5. В. И. Ф е д о с ь е в. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.

6. М. П. Ш е р е м е т ь е в. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.

7. Ю. И. С о л о в ь е в. Плоская задача теории упругости для эксцентрического кольца с подкрепленным контуром. Труды Новосибирского ин-та ин. т. д. транспорта, вып. 14, 1948.

—o—

УДК 517.3

Д.В.ГРИЛІЦЬКИЙ, В.Г.ГАБРУСЄВ, О.П.ПІДДУБНЯК

# ДЕЯКІ ВИПАДКИ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. З теорії осесиметричної задачі термопружності для трансверсально-ізотропних тіл [5] відомі такі співвідношення:

$$T(r,z)=A_{33}A_{44}\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z);$$

$$\sigma_{zz}(r,z)=\beta A_{33}A_{44}\nabla^2\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z); \qquad (1.1)$$

$$\sigma_{rz}(r,z)=-\beta A_{33}A_{44}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(d\nabla^2+e\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z).$$

Функція $\Psi(r,z)$ у випадку стаціонарного температурного поля і при відсутності в тілі джерел тепла визначається з рівняння

$$\left(\mu_1^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\mu_3^2\nabla^2+\frac{\partial}{\partial z^2}\right)\left(\mu_5^2\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(r,z)=0, \qquad (1.2)$$

де
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{1.3}$$

В (I.I) та (I.2) використані позначення праці [5] .

2. Розглянемо безмежний плоскопаралельний трансверсально-ізотропний шар скінченної товщини $2h$ , граничні площини якого вільні від навантаження.

Вважаємо, що площини ізотропії пружного шару паралельні граничним площинам.

Помістимо початок циліндричної системи координат $r$ , $\varphi$ , $z$ в серединній площині шару, а вісь $z$ направимо перпендикулярно до площин ізотропії (рис. I).

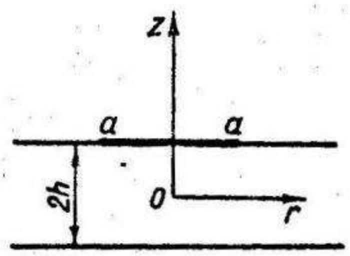


Рис. I.

Розглянемо таку задачу осесиметричної теорії термопружності при однорідних умовах для температури на границі шару.

На крузі радіуса $r = a$ площини $z = h$ задана температура $T(r, z) = T_0$, а поза кругом - $T(r, z) = 0$ ; на нижній границі шару, тобто при $z = h$ $T(r, z) = 0$ . Потрібно визначити температурне поле і температурні напруження в шарі.

Будемо розв'язувати задачу в двох стадіях.

В першій стадії розглянемо температурне поле, симетричне відносно площини $z = 0$ , в другій - антисиметричне [5] .

У випадку симетричного температурного поля граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned}
&T^{(s)}(r, \pm h) = \begin{cases} \frac{1}{2} T_0 & 0 < r < a; \\ 0, & r > a; \end{cases} \\
&\sigma_{zz}^{(s)}(r, \pm h) = 0, \qquad r \geq 0; \\
&\sigma_{rz}^{(s)}(r, \pm h) = 0, \qquad r \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.I}$$

Застооовуючи до формул (1.1) інтегральне перетворення Ханкеля [7] і [8] , знайдемо інтегральні вирази для температури і температурних напружень через трансформанту Ханкеля, яка визначається із рівняння (1.2),

$$\bar{\Psi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} C_j \, ch \, \mu_j \alpha z + D_j \, sh \, \mu_j \alpha z . \tag{2.2}$$

Вимагаючи виконання граничних умов (2.1), визначимо коефіцієнти $C_j$ , $D_j$ .

При обчисленні інтегралів, через які визначається температура і напруження, ми користуємось методом лишків [4] , враховуючи при цьому деякі властивості функцій Бесселя [2] (див. також праці [10] ).

