДСИЛЕНИМ ВНУТРІШНІМ КРАЄМ

Розглянемо пластинку, обмежену двома неконцентричними колами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ радіусів r_1 и r_2' ($r_2' > r_1$). Нехай для означеності внутрішній край пластинки $\mathcal{L}_1$ підсилений пружним кільцем (стержнем) сталого перерізу, а до зовнішнього краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладені напруження N_2 и T_2 (N_2 , T_2 - нормальна і дотична складові заданих напружень).

Вважається, що зовнішні зусилля, прикладені до пластинки, задовольняють умови статики. Для одержання контурних умов розглядуваної задачі в думці відкинемо кільце, а дію його на пластинку замінимо контактними напруженнями $N_1^{(i)}$ і $T_1^{(i)}$ або переміщеннями u_1, v_1 точок контура L_1. Розглядаючи окремо першу і змішану основні крайові задачі для пластини, обмеженої контуром $L = L_1 + L_2$, на підставі [1,2] маємо

$$\int_{L_2} \varphi_1(t)\overline{F_1(t)}dt - \varkappa\int_{L_1} \varphi_1(t)\overline{F_1(t)}dt - \int_{L} \overline{\varphi_1(t)}F_2'(t)d\bar{t} = \tag{1}$$

$$= \int_{L_2}(N_2 + iT_2)\overline{F_1(t)}dt - 2\mu\int_{L_1}\overline{F_1(t)}d(u_1 + iv_1);$$

$$\int_{L}\varphi_1(t)\overline{F_1(t)}dt - \int_{L}\overline{\varphi_1(t)}\,\overline{F_1'(t)}t\,d\bar{t} = \int_{L_2}(N_2 + iT_2)\overline{F_1(t)}dt + \tag{2}$$

$$+\int_{L_1}(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)})\overline{F_1(t)}dt;$$

$$\int_{L}\overline{\Psi_1(t)}F_1(t)d\bar{t} = \int_{L}\overline{\varphi_1(t)}F_1'(t)t\,dt + \int_{L_2}(N_2 + iT_2)F_1(t)dt + \tag{3}$$

$$+\int_{L_1}(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)})F_1(t)dt;$$

$$\int_{L}\overline{\Psi_1(t)}F_1(t)d\bar{t} = (\varkappa + 1)\int_{L_1}\varphi_1(t)F_1(t)dt + \int_{L}\overline{\varphi_1(t)}F_1'(t)t\,dt + \tag{4}$$

$$+\int_{L_2}(N_2 + iT_2)F_1(t)dt - 2\mu\int_{L_1}F_1(t)d(u_1 + iv_1).$$

Віднімаючи з рівності (4) рівність (3), одержимо

$$(1+\varkappa)\int_{L_1}\varphi_1(t)F_1(t)dt = \int_{L_1}(N_1^{(i)} + iT_1^{(i)})F_1(t)dt + 2\mu\int_{L_1}F_1(t)d(u_1 + iv_1). \tag{5}$$

Тут t – афікс точки контура $\mathcal{L}$; μ – модуль зсуву; $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ – для плоского напруженого стану; $\Phi_1(t) = \varphi_1'(t)$, $\Psi_1(t) = \psi_1'(t)$ – комплексні потенціали [3] ; $F_1(x)$ – довільна голоморфна функція в області пластинки.

Напружено-деформований стан підсилювального кільця описується рівнянням малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Тому залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня $\mathcal{L}_1$, спаяного з пластинкою, відносним подовженням його волокна $\mathcal{L}_o$, нейтрального для чистого згину стержня, й кутом повороту поперечного перерізу θ можемо подати, згідно з [4] , такою формулою:

$$d(u_1 + i v_1) = \left[\frac{z_o}{z_1} e_o + (z_1 - z_o) t \frac{d\theta}{dt} + i\theta\right] dt , \qquad (6)$$

де z_o – радіус кривини нейтральної для чистого згину лінії $\mathcal{L}_o$, яка зміщена від осі стержня до центра її кривини на величину η_c . З рівнянь рівноваги елемента стержня, з врахуванням його розмірів [4] і закону Гука [5]

$$V_\tau = g e_o , \quad M = g \eta_c z_1 t \frac{d\theta}{dt} , \qquad (7)$$

одержуємо

$$(N_1^{(i)} + i T_1^{(i)}) dt = \pm \frac{1}{2h} d\left[\dot{t}(V_n + i V_\tau)\right] + \frac{h^*}{h} \frac{z_2}{z_1} (N_1 + T_1) dt , \qquad (8)$$

