

Х.В.СТАРОВОЙТЕНКО

ПЛАСТИНКА З ПІДКРІПЛЕНОЮ КРУГОВОЮ ГРАНИЦЕЮ
ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І МОМЕНТІВ ¹⁾

Розглядається узагальнений плоский напружений стан ізотропної пластинки сталої товщини, круговий край якої підкріплено тонким пружним ребром з постійними жорсткостями на розтяг та згин. Розв'язок задачі дається для круглого диска радіуса R . Аналогічно, без суттєвих змін, розв'язується і задача про дію зосереджених сил і моментів на безмежну пластинку з підкріпленням круговим отвором.

Нехай в точках $x_j = R\zeta_j$ та $x_k = R\zeta_k$ диска прикладено відповідно зосереджені сили $P_j^*(X_j^*, Y_j^*)$ і моменти M_k^* ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$). На ребро діє довільне навантаження. Аналогічно роботі [4], в якій розглядається менш загальний випадок навантаження, та використовуючи відоме зображення комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ (див. [3], формули (3), (5), стор. 198) і граничні умови (1), (2) роботи [4], зводимо задачу до системи диференціальних рівнянь на комплексній площині:

$$\begin{aligned} & \delta_2 \zeta^2 \varphi_{20}''(\zeta) + (\delta_1 + \delta_2) \zeta \varphi_{20}'(\zeta) + (1 - \delta_1 - \delta_2) \varphi_{20}(\zeta) - \delta_2 \alpha \zeta \varphi_{10}''(\zeta) + \\ & + \alpha (\delta_1 + \delta_2) \varphi_{10}'(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \varphi_{10}(\zeta) = f_{11}(\zeta); \\ & \delta_1 \zeta^2 \varphi_{20}''(\zeta) + \zeta \varphi_{20}'(\zeta) - \varphi_{20}(\zeta) + \delta_1 \alpha \zeta \varphi_{10}''(\zeta) + \varphi_{10}'(\zeta) = f_{21}(\zeta), \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Робота виконана під керівництвом проф. Н.П.Фейшмана.

$$\begin{aligned}
\text{де } f_{21}(\zeta) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f_2(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \sum_{j=1}^n \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\alpha)} \left[\bar{\zeta}_j + \frac{\alpha \bar{\zeta}_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\delta_1 \alpha \zeta \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\alpha)} \left[\alpha(1+\delta_1) \zeta + \alpha \zeta_j + \frac{\zeta_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j + \delta_1 \alpha}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \cdot \zeta + \right. \\
& \left. + \frac{2\delta_1(1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j)}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^3} \cdot \zeta \right] + \sum_{k=1}^m \frac{iM_k}{2\pi} \left[\frac{2 - \zeta \bar{\zeta}_k}{1 - \zeta \bar{\zeta}_k} + \frac{\zeta \bar{\zeta}_k}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^2} - \frac{2\delta_1 \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^3} \right]; \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(\zeta) = & b_0 \left[-2 + (\delta_1 + \delta_2)(1 - \alpha) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} - \\
& - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \sum_{j=1}^n (X_j + iY_j) \left\{ (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{\zeta}_j - \frac{\alpha + 1}{\zeta} \ln \frac{\sigma_j - \zeta}{\sigma_j} + \frac{\alpha \ln(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)}{\zeta} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\delta_2 \alpha \zeta \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \right\} - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \sum_{j=1}^n (X_j - iY_j) \left\{ \left[(\alpha + 1) \ln(\sigma_j - \zeta) - \right. \right. \\
& - \ln(1 - \zeta \bar{\zeta}_j) + (\alpha + 1) C_2 + \alpha(\delta_1 + 2\delta_2) \cdot \zeta + (\alpha + 1) \sigma_j + \alpha(\delta_1 + \delta_2 - 1) \zeta_j + \\
& \left. + \frac{(1 - \delta_1 - \delta_2)(\zeta_j - \zeta)}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\alpha(\delta_1 + \delta_2) \zeta}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} + \left[(\delta_1 + \delta_2)(1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j) - \alpha \delta_2 \right] \frac{\zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{2\delta_2(1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j) \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^3} \right\} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^m M_k \left[1 - \delta_1 - \delta_2 - \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{1 - \zeta \bar{\zeta}_k} + \frac{(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^2} - \frac{2\delta_2 \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^3} \right]; \\
b_0 = & \frac{1}{2[2 + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2)]} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(\sigma) d\sigma}{\sigma} - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \left[\sum_{j=1}^n (X_j + iY_j) \left[(1 - \alpha) \bar{\zeta}_j + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha + 1}{\zeta_j} + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_j \right] + \sum_{j=1}^n (X_j - iY_j) \left[(\alpha + 1) \sigma_j + (1 - \alpha) \zeta_j + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2) \zeta_j \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Тут C_2 - довільна комплексна стала; σ_1 - довільна точка одиничного кола $\bar{z}$ площини $\zeta = z/R$; $X_j = X_j^*/h$, $Y_j = Y_j^*/h$, $M_k = M_k^*/h$; інші позначення ті ж, що й в роботі [4].