Пропускаючи проміжні викладки, наведемо остаточні результати:

$$T^{(s)}(r,z) = \frac{T_0}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-\\+\end{Bmatrix} \frac{T_0 a}{\mu_5 h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_5 z \rho_{n,1}) \begin{Bmatrix} I_0(r\rho_{n,1}) K_1(a\rho_{n,1}) \\ I_1(a\rho_{n,1}) K_0(r\rho_{n,1}) \end{Bmatrix},$$

$$\text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad |z| \le h;$$

$$\sigma_{zz}^{(s)}(r,z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_5) a}{B} \begin{Bmatrix}+\\-\end{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} \sum_{j=1,3,5} \cos(\mu_j z \rho_{n,m}) \frac{\delta_j^{(s)}(\rho_{n,m})}{S_m(\rho_{n,m})} \begin{Bmatrix} I_0(r\rho_{n,m}) K_1(a\rho_{n,m}) \\ I_1(a\rho_{n,m}) K_0(r\rho_{n,m}) \end{Bmatrix},$$

$$\text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad |z| \le h; \tag{2.3}$$

$$\sigma_{rz}^{(s)}(r,z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_5) a}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2} \sum_{j=1,3,5} \sin(\mu_j z \rho_{n,m}) \frac{\delta_j^{(s)}(\rho_{n,m})}{S_m(\rho_{n,m})} \begin{Bmatrix} I_1(r\rho_{n,m}) K_1(a\rho_{n,m}) \\ I_1(a\rho_{n,m}) K_1(r\rho_{n,m}) \end{Bmatrix},$$

$$\text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad |z| \le h .$$

Тут введені позначення:

$$f(\mu_j)=e\mu_j^2-d, \quad B=(\mu_5^2-\mu_1^2)(\mu_5^2-\mu_3^2), \quad p_{n,1}=\frac{2n-1}{2}\,\frac{\pi}{\mu_5 h};$$

$p_{n,2}$ – корені трансцендентного рівняння

$$\mu_3 \cos\mu_1 h p_{n,2} \sin\mu_3 h p_{n,2} - \mu_1 \cos\mu_3 h p_{n,2} \sin\mu_1 h p_{n,2} = 0,$$

які є дійсними [3] ;

$$\delta_j^{(s)}(\alpha)=\mu_k \cos\mu_\ell h\alpha \sin\mu_k h\alpha - \mu_\ell \cos\mu_k h\alpha \sin\mu_\ell h\alpha, \tag{2.4}$$

причому $j=1,\ \ell=3,\ k=5;\ j=3,\ \ell=5,\ k=1;\ j=5,\ \ell=1,\ k=3;$

$$S_1(p_{n,1})=(-1)^{n+1}\mu_5 h\, \delta_5^{(s)}(p_{n,1}),$$

$$S_2(p_{n,2})=(\mu_1^2-\mu_3^2)h \cos\mu_1 h p_{n,2} \cos\mu_3 h p_{n,2} \cos\mu_5 h p_{n,2};$$

$I_\nu(x), K_\nu(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Розглянемо антисиметричне температурне поле відносно площини $z=0$. Граничні умови задачі мають вигляд

$$T^{(a)}(r,\pm h)=\begin{cases}\pm\frac{1}{2}T_0 & 0\le r<a,\\ 0, & r>a;\end{cases}$$

$$\sigma_{zz}^{(a)}(r,\pm h)=0, \qquad r\geqslant 0; \tag{2.5}$$

$$\sigma_{rz}^{(a)}(r,\pm h)=0, \qquad r\geqslant 0.$$

Провівши викладки, аналогічні симетричному випадку, одержимо

$$T^{(a)}(r,z)=\frac{T_0}{2}\begin{Bmatrix}\frac{z}{h}\\ 0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\\ +\end{Bmatrix}\frac{T_0 a}{\mu_5 h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(\mu_5 z\alpha_{n,1})\begin{Bmatrix}I_0(r\alpha_{n,1})K_1(a\alpha_{n,1})\\ I_1(a\alpha_{n,1})K_0(r\alpha_{n,1})\end{Bmatrix},$$