де

$$\dot{t}(V_n + i V_\tau) = \frac{d}{dt}\left[g(z_o - z_1) e_o + g \eta_c z_1 t \frac{d\theta}{dt}\right] + i g e_o t \pm$$
$$\pm 2h^*(z_2 - z_1) \frac{z_2}{z_1} \dot{t} T_1 . \qquad (9)$$

Верхній знак береться при $z_1 < z_o$; нижній – при $z_1 > z_o$. Тут позначено: V_n і V_τ – поперечна і поздовжня складові головного вектора; $M = M_c + \eta_c V_\tau$ – головний момент внутрішніх зусиль в довільному перерізі стержня; N_1, T_1 - зовнішні напруження, прикладені до стержня; $2h$ - товщина пластинки; $2h^*$ - товщина стержня; r_1 і r_2 - радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під r_1 будемо розуміти радіус кривини того крайового волокна L, вздовж якого стержень спаяний з пластинкою; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$.

Далі розглядувану область, зайняту пластинкою, конформно відобразимо на кільце, що міститься між конце ричними колами γ_1 й γ_2 радіусів ρ_1 й ρ_2 площини ζ, прийнявши [3]

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1-a\zeta}, \quad \rho_1 \le \rho \le \rho_2 < \frac{1}{a}. \tag{10}$$

Внесемо вирази (6) і (8) в (1)-(5) та проведемо потрібні перетворення; одержимо в області ζ при відсутності навантаження на кільце ($N_1 = 0$, $T = 0$) такі крайові умови задачі ($r_1 > r_0$):

$$\int_{\gamma}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma - \int_{\gamma}\overline{\Phi(\sigma)}\overline{F'(\sigma)}\omega(\sigma)d\bar{\sigma} = \frac{g}{2h}\int_{\gamma_1} e_0\overline{F'(\sigma)}\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}d\bar{\sigma} -$$
$$- \frac{g}{2h}\int_{\gamma_1}\left[(r_0 - r_1)e_0 + i\frac{r_c r_1\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{d\sigma}\right]d\left\{\frac{\overline{F'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right\} + \int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma; \tag{11}$$

$$\int_{\gamma_2}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma - \varkappa\int_{\gamma_1}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma - \int_{\gamma}\overline{\Phi(\sigma)}\overline{F'(\sigma)}\omega(\sigma)d\bar{\sigma} =$$
$$= 2\mu\int_{\gamma_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1 - r_0)\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{dt} + i\theta\right]\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma + \int_{\gamma_2}(N_2 + iT_2)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma; \tag{12}$$

$$(1+\varkappa)\int_{\gamma_1}\Phi(\sigma)\overline{F(\sigma)}\omega'(\sigma)d\sigma = 2\mu\int_{\gamma_1}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + i\frac{(r_1 - r_0)\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{dt} + i\theta\right]F(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma -$$
$$- \frac{g}{2h}\int_{\gamma_1}e_0F'(\sigma)\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}d\sigma + \frac{g}{2h}\int_{\gamma_1}\left[(r_0 - r_1)e_0 + i\frac{r_c r_1\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{d\sigma}\right]d\left\{\frac{F'(\sigma)\sigma^2}{\rho_1^2\omega'(\sigma)}\right\}; \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Gamma}\overline{\Psi(\sigma)}F(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=(\varkappa+1)\int\limits_{\Gamma_1}\Phi(\sigma)F(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma+\int\limits_{\Gamma}\overline{\Phi(\sigma)}F'(\sigma)\omega(\sigma)d\sigma-$$

$$-2\mu\int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{z_0}{z_1}e_0+i\frac{(z_1-z_0)\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{d\sigma}+i\theta\right]F(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma+\int\limits_{\Gamma_2}(N_2+iT_2)F(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma. \tag{14}$$

Тут σ - афікс точки контура $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$;

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1[\omega(\zeta)];\ \Psi(\zeta)=\Psi_1[\omega(\zeta)];\ F(\zeta)=F_1[\omega(\zeta)]. \tag{15}$$