Розв'язок системи (1), тобто функції $\varphi_0(\zeta)$ і $\varphi_{20}(\zeta)$, виражається в квадратурах за формулами (23) роботи [4], в яких праві частини $f_0(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ визначаються формулами (2).

У частковому випадку, коли до диска прикладено лише дві зосереджені сили: $(-P_1, 0)$ в центрі диска та $(P_1, 0)$ в точці $z_0 = R\zeta_0$ на дійсній осі, маємо:

$$\begin{aligned} f_0(\zeta) = & -\frac{\rho}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \left(\frac{\kappa}{\zeta} - \zeta \right) \ln(1 - \zeta\zeta_0) + [1 - 2\delta_1 + \kappa(\delta_1 + 2\delta_2)] \zeta + \right. \\ & + \frac{(\zeta_0 - \zeta)[(\delta_1 + \delta_2)(\kappa - 1) + 1]}{1 - \zeta\zeta_0} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)(1 - \zeta_0^2)\zeta - \kappa\delta_2(1 + \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^2} - \frac{2\delta_2(1 - \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^3} \Big\}; \\ f_2(\zeta) = & \frac{\rho}{2\pi(1+\kappa)} \left[(2\delta_1 - \delta_1\kappa - 1)\zeta - (\kappa - 1)\zeta_0 + \frac{(\kappa - 1)\zeta_0}{1 - \zeta\zeta_0} + \right. \\ & + \frac{1 - \zeta_0^2 + \delta_1\kappa - \kappa\delta_1\zeta_0^2}{(1 - \zeta\zeta_0)^2} \zeta - \frac{2\delta_1(1 - \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^3} \Big]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$b_0 = \frac{\rho(\kappa - 1)(1 - \delta_1 - \delta_2)\zeta_0}{2\pi(1+\kappa)[2 + (\kappa - 1)(\delta_1 + \delta_2)]}, \quad \rho = P_1/h.$$

При $\zeta_0 = 1$ матимемо

$$\begin{aligned} z_3(\zeta) = & \frac{\rho}{4\pi\kappa\delta_1\delta_2(1+\kappa)} \left[A_1 + B_1\zeta + \frac{\delta_1\kappa}{\zeta} \ln(1 - \zeta) - \delta_1\zeta \ln(1 - \zeta) - \right. \\ & - \frac{2\delta_1\delta_2\kappa\zeta}{(1 - \zeta)^2} + \frac{(\kappa - 1)\delta_2}{1 - \zeta} \Big]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} z_4(\zeta) = & -\frac{\rho}{4\pi\delta_1\delta_2(1+\kappa)} \left[A_2 + B_2\zeta + \frac{\delta_1\kappa}{\zeta} \ln(1 - \zeta) - \delta_1\zeta \ln(1 - \zeta) - \right. \\ & - \frac{2\delta_1\delta_2\kappa\zeta}{(1 - \zeta)^2} - \frac{(\kappa - 1)\delta_2}{1 - \zeta} \Big], \end{aligned}$$

$$\text{де } A_1 = \delta_1 + \delta_2(1-\alpha) + \delta_1(\alpha-1)(\delta_1 + \delta_2);$$

$$B_1 = \delta_1(1-2\delta_1 + \alpha\delta_1 + \alpha\delta_2) + \delta_2(2\delta_1-1);$$

$$A_2 = \delta_1 - \delta_2(1-\alpha) + \delta_1(\alpha-1)(\delta_1 + \delta_2);$$

$$B_2 = \delta_1(1-2\delta_1 + \alpha\delta_1 + 3\alpha\delta_2) - \delta_2(2\delta_1-1).$$