$$\text{для}\ \begin{Bmatrix}0\le r\le a\\ r>a\end{Bmatrix},\ |z|\le h;$$

$$\sigma_{zz}^{(a)}(r,z)=\frac{\beta T_0 f(\mu_5)a}{B}\begin{Bmatrix}-\\ +\end{Bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1,3,5}\sin(\mu_j z\alpha_{n,m})\frac{\delta_j^{(a)}(\alpha_{n,m})}{\Phi_m(\alpha_{n,m})}\begin{Bmatrix}I_0(r\alpha_{n,m})K_1(a\alpha_{n,m})\\ I_1(a\alpha_{n,m})K_0(r\alpha_{n,m})\end{Bmatrix},$$

$$\text{для}\ \begin{Bmatrix}0<r<a\\ r>a\end{Bmatrix}, |z|<h; \tag{2.6}$$

$$\sigma_{rz}^{(a)}(r,z)=\frac{\beta T_0 f(\mu_5)a}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1,3,5}\mu_j\cos(\mu_j z\alpha_{n,m})\frac{\delta_j^{(a)}(\alpha_{n,m})}{\Phi_m(\alpha_{n,m})}\left\{\begin{matrix} I_1(r\alpha_{n,m})K_1(a\alpha_{n,m}) \\ I_1(a\alpha_{n,m})K_1(r\alpha_{n,m}) \end{matrix}\right\},$$

$$\text{для}\left\{\begin{matrix} 0\le r\le a \\ r>a \end{matrix}\right\},\quad |z|\le h .$$

Тут використані позначення

$$\delta_j^{(a)}(\alpha)=\mu_k\cos\mu_k h\alpha\sin\mu_l h\alpha-\mu_l\cos\mu_l h\alpha\sin\mu_k h\alpha ,$$

причому $j=1,\ l=3,\ k=5;\ j=3,\ l=5,\ k=1;\ j=5,\ l=1,\ k=3;$

$\alpha_{n,1}=\pi n\frac{1}{\mu_5 h};$

$\alpha_{n,2}$ – корені трансцендентного рівняння

$$\mu_3\cos\mu_3 h\alpha_{n,2}\sin\mu_1 h\alpha_{n,2}-\mu_1\cos\mu_1 h\alpha_{n,2}\sin\mu_3 h\alpha_{n,2}=0;$$

$$\Phi_1(\alpha_{n,1})=(-1)^n\mu_5 h\,\delta_5^{(a)}(\alpha_{n,1}),$$

$$\Phi_2(\alpha_{n,2})=(\mu_1^2-\mu_3^2)h\sin\mu_1 h\alpha_{n,2}\sin\mu_3 h\alpha_{n,2}\sin\mu_5 h\alpha_{n,2}.$$

Знаючи температурне поле і температурні напруження в симетричному і антисиметричному випадках, легко знайти температурне поле і температурні напруження нашої задачі:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}^{(s)}+\sigma_{zz}^{(a)},\quad \sigma_{rz}=\sigma_{rz}^{(s)}+\sigma_{rz}^{(a)},\quad T=T^{(s)}+T^{(a)}.$$

Шляхом аналогічних міркувань легко отримати інші компоненти напруженого стану, а також переміщення, які ми тут не наводимо за браком місця.

На рис. 2-4 наводяться графіки температури і температурних напружен. в шарі.

Аналогі о можна розглянути осесиметричну задачу для випадку, коли задана температура на граничних площинах є довільною функцією координати $r$.

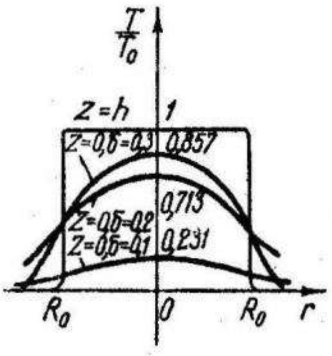


Рис. 2.

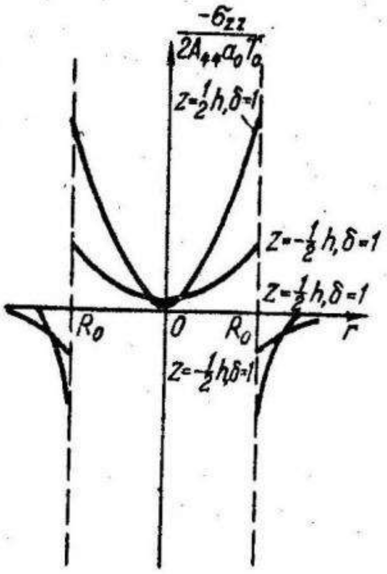


Рис. 3.