При обході контура $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ область повинна залишатися зліва. До системи контурних умов (11)-(14) необхідно долучити умову однозначності переміщень (6)

$$\int\limits_{\Gamma_1}\left[\frac{z_0}{z_1}e_0+i\frac{(z_1+z_0)\sigma}{\rho_1|\omega'(\sigma)|}\frac{d\theta}{d\sigma}+i\theta\right]\omega'(\sigma)d\sigma=0. \tag{16}$$

Функції (15), голоморфні в кільці $\rho_1<|\zeta|<\rho_2$, розвинемо у ряди Лорана:

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta)&=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\zeta^k+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\zeta^{-k};\\ \Psi(\zeta)&=\sum_{k=0}^{\infty}A_k'\zeta^k+\sum_{k=1}^{\infty}B_k'\zeta^{-k};\\ F(\zeta)&=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\zeta^{-n}.\end{aligned} \tag{17}$$

Величини e_0 і θ, що описують деформацію кільця, а також навантаження N_2+iT_2, подамо у формі комплексних рядів Фур'є

$$\begin{aligned}e_0&=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sigma^k+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_1^{2k}\bar{\alpha}_k\sigma^{-k};\\ \theta&=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\sigma^k+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_1^{2k}\bar{\beta}_k\sigma^{-k};\\ N_2+iT_2&=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k^{(2)}\sigma^k+\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^{(2)}\sigma^{-k}.\end{aligned} \tag{18}$$

Внесемо розклади (17), (18) і вираз (10) у крайові умови (11)-(13). Після вичислення контурних інтегралів з врахуванням довільності функції $F'(\zeta)$, дістанемо таку нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_κ, B_κ, α_κ і β_κ :

$$
\begin{aligned}
&(\rho_2^{2n}-\rho_1^{2n})\Big[\sum_{\kappa=0}^{n-1}(n-\kappa)a^{-\kappa}A_\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(n+\kappa)a^{\kappa}B_\kappa\Big]- \\
&-n\Big[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\rho_2^{2(n+\kappa)}-\rho_1^{2(n+\kappa)})a^{\kappa}\bar{A}_\kappa+\sum_{\kappa=1}^{n-1}(\rho_2^{2(n-\kappa)}-\rho_1^{2(n-\kappa)})a^{-\kappa}\bar{B}_\kappa\Big]= \\
&=-\frac{g}{2h}n\rho_1^{2n-1}\Big[\sum_{\kappa=0}^{n-1}a^{-\kappa}(1-a^2\rho_1^2)\alpha_\kappa-a^{-n+2}\rho_1^2\alpha_n+\sum_{\kappa=1}^{\infty}a^{\kappa}\rho_1^{2\kappa}(1-a^2\rho_1^2)\bar{\alpha}_\kappa\Big]+ \\
&+\frac{g}{2a^{n-1}h}(z_0-z_1)n\rho_1^{2(n-1)}\Big[(1-n)\alpha_{n-1}+2na\rho_1^2\alpha_n-(n+1)a^2\rho_1^4\alpha_{n+1}\Big]+ \qquad (19) \\
&+\frac{gi}{2a^{n-1}h}\eta_c z_1 n\rho_1^{2n-3}\Big\{a(n-1)(n-2)\beta_{n-2}-(n-1)\big[(n-1)+(3n-1)a^2\rho_1^2\big]\beta_{n-1}+ \\
&+na\rho_1^2\big[(3n-1)+(3n+1)a^2\rho_1^2\big]\beta_n-(n+1)a^2\rho_1^4\big[(3n+1)+(n+1)a^2\rho_1^2\big]\beta_{n+1}+ \\
&+(n+1)(n+2)a^3\rho_1^6\beta_{n+2}\Big\}+\rho_2^{2n}\Big[\sum_{\kappa=0}^{n-1}\gamma_\kappa^{(2)}(n-\kappa)a^{-\kappa}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(n+\kappa)a^{\kappa}\delta_\kappa^{(2)}\Big]
\end{aligned}
$$

$$(n=0,1,2,\dots);$$

$$
\begin{aligned}
&(\rho_2^{-2n}-\rho_1^{-2n})\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}(\kappa-n)a^{\kappa}B_\kappa+n\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\big[\rho_2^{2(\kappa-n)}-\rho_1^{2(\kappa-n)}\big]a^{\kappa}\bar{A}_\kappa= \\
&=\frac{g}{2h}n\rho_1^{-2n-1}\Big[\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\rho_1^{2\kappa}a^{\kappa}\bar{\alpha}_\kappa-a^2\rho_1^2\sum_{\kappa=n}^{\infty}\rho_1^{2\kappa}a^{\kappa}\bar{\alpha}_\kappa\Big]-
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{g}{2h}a^{n+1}(\tau_0-\tau_1)n\left[(n-1)a^2\bar{\lambda}_{n-1}-2na\bar{\lambda}_n+(n+1)\bar{\lambda}_{n+1}\right]- \tag{20}
$$