Для визначення функцій $\varphi_{10}(\zeta)$ і $\varphi_{20}(\zeta)$ ще потрібно обчислити інтеграли типу

$$\zeta^{\rho_j+1} \int_0^{\zeta} \frac{z_k(t) dt}{t^{\rho_j+1}}; \quad \zeta^{\rho_j+1} \int_0^{\zeta} \frac{z_k(t) dt}{t^{\rho_j+1}}. \quad (5)$$

Якщо підставити функції (4) в формули (5), одержимо вирази типу

$$J_{\kappa}^j = \zeta^{\Delta} \int_0^{\zeta} \frac{t^{-\Delta} dt}{1-t}, \quad (6)$$

які не обчислюються в кінцевій формі. Тут Δ приймає значення ρ_j+1 або ρ_j-1 .

Для обчислення інтегралів (6) можна скористатися розкладом [2]

$$J_{\kappa}^j = J_{\kappa 1}^j + i J_{\kappa 2}^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n-\Delta}, \quad (7)$$

де

$$J_{\kappa 1}^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n (n-\Delta_{j\kappa})}{(n-\Delta_{j\kappa})^2 + \ell_j^2}; \quad J_{\kappa 2}^j = \ell_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(n-\Delta_{j\kappa})^2 + \ell_j^2}; \quad (8)$$

$$\rho_j = \kappa_j + i\ell_j; \quad \Delta_{j\kappa} = \kappa_j + \kappa - 1; \quad (\kappa=0,2); \quad J_m \zeta = 0.$$

Нижче наводяться кінцеві формули для нормальних напружень в точках дійсної осі Ox при $\alpha = 2$. (Дотичні напруження X_y в цих точках дорівнюють нулеві).

$$\frac{X_x + Y_y}{\rho} = \frac{2}{3\pi} \left\{ \frac{1}{x(1-x)} + \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M'_{j1}(x) - b_{yj} M'_{j2}(x) \right] \right\}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_y - X_x}{\rho} = & \frac{1}{3\pi} \left\{ -\frac{3}{x(1-x)} + (x - \frac{1}{x}) \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M''_{j1}(x) - b_{yj} M''_{j2}(x) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2}{x^3} \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M_{j1}(x) - b_{yj} M_{j2}(x) \right] + \frac{1}{x^2} \sum_{j=1}^4 \left[(a_{2j} + a_{yj}) M'_{j1}(x) - (b_{2j} + b_{yj}) M'_{j2}(x) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тыт

$$\begin{aligned} M_{j1}(x) = & \frac{1}{2\delta_1\delta_2} \left\{ \left[A_1 \left(\frac{D_{y1}^i}{2} d'_1 - \frac{D_{y1}^z}{2} d'_3 \right) + A_2 (D_{y1}^z d'_1 - D_{y1}^i d'_3) \right] x + \right. \\ & + \left[B_1 \left(\frac{D_{y1}^i}{2} d'_2 + \frac{D_{y1}^z}{2} d'_4 \right) - B_2 (D_{y1}^z d'_1 + D_{y1}^i d'_2) \right] x^2 - \\ & - \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) R_j(x) + \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) N_j(x) + T_j J'_{21} + L_j J'_{22} \left. \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_{j2}(x) = & \frac{1}{2\delta_1\delta_2} \left\{ \left[A_1 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} d'_1 + \frac{D_{y1}^i}{2} d'_3 \right) - A_2 (D_{y1}^z d'_1 + D_{y1}^i d'_3) \right] x + \right. \\ & + \left[B_1 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} d'_2 - \frac{D_{y1}^i}{2} d'_4 \right) + B_2 (D_{y1}^i d'_1 - D_{y1}^z d'_2) \right] x^2 - \\ & - \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) N_j(x) - \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) R_j(x) + T_j J'_{22} - L_j J'_{21} \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$d'_1 = \frac{\ell_j}{\kappa_j^2 + \ell_j^2}, \quad d'_2 = \frac{\ell_j}{(1-\kappa_j)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_3 = \frac{\kappa_j}{\kappa_j^2 + \ell_j^2},$$