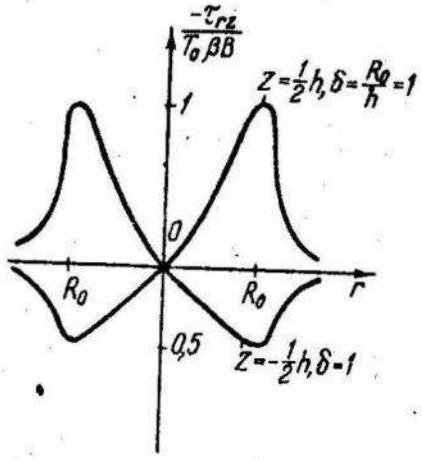


Рис. 4.

3. Тепер розглянемо осесиметричну задачу термопружності для трансверсально-ізотропного шару при змішаних умовах для температури на границі шару, а саме: на верхній границі шару в крузі радіуса $r = a$ підтримується стала температура $T_0$, зовнішність круга – теплоізольована; нижня площина шару підтримується при нульовій температурі.

Як і в попередній задачі, визначимо температурне поле і температурні напруження в шарі при вільних від зовнішнього навантаження границях.

Для зручності товщину шару тепер приймемо рівною $h$, початок системи координат помістимо на верхній площині шару в центрі круга радіуса $r = a$, а вісь $z$ направимо вертикально вниз.

Граничні умови задачі набирають вигляду

$$
\begin{array}{llll}
T(r,z) = T_0\,, & & z=0, & 0 \le r \le a\,, \\
\dfrac{\partial T}{\partial z} = 0\,, & & z=0, & r > a\,, \\
T(r,z) = 0\,, & & z=h, & 0 \le r \le \infty\,, \\
\sigma_{zz}(r,z)=0\,, & z=0\,, & z=h, & 0 \le r \le \infty\,, \\
\sigma_{rz}(r,z)=0, & z=0\,, & z=h, & 0 \le r \le \infty\,.
\end{array}
\qquad (3.1)
$$

При розв'язуванні цієї задачі знову-таки користуємося інтегральним перетворенням Ханкеля, а при обчисленні інтегралів – методом лишків з використанням властивостей функцій Бесселя [2] , [1] , [9] .

Після ряду обчислень і перетворень одержуємо такі результати:

$$
T(r,z) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} X_n(a,z) \\ X_n(r,z)\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\frac{8T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{r}{a}j_k\right)}{j_k J_1(j_k)}\left[\frac{P^*(j_k)\,\mathrm{sh}\,\mu_s(h-z)\frac{j_k}{a}N_0(j_k)}{2j_k\,\mathrm{ch}\frac{\mu_s h}{a}j_k} -\right.
$$

$$
\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ap_{n,1})^2 X_n(a,z)}{\left[j_k^2+(ap_{n,1})^2\right]}\right], \qquad \text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad 0 \le z \le h\,,
$$

$$
\sigma_{zz}(r,z) = \mathcal{L}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{3}\begin{Bmatrix} Z_n(a,z) \\ Z_n(r,z)\end{Bmatrix} + \mathcal{L}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{r}{a}j_k\right)}{j_k J_1(j_k)}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{P^*(j_k)\Delta_*\left(\frac{j_k}{a}\right)N_0(j_k)}{j_k\,\mathrm{ch}\frac{\mu_s h j_k}{a}\,\Delta\left(\frac{j_k}{a}\right)} -\right.
$$

$$
\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{3}\frac{(ap_{n,m})^2 Z_n(a,z)}{\left[j_k^2+(ap_{n,m})^2\right]}\right], \qquad \text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad 0 \le z \le h\,, \qquad (3.2)
$$