$$
-\frac{ig}{2h}a^{n+1}\eta_c\tau_1\rho_1^{-1}n\left\{a^3(n-1)(n-2)\bar{\beta}_{n-2}-(n-1)a^2\left[(3n-1)+(n-1)a^2\rho_1^2\right]\bar{\beta}_{n-1}+\right.
$$

$$
+na\left[(3n-1)a^2\rho_1^2+(3n+1)\right]\bar{\beta}_n-(n+1)\left[(3n+1)a^2\rho_1^2+(n+1)\right]\bar{\beta}_{n+1}+
$$

$$
\left.+a\rho_1^2(n+1)(n+2)\bar{\beta}_{n+2}\right\}+\rho_2^{-2n}\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}(\kappa-n)a^{\kappa}\delta_{\kappa}^{(2)}
$$

$$
(n=1,2,3,\dots);
$$

$$
(\rho_2^{2n}+\varkappa\rho_1^{2n})\left[\sum_{\kappa=0}^{n-1}(n-\kappa)a^{-\kappa}A_{\kappa}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(n+\kappa)a^{\kappa}B_{\kappa}\right]-
$$

$$
-n\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\rho_2^{2(n+\kappa)}-\rho_1^{2(n+\kappa)}\right)a^{\kappa}\bar{A}_{\kappa}+\sum_{\kappa=1}^{n-1}\left(\rho_2^{2(n-\kappa)}-\rho_1^{2(n-\kappa)}\right)a^{-\kappa}\bar{B}_{\kappa}\right]=
$$

$$
=2\mu\rho_1^{2n}\frac{\tau_0}{\tau_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{n-1}(n-\kappa)a^{-\kappa}\lambda_{\kappa}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\rho_1^{2\kappa}(n+\kappa)a^{\kappa}\bar{\lambda}_{\kappa}\right]+ \tag{21}
$$

$$
+2\mu\rho_1^{2n}i\left\{n\beta_0+\sum_{\kappa=1}^{n-1}a^{-\kappa}\left[n-\kappa+\kappa(\tau_1-\tau_0)\rho_1^{-1}(1-a^2\rho_1^2)\right]\beta_{\kappa}-\right.
$$

$$
\left.-(\tau_1-\tau_0)\rho_1 n a^{2-n}\beta_n\right\}+2\mu\rho_1^{2n}i\sum_{\kappa=1}^{\infty}\rho_1^{2\kappa}a^{\kappa}\left[n+\kappa+\kappa(\tau_1-\tau_0)\rho_1^{-1}(a^2\rho_1^2-1)\right]\bar{\beta}_{\kappa}+
$$

$$
+\rho_2^{2n}\left[\sum_{\kappa=0}^{n-1}(n-\kappa)a^{-\kappa}\gamma_{\kappa}^{(2)}+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(n+\kappa)a^{\kappa}\delta_{\kappa}^{(2)}\right]
$$

$$
(n=0,1,2,3,\dots);
$$

$$\left(\rho_2^{-2n} + \text{æ}\rho_1^{-2n}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-n)a^k B_k + n\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k\left(\rho_2^{2(k-n)} - \rho_1^{2(k-n)}\right)A_k =$$

$$= 2\mu\rho_1^{-2n}\frac{r_0}{r_1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_1^{2k}(k-n)a^k\bar{\alpha}_k + 2\mu\rho_1^{-2n} i\left\{a^{n+2}(r_1-r_0)\rho_1^{2n+1} n\bar{\beta}_n + \right. \qquad (22)$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_1^{2k}\left[(k-n)a^k + a^k(r_1-r_0)\rho_1^{-1}k(a^2\rho_1^2-1)\right]\bar{\beta}_k\right\} + \rho_2^{-2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\delta_k^{(2)}(k-n)a^k$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

