Література

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1966.

2. Г. Н. Ватсон. Теория Бесселевых функций. Госиздат, М., 1949.

3. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., "Наука", 1964.

4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, М., 1958.

5. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.

6. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1952.

7. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.

8. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Ленинград. отд., Л., 1967.

9. Е. Янке, Ф. Эдме, Ф. Леш. Специальные функции. М., 1968.

10. F. Dymek. Osiowo-symetryczne zadanie brzegowe przestrzennej teorii sprężystości i jego zastosowanie do zagadnień mechaniki górotwory. Archiwum Górnictwa, t. XIII, N 3, 1968.

—o—

УДК 539.311

Е. І. ЛУНЬ, А. О. СЯСЬКИЙ

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПІДКРІПЛЕННЯ ОТВОРУ В ПРУЖНІЙ ОБОЛОНЦІ

Питання еквівалентного підкріплення отворів в пластинах і оболонках на основі класичної теорії розглядались в працях [1,4,5,6,7,8]. В роботі [9] при дослідженні питання про усунення концентрації напружень біля отворів в пластинах використовувались рівняння уточненої теорії [10] , яка дає можливість задовольнити всі три граничні умови на контурі створів.

У цій роботі задача про еквівалентне підкріплення отвору в пружній оболонці розглядається на основі рівнянь теорії типу Тимошенка [II], яка в певній мірі враховує деформації поперечних зсувів і дає можливість задовольнити п'ять граничних умов на контурі отвору.

I. Ключову систему рівнянь для оболонок нульової гаусової кривини, пологих і деяких інших оболонок можна взяти у вигляді [2]

$$
\begin{aligned}
&D\Delta\Delta w + \Delta_\kappa(1-\varepsilon\Delta)\varphi = (1-\varepsilon\Delta)q_n, \\
&\Delta\Delta\varphi - 2Eh\,\Delta_\kappa w = 0; \qquad\qquad (1)\\
&\Delta\psi - \frac{2}{(1-\nu)\varepsilon}\psi = 0,
\end{aligned}
$$

де $w(\alpha,\beta)$ – нормальний прогин оболонки; $\varphi(\alpha,\beta)$ – функція напружень; $\psi(\alpha,\beta)$ – функція, через яку виражаються кути повороту нормалі; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; $\varepsilon = \frac{h^2}{3\kappa'(1-\nu^2)}\,\frac{E}{G_n}$; $2h$ – товщина оболонки; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в середній та еквідистантних площинах; G_n – модуль зсуву в площинах, нормальних до серединної поверхні;

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right];$$

$$\Delta_\kappa = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right].$$

Компоненти пружно-деформованого стану оболонки виражаються через рівняння системи (I) за формулами, наведеними в [II] .

Умови еквівалентності [6] записуються у вигляді

$$
\begin{aligned}
&u(\alpha,\beta) = u_0(\alpha,\beta), \quad v(\alpha,\beta) = v_0(\alpha,\beta), \quad w(\alpha,\beta) = w_0(\alpha,\beta), \qquad (2)\\
&\gamma_\alpha(\alpha,\beta) = \gamma_\alpha^0(\alpha,\beta), \quad \gamma_\beta(\alpha,\beta) = \gamma_\beta^0(\alpha,\beta),
\end{aligned}
$$

де величини справа – компоненти переміщення і кути повороту нормалі в оболонці без отвору, а величини зліва – компоненти переміщення і кути повороту в оболонці з підкріпленим отвором під тим же навантаженням.

Приймаючи, що кільце тонке, умови спаю між оболонкою і еквівалентним кільцем запишемо у вигляді

$$p_n(s)=T_n(s),\quad p_s(s)=S_{ns}(s),\quad p(s)=N_n(s),\qquad m(s)=M_n(s),\quad h(s)=H_{ns}(s); \tag{3}$$

$$u_1=u_n,\quad u_2=u_s,\quad w_p=w,\quad \gamma_1=\gamma_n,\quad \gamma_2=\gamma_s. \tag{4}$$

Тут $p_n(s), p(s), p_s(s), m(s), h(s)$ – поперечні та поздовжня сили, згинальний та скручувальний моменти, які діють на кільце зі сторони оболонки; u_1, u_2, w_p, γ_1, γ_2 – компоненти переміщення, кут кручення та кут згину кільця; T_n, S_{ns}, N_n, M_n, H_{ns} – нормальна, дотична та перерізуюча сили, згинальний та крутний моменти в оболонці на контурі отвору; u_n, u_s, w, γ_n, γ_s – компоненти переміщення (по головній нормалі, дотичній та бінормалі до контура отвору), кути повороту нормалі навколо дотичної $\vec{s}$ та головної нормалі $\vec{n}$ до контура отвору; s – дуга на контурі отвору.

Праві частини умов (3) та (4) можна вважати відомими, якщо відомий розв'язок задачі для оболонки без отвору. Таким чином, задача про еквівалентне підкріплення отвору в оболонці звелась до визначення жорсткостей кільця при відомих деформаціях кільця (4) та навантаженні (3), що діє на нього.