$$
\sigma_{rz}(r,z) = \mu_1\mathcal{L}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{3}\begin{Bmatrix} \frac{r}{a}R_n(a,z) \\ R_n(r,z)\end{Bmatrix} + \mu_1\mathcal{L}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{r}{a}\gamma_k\right)}{\gamma_k J_0(\gamma_k)}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{P^*(\gamma_k)\Delta_1^*\left(\frac{\gamma_k}{a}\right)N_1(\gamma_k)}{\gamma_k\,\mathrm{ch}\frac{\mu_s h \gamma_k}{a}\,\Delta\left(\frac{\gamma_k}{a}\right)} -\right.
$$

$$
\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{3}\frac{(ap_{n,m})^2 R_n(a,z)}{\left[\gamma_k^2+(ap_{n,m})^2\right]}\right], \qquad \text{для} \begin{Bmatrix} 0 \le r \le a \\ r > a \end{Bmatrix}, \quad 0 \le z \le h\,.
$$

Тут використані позначення:

$$
X_n(r,z) = (-1)^n\frac{P(ap_{n,1})\sin(h-z)\mu_s p_{n,1}K_0(rp_{n,1})}{a^2 p_{n,1}^3\,\mu_s h}
$$

$$Z_n(r,z)=(-1)^n\frac{P(a p_{n,m})Q(z)K_0(r p_{n,m})}{\Delta_m(p_{n,m})};$$

$$R_n(r,z)=(-1)^n\frac{P(a p_{n,m})\mathcal{F}(z)K_1(r p_{n,m})}{\Delta_m(p_{n,m})};$$

$$P(a\alpha)=H_1\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)(a\alpha)^2 sh\, a\alpha-H_2\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)(sh\, a\alpha-a\alpha\, ch\, a\alpha);$$

$$\Delta_1(\alpha)=a\alpha^3\mu_s h\left[(\mu_1-\mu_3)^2\sin\frac{\mu_1+\mu_3}{2}h\alpha-(\mu_1+\mu_3)^2\sin^2\frac{\mu_1-\mu_3}{2}h\alpha\right];$$

$$\Delta_2(\alpha)=\varkappa_1(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_1-\mu_3)a^2\alpha^5\cos\mu_s h\alpha\sin\frac{\mu_1+\mu_3}{2}h\alpha;$$

$$\Delta_3(\alpha)=\varkappa_2(\mu_1^2-\mu_3^2)(\mu_1+\mu_3)a^2\alpha^3\cos\mu_s h\alpha\sin\frac{\mu_1-\mu_3}{2}h\alpha; \tag{3.3}$$

$$P(ix)=-i P^*(x),\quad \Delta_*(ix)=-i Q(x),\quad \Delta_1^*(ix)=-\mathcal{F}(x);$$

$$\Delta(x)=-\frac{\Delta_1(ix)}{a^2\mu_s h(ix)^3};$$

$$H_1\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)=1+\frac{2S_1}{\pi}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)+\frac{4S_1^2}{\pi^2}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^2+\frac{24S_1^3-2\pi S_3}{3\pi^2}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^3+$$

$$+\frac{16S_1^4-2\pi^2 S_1 S_3}{\pi^4}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^4;$$

$$H_2\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)=\frac{S_3}{\pi}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^3+2\frac{S_1 S_3}{\pi}\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^4,\qquad S_m=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^m};$$

$$\mathcal{L}=\frac{4\beta T_0 f(\mu_s)}{\mu_1\pi B};$$

$j_k>0$ — корені рівняння $J_0(x)=0$;

$\gamma_k>0$ — корені рівняння $J_1(x)=0$.

Функції $Q(x)$ та $\mathcal{F}(x)$ знаходимо із співвідношення

$$Q(x)=\vec{\theta}_1\left[\vec{\theta}_2\Gamma_2^{1,1}(x)+\vec{\theta}_3\Gamma_4^{1,1}(x)\right]-\frac{\Delta_1(p_{n,m})}{a^2p_{n,m}^3\mu_s h}\left\{\Gamma_1^{(0)}(x)+\mu_1\sin[\mu_s(h-x)p_{n,m}]\right\};$$

$$\mathcal{F}(x)=\vec{\theta}_1\left[\vec{\theta}_2\Gamma_4^{3,3}(x)+\vec{\theta}_3\Gamma_2^{3,1}(x)\right]-\frac{\Delta_1(p_{n,m})}{a^2p_{n,m}^3\mu_s h}\left\{\Gamma_3^{(0)}(x)+\mu_s\cos[\mu_s(h-x)p_{n,m}]\right\}, \tag{3.4}$$