$$d'_4 = \frac{1-\kappa_j}{(1-\kappa_j)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_5 = \frac{\ell_j}{(\kappa_j+1)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_6 = \frac{\kappa_j+1}{(\kappa_j+1)^2 + \ell_j^2};$$

$$\begin{aligned} T_j = & \left(\frac{D_{y1}^z}{2} + D_{y1}^z \right) \delta_2 - 2 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) (\delta_1 d'_6 + 2\delta_1\delta_2\kappa_j) + \\ & + 2\delta_1 \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) (2\delta_2\ell_j - d'_5); \end{aligned}$$

$$L_j = \left(D_{ij}^i + \frac{D_{ij}^i}{2}\right) \delta_2 + 2\delta_1 \left(D_{ij}^i - \frac{D_{ij}^i}{2}\right) \left(d_6^j + 2\delta_2 \kappa_j\right) + \\ + 2\delta_1 \left(\frac{D_{ij}^z}{2} - D_{ij}^z\right) \left(2\delta_2 \ell_j - d_5^j\right);$$

$$N_j(x) = \delta_1 \left\{ \left(x^2 d_2^j - 2d_5^j\right) \ln(1-x) + x^2 \left[d_2^j J_{01}^j + d_4^j J_{02}^j\right] \right\};$$

$$R_j(x) = \delta_1 \left\{ \left(2d_6^j + x^2 d_4^j\right) \ln(1-x) + \frac{4\delta_2 x}{1-x} + x^2 \left[d_4^j J_{01}^j - d_2^j J_{02}^j\right] \right\};$$

$$c_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}, \quad D_{sj} = D_{sj}^z + i D_{sj}^i = \frac{D_{sj}^*}{D^*}, \quad (s=3,4).$$

Для обчислення напружень в точках $x > 0,5$, і зокрема при $x = 1$, необхідно виділити особливості у виразах (8).

$$J_{\kappa 2}^j = \ell_j \cdot B_{ij}^{\kappa}, \quad J_{\kappa 1}^j = \alpha_{j\kappa} \cdot B_{ij}^{\kappa} - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2) B_{2j}^{\kappa} - \ln(1-x);$$

$$B_{ij}^{\kappa} = (1 + 2\alpha_{j\kappa}) [A_{2j}^{\kappa} + D(x)] - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2) A_{ij}^{\kappa} + 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x),$$

$$B_{2j}^{\kappa} = A_{2j}^{\kappa} + D(x); \quad D(x) = \frac{3}{4x} - \frac{1}{6} - \frac{(1-x)^2}{2x^3} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}; \quad (11)$$

$$A_{ij}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]},$$

$$A_{2j}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n [6 + n(5 + 2\alpha_{j\kappa}) - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2)]}{(n+1)(n+2)(n+3)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]},$$

$$A_{3j}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \{6 + 2n^2(3 + \alpha_{j\kappa}) + n[11 - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2)]\}}{n(n+1)(n+2)(n+3)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]}.$$

Це дає можливість визначити напружений стан в точці $x = 1$ підкріпленого краю диска, де прикладена зосереджена сила. В цій точці воі напруження кінцеві при $\delta_1 \neq 0$ та $\delta_2 \neq 0$.

За допомогою ЕОМ "Мінськ-22" визначено напруження в точках дійсної осі для варіантів значень відносних жорсткостей ребра на розтяг (δ_1) та згин ($\delta_2 = \lambda \delta_1$), які наведені нижче.