До системи рівнянь (I9)-(22) потрібно долучити умову однозначності переміщень (I6)

$$\frac{r_0}{r_1}\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_1^{2k}a^{k-1}\bar{\alpha}_k + i\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_1^{2k}a^{k-1}\left\{1+(r_1-r_0)\rho_1^{-1}\left[a^2\rho_1^2-1\right]\right\}\bar{\beta}_k = 0 \qquad (23)$$

та умову голоморфності функції $\varphi(\zeta)$ (кільце вільне від зовнішнього навантаження)

$$\sum_{k=1}^{\infty}k a^{k-1}B_k = 0. \qquad (24)$$

Функція напружень $\psi(\zeta)$ визначається з контурної умови (I4). Для кільця прямокутного перерізу з розмірами $2h^* \times b$

$$g = 2h^* E^* b, \quad \gamma = \frac{h^*}{h}, \quad F = 2h^* b, \quad \delta = \frac{b}{r_1};$$

$$\eta_c \cong \frac{\delta}{6(2-\delta)}\cdot b; \quad r_1 - r_0 \cong \frac{b}{2}\left(1 + \frac{\delta}{3(2-\delta)}\right);$$

$$\eta_c r_1 \cong \frac{1}{6(2-\delta)}\cdot b^2; \quad \frac{r_0}{r_1} \cong 1 - \frac{1}{2}\delta\left(1 + \frac{\delta}{3(2-\delta)}\right);$$

b - ширина кільця в площині його кривини.

Для числового прикладу візьмемо мідну пластину і стальне кільце прямокутного перерізу при таких значеннях пружних сталих матеріалу і геометричних параметрів:

$\mu = 4,42 \cdot 10^5\ кг/см^2$; $æ = 2,08$; $E^* = 2,1 \cdot 10^6\ кг/см^2$;

$\frac{r_1'}{r_1} = \frac{r_1'}{e} = 3$; $r = 1$; $\delta = 0,2$; $r_2' = 1$.

До зовнішнього краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладений рівномірний тиск інтенсивності p_2. Розв'язувалась укорочена система одержаних рівнянь (22) порядку на ЕОЦМ "Минск-22".

Нижче наведені числові значення кільцевих напружень σ_θ в пластинці і σ – в кільці в окремих точках вздовж лінії спаю.

θ	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0
σ_θ / p_2	-1,42	-1,48	-1,59	-1,70	-1,73	-1,71	-1,69
σ / p_2	-2,75	-2,94	-3,12	-3,27	-3,36	-3,32	-3,26
$\sigma_\theta^{(0)} / p_2$	-2,20	-2,26	-2,40	-2,52	-2,56	-2,54	-2,52

Через $\sigma_\theta^{(0)}$ позначено напруження в пластинці при відсутності кільця. Нормальні напруження в перерізі кільця вичислялися за формулою

$$\sigma = \frac{V_r}{F} \cdot \frac{r_0}{r} + \frac{M}{F\eta_c}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right),$$

де r – радіус кривини довільного волокна стержня.

Література

1. Т. Л. Мартынович. Обобщение теоремы Бетти-Максвелла в двумерной теории упругости. Прикладная механика, т. II, вып. 3, 1966.

2. Т. Л. Мартинович, В. П. Вушко. Про один спосіб розв'язування змішаних задач для однорідних і кусочно-однорідних середовищ. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 5, 1970.

3. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. "Наука", М., 1966.

4. Т. Л. Мартинович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленим пружним кільцем. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. I, 1965.

5. В. И. Ф е д о с ь е в. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.

6. М. П. Ш е р е м е т ь е в. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.

7. Ю. И. С о л о в ь е в. Плоская задача теории упругости для концентрического кольца с подкрепленным контуром. Труды Новосибирского ин-та ин. т. д. транспорта, вып. 14, 1948.

—o—

УДК 517.3

Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ, В.Г.ГАБРУСЄВ, О.П.ПІДДУБНЯК

ДЕЯКІ ВИПАДКИ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. З теорії осесиметричної задачі термопружності для трансверсально-ізотропних тіл [5] відомі такі співвідношення:

$$T(r,z)=A_{33}A_{44}\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z);$$

$$\sigma_{zz}(r,z)=\beta A_{33}A_{44}\nabla^2\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z); \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{rz}(r,z)=-\beta A_{33}A_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z).$$

Функція $\Psi(r,z)$ у випадку стаціонарного температурного поля і при відсутності в тілі джерел тепла визначається з рівняння

$$\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z)=0, \qquad (1.2)$$