Вважаємо, що в підкріплюючому кільці, як і в оболонці, зсуви можуть бути відмінними від нуля, і залежності між внутрішніми зусиллями в кільці і параметрами деформації приймаємо у вигляді

$$L_n=A(s)\delta\omega_n,\quad L_b=B(s)\delta\omega_b,\quad L_s=C(s)\delta\omega_s, \tag{5}$$

$$v_b=B^*(s)e_b,\quad v_s=E_1F(s)\varepsilon_0.$$

Тут L_n, $L_в$, L_s - згинаючі та крутний моменти в кільці; $\upsilon_в$, υ_s - поперечна та поздовжня сили; $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ - шукані жорсткості кільця на згин та кручення; $B^*(s)$ - приведена жорсткість кільця на зсув; $\delta\omega_n$, $\delta\omega_в$, $\delta\omega_s$ - прирости кривин та кручення кільця, $e_в$ - зсув в спрямляючій площині кільця; ε_o - відносний розтяг осі кільця; E_1 - модуль Юнга для матеріалу кільця; $F(s)$ - площа поперечного перерізу кільця.

Величини L_n, $L_в$, L_s, $\upsilon_в$ і υ_s визначаються при інтегруванні рівнянь статики для частини кільця, що знаходиться під дією заданого навантаження.

Враховуючи співвідношення Клебша [3] та прийняті допущення, зможемо записати такі співвідношення для підкріплюючого плоского кільця:

$$\delta\omega_n = \frac{\partial\gamma_2}{\partial s} + q\gamma_1, \qquad \delta\dot{\omega}_в = \frac{\partial\gamma_в}{\partial s},$$

$$\delta\omega_s = \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} - q\gamma_2, \qquad e_в = \frac{\partial w_в}{\partial s} + \gamma_2, \tag{6}$$

$$\varepsilon_o = -\frac{\partial u_2}{\partial s} - q u_1,$$

де $\gamma_в$ - кут згину кільця в площині ($\vec{n}$, $\vec{s}$);

$q(s)$ - кривина осі кільця в площині ($\vec{n}$, $\vec{s}$).

Враховуючи умови спаю (4) та співвідношення (6), одержуємо із (5) такі формули для шуканих жорсткостей кільця:

$$A(s) = \frac{L_n}{\frac{\partial\gamma_s}{\partial s} + q\gamma_n}, \qquad B(s) = \frac{L_в}{\frac{\partial\gamma_в}{\partial s}},$$

$$C(s) = \frac{L_s}{\frac{\partial\gamma_n}{\partial s} - q\gamma_s}, \qquad B^*(s) = \frac{\upsilon_в}{\frac{\partial w}{\partial s} + \gamma_s}, \tag{7}$$

$$E_1 F(s) = -\frac{\upsilon_s}{\frac{\partial u_s}{\partial s} + q u_n}.$$

В кожному конкретному випадку розв'язки (7) повинні бути досліджені, оскільки жорсткості повинні приймати лише невід'ємні та скінченні значення.

Якщо допустити, що зсув e_b відсутній, і врахувати, що тоді

$$\gamma_s = \frac{\partial w}{\partial s}, \qquad \gamma_n = -\frac{\partial w}{\partial n}, \tag{8}$$

то формули (7) набувають вигляду

$$A(s) = -\frac{L_n}{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + q\,\frac{\partial w}{\partial n}}, \qquad B(s) = \frac{L_b}{\frac{\partial \gamma_b}{\partial s}}, \tag{9}$$

$$C(s) = -\frac{L_s}{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial n} - q w\right)}, \qquad E_1 F(s) = -\frac{v_s}{\frac{\partial u_s}{\partial s} + q\,u_n}.$$

Це є розв'язок задачі в рамках класичної теорії.

2. Для прикладу розглядається задача про підбір еквівалентного кільця, що підкріплює круговий отвір в циліндричній оболонці, яка перебуває під дією рівномірного внутрішнього тиску.

Основний напружений стан в суцільній оболонці задається зусиллями

$$
\begin{aligned}
T_\rho &= h(p+q) + h(p-q)\cos 2\lambda;\\
T_\lambda &= h(p+q) - h(p-q)\cos 2\lambda;\\
S_{\rho\lambda} &= -h(p-q)\sin 2\lambda
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Середня поверхня оболонки віднесена до полярної напівгеодезичної системи координат (ρ, λ), з початком в центрі отвору.