Варі- ант	δ_1	λ	Варі- ант	δ_1	λ	Варі- ант	δ_1	λ
1	0,1	0,001	6	5	0,004	10	5	0,1
2	0,1	0,004	7	10	0,001	11	5	0,01
3	1	0,001	8	10	0,004	12	10	0,1
4	1	0,004	9	1	0,1	13	10	0,01
5	5	0,001						

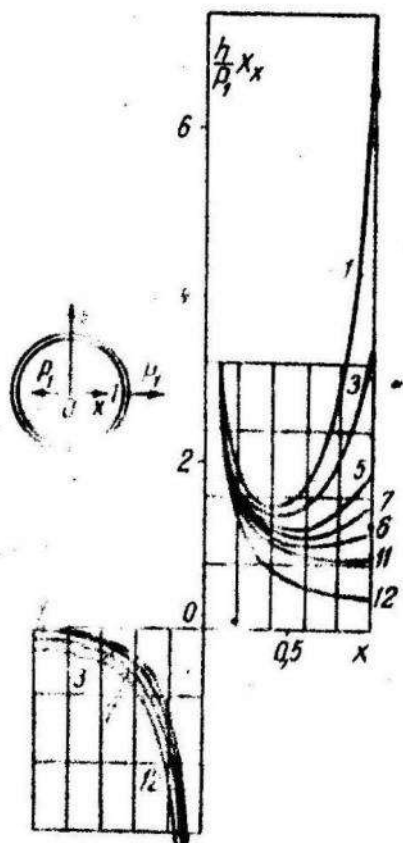


Рис. 1.