де

$$\vec{\theta}_1\left\{\Gamma_1^{(0)}(h), \Gamma_3^{(5)}(h)\right\}, \ \vec{\theta}_2\left\{\Gamma_2^{3,1}(h), \Gamma_4^{1,1}(h)\right\}, \ \vec{\theta}_3\left\{\Gamma_4^{3,3}(h), -\Gamma_2^{1,3}(h)\right\};$$

$$\Gamma_1^{(j)}(z) = \mu_5 \cos\mu_5 h p_{n,m} \sin\mu_1 z p_{n,m} - \mu_1 \sin\mu_5 h p_{n,m} \cos\mu_1 z p_{n,m} + \omega_j;$$

$$\Gamma_2^{j,\tau}(z) = \omega_j \sin\mu_3 z p_{n,m} - \omega_\tau \sin\mu_1 z p_{n,m};$$

$$\Gamma_3^{(j)}(z) = \mu_5 \cos\mu_5 h p_{n,m} \cos\mu_1 z p_{n,m} + \mu_1 \sin\mu_5 h p_{n,m} \sin\mu_1 z p_{n,m} - \omega_j; \tag{3.5}$$

$$\Gamma_4^{j\tau}(z) = \omega_j \cos\mu_3 z p_{n,m} - \omega_\tau \cos\mu_1 z p_{n,m};$$

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \mu_1, \quad \omega_3 = \mu_3, \quad \omega_5 = \mu_5;$$

$$p_{n,1} = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\mu_5 h}, \quad p_{n,2} = \frac{2\pi n}{\mu_1 - \mu_3}, \quad p_{n,3} = \frac{2\pi n}{\mu_1 + \mu_3}.$$

При обчисленні інтегралів була використана апроксимація

$$\begin{aligned} &(\mu_1-\mu_3)^2 sh\frac{\mu_1+\mu_3}{2}h\alpha - (\mu_1+\mu_3) sh\frac{\mu_1-\mu_3}{2}h\alpha \approx \varkappa_1(\mu_1+\mu_3)\alpha^2 sh\frac{\mu_1-\mu_3}{2}h\alpha, \\ &(\mu_1-\mu_3) sh\frac{\mu_1+\mu_3}{2}h\alpha + (\mu_1+\mu_3) sh\frac{\mu_1-\mu_3}{2}h\alpha \approx \varkappa_2(\mu_1-\mu_3) sh\frac{\mu_1+\mu_3}{2}h\alpha, \end{aligned} \tag{3.6}$$

для магнію $\varkappa_1 = 0,2$, $\varkappa_2 = 1,99$.

Зауважимо, що наведені вище формули мають місце, коли

$$\frac{\mu_5 h}{a} > 0,4415.$$

За допомогою аналогічних міркувань можна знайти формули для інших компонент напруженого стану.

## Література


1. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1966.

2. Г. Н. Ватсон. Теория Бесселевых функций. Госиздат, М., 1949.

3. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., "Наука", 1964.

4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, М., 1958.

5. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.

6. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1952.

7. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.

8. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Ленинград. отд., Л., 1967.

9. Е. Янке, Ф. Эдме, Ф. Леш. Специальные функции. М., 1968.

10. F. Dymek. Osiowo-symetryczne zadanie brzegowe przestrzennej teorii sprężystości i jego zastosowanie do zagadnień mechaniki górotwory. Archiwum Górnictwa, t. XIII, N 3, 1968.


—o—


УДК 539.311



Е.І.ЛУНЬ, А.О.СЯСЬКИЙ


# ПРО ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПІДКРІПЛЕННЯ ОТВОРУ В ПРУЖНІЙ ОБОЛОНЦІ

Питання еквівалентного підкріплення отворів в пластинах і оболонках на основі класичної теорії розглядались в працях [1,4,5,6,7,8]. В роботі [9] при дослідженні питання про усунення концентрації напружень біля отворів в пластинах використовувались рівняння уточненої тео-