В даному випадку формули (7) набувають вигляду

$$A(\rho,\lambda) = \frac{L_\rho}{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial \lambda} + \gamma_\rho\right)}, \qquad C(\rho,\lambda) = \frac{L_\lambda}{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \lambda} - \gamma_\lambda\right)}, \tag{11}$$

$$B(\rho,\lambda) = \frac{L_b}{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(u_\lambda - \frac{\partial u_\rho}{\partial \lambda}\right)}, \qquad B^*(\rho,\lambda) = \frac{L^*_b}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \lambda} + \gamma_\lambda},$$

$$E_1 F^*(\rho,\lambda) = \frac{v^*_\lambda}{\frac{1}{\rho}\left(u_\rho + \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right)}.$$

Щоб знайти величини L_ρ, L_λ, L_ε, U_λ, U_ε, потрібно розв'язати систему диференціальних рівнянь згину кільця [3], що перебуває під навантаженням (10). Розв'язавши цю систему, одержимо, що

$$U_\lambda = \rho h\left[(p+q)-(p-q)\cos 2\lambda\right], \quad L_\varepsilon = -\frac{1}{2}\rho^2 h(p-q)\cos 2\lambda, \qquad (12)$$

$$L_\rho = L_\lambda = U_\varepsilon = 0.$$

Згідно з розв'язком задачі про напружено-деформований стан в циліндричній оболонці при дії внутрішнього тиску з використанням системи (I) маємо

$$\gamma_\rho = \gamma_\lambda = 0, \qquad w = w_0 = const,$$

$$\frac{1}{\rho}\left(u_\rho + \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right) = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)(p+q)h - (1+\nu)(p-q)h\cos 2\lambda\right], \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(u_\lambda - \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}\rho\right) = \frac{1}{2Eh}\left[2(1+\nu)(p-q)h\cos 2\lambda\right].$$

Підставляючи (12) і (13) в (11), одержуємо

$$E_1 F(\rho,\lambda) = 2E\rho h\,\frac{(p+q)-(p+q)\cos 2\lambda}{(1-\nu)(p+q)-(1+\nu)(p-q)\cos 2\lambda}, \qquad (14)$$

$$B(\rho,\lambda) = \frac{E\rho^3 h}{2(1+\nu)};$$

$A(\rho,\lambda)$, $C(\rho,\lambda)$, $B^*(\rho,\lambda)$ – довільні.

Враховуючи, що

$$F(\rho,\lambda) = 2bh_1, \quad C(\rho,\lambda) = \frac{2}{3}E_1 b^3 h_1, \quad p = 0{,}5q, \qquad (15)$$

одержимо аналітичні вирази для геометричних характеристик кільця товщини $h_1(\lambda)$ і ширини $b(\lambda)$.

$$\frac{b(\lambda)}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+\nu}}\sqrt{\frac{3(1-\nu)+(1+\nu)\cos 2\lambda}{3+\cos 2\lambda}};$$

$$\frac{h_1(\lambda)}{h} = \frac{2\sqrt{1+\nu}}{\sqrt{3}}\,\frac{E}{E_1}\sqrt{\left(\frac{3+\cos 2\lambda}{3(1-\nu)+(1+\nu)\cos 2\lambda}\right)^3}. \qquad (16)$$

В таблиці наведені величини вказаних характеристик кільця в залежності від величини кута λ при $\nu = 0,3$; $\frac{E}{E_1} = 0,5$.

λ	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0
$\frac{b(\lambda)}{\rho}$	0,701	0,692	0,669	0,638	0,578	0,524	0,479
$\frac{2h_1(\lambda)}{h}$	1,69	1,74	1,89	2,26	2,99	4,02	4,90

Література

1. А. Н. К в а ш а. Вопросы снижения концентрации напряжений в ослабленных пластинах и оболочках. Автореферат канд. диссертации. Институт механики АН УССР, К., 1960.

2. Е. И. Л у н ь. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, Вісник ЛДУ, серія мех.-мат., вип. 3, 1967.

3. А. И. Л у р ь е. О малых деформациях криволинейных стержней, Труды Ленинградского политехнического института № 3, 1941.

4. В. І. М о с с а к о в с ь к и й, А. Н. К в а ш а. Конструкція та розрахунок люків, які не викликають концентрації напружень в сферичних оболонках, "Прикладна механіка", т. 5, вип. 4, 1959.

5. Г. Н. С а в и н, Н. П. Ф л е й ш м а н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. "Наукова думка", К., 1964.

6. Н. П. Ф л е й ш м а н. Об эквивалентном подкреплении отверстий в пластинах. Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 4, ч. II, 1953.

7. Н. П. Ф л е й ш м а н. Про підкріплення краю криволінійних отворів тонких плит. ДАН УРСР, № 4, 1954.

3. Н. П. Ф л е й ш м а н. Некоторые обратные задачи для плит с отверстиями, края которых подкреплены тонкими ребрами. Изв. вузов, "Машиностроение", № 7, 1961.

9. Н. П. Ф л е й ш м а н, Б. Л. П е л е х. К вопросу о полном устранении концентрации напряжений около отверстий в плитах. Сборник концентрации напряжений, вып. 1, К., 1965.

10. М. П. Ш е р е м е т ь е в, Б. Л. П е л е х. К построению уточненной теории пластин. Инженерный журнал, № 3, 1964.

11. М. П. Ш е р е м е т ь е в, Е. И. Л у н ь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IУ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.

—o—