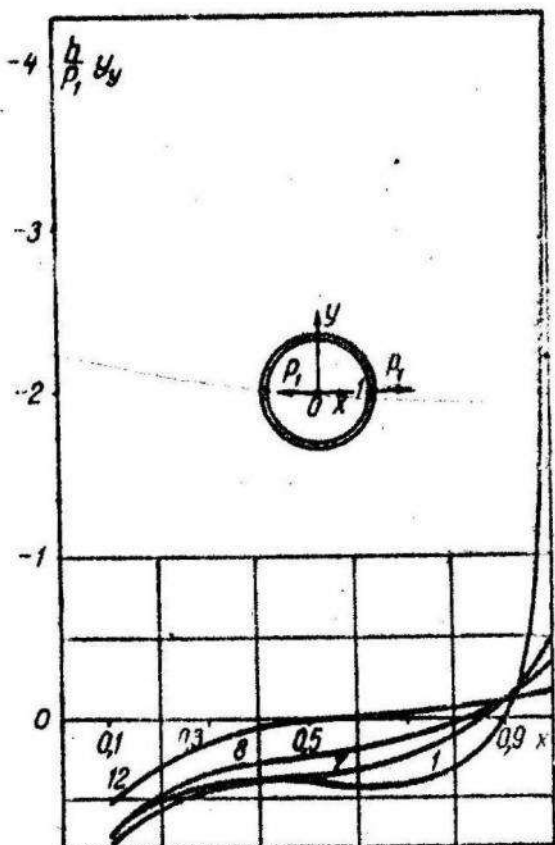


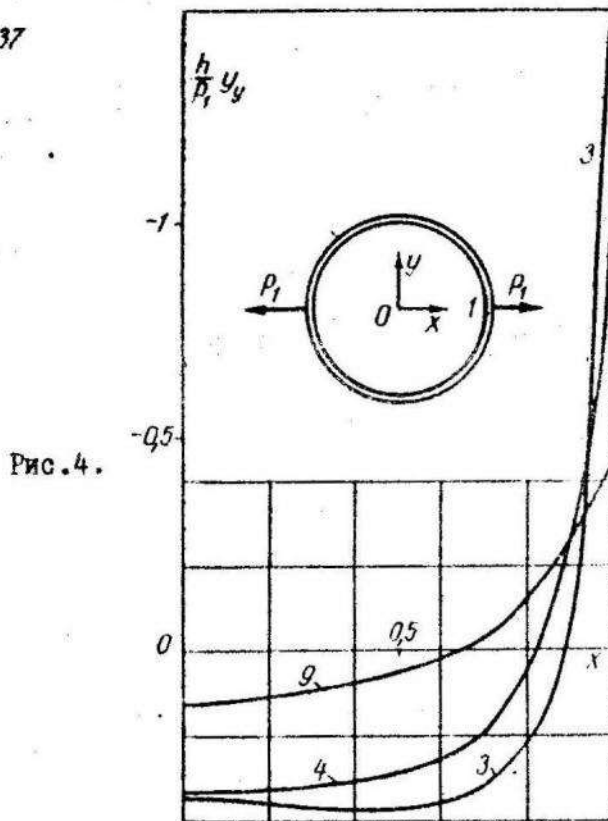
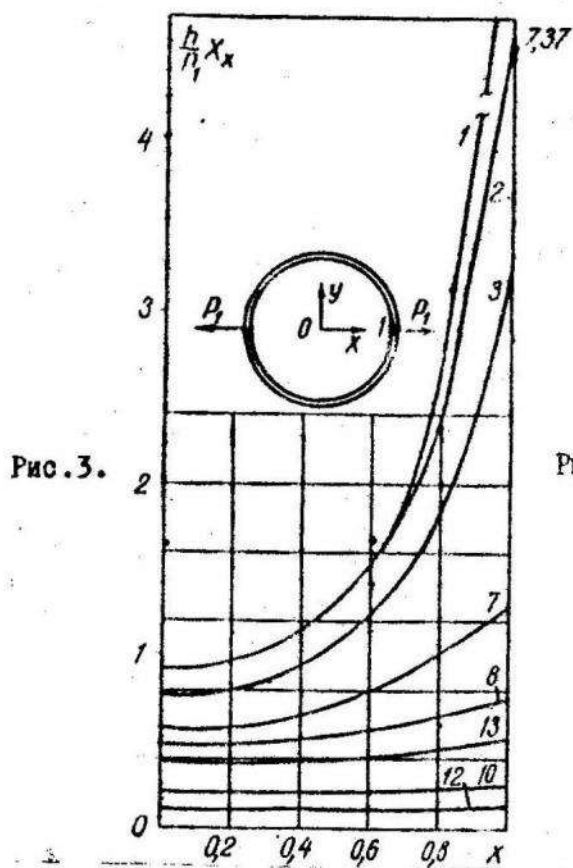
Рис. 2.

На рис. 1 і 2 побудовано графіки розподілу нормальних напружень вздовж дійсної осі диска в залежності від значень жорсткостей підкріплюючого ребра. (Номери кривих на рисунках відповідають варіантам). Порівняння цих результатів з прикладом статті [5], з якому не враховувалась жорсткість підкріплюючого ребра на згин, показує, що вплив величин δ_2 значний, тобто у розглядуваному випадку зосередженого навантаження на ребро не можна нехтувати його жорсткістю на згин.

Для невідкріпленого диска ($\delta_1 = \delta_2 = 0$) задача розв'язана в роботі [3]. У випадку $\zeta_0 = 1$ в роботі [1] розв'язана задача для диска, край якого підкріплений широким пружним кільцем.

Методом накладання одержано розв'язок задачі про дію двох зосереджених сил, прикладених по краях диска з підкріпленим краєм. Результати обчислення напружень для такого диска зображені на рис. 3, 4.

Графіки на рис. 1-4 неочіно ілюструють вплив відповідних жорсткостей ребра на розподіл напружень в диску.



Л і т е р а т у р а

1. Д. В. В а й н б е р г. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1952.
2. Д'а н д е р с, К. Ф у к у и, Т. Ф у к у и. Действие сосредоточенной силы вблизи гладкого кругового включения. Прикладная механика. Труды Американского общества инженеров-механиков, том 33, серия E, № 4, 1966.
3. Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
4. Н. П. Ф л е й ш м а н, Н. В. С т а р о в о й т е н к о. Пружна рівновага пластинки з підкріпленою круговою границею. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз., хім. і мех.-мат., 1968.
5. Н. П. Ф л е й ш м а н, Н. В. С т а р о в о й т е н к о. Обобщенная граничная задача для пластинки с подкрепленным краем. Прикладная механика, т. 3, вып. 12, 1967.

—0—

удк 683.3

І.О.МІЩЕНКО, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗГИН КУСОЧНО-ОДНОРІДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ

Розглянемо тонку ізотропну плиту, середина площина якої займає область S , обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 та L_2 . Ця область співфокусним еліпсом L_0 розділяється на дві підобласті S_1, S_2 , що відповідають двом різним матеріалам. Надалі всі величини, які відносяться до області S_1 , будемо відмічати індексом "1", а величини, що відносяться до S_2 - індексом "2". На зовнішньому контурі L_1 діють рівномірно розподілені згинальні моменти інтенсивності M , а внутрішній контур плити L_2 або вільний від дії зовнішніх зусиль, або жорстко закріплений.