Л і т е р а т у р а

1. Д. В. В а й н б е р г. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1952.

2. Д'а н д е р с, К. Ф у к у и, Т. Ф у к у и. Действие сосредоточенной силы вблизи гладкого кругового включения. Прикладная механика. Труды Американского общества инженеров-механиков, том 33, серия Е, № 4, 1966.

3. Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

4. Н. П. Ф л е й ш м а н, Ж. В. С т а р о в о й т е н к о. Пружна рівновага пластинки з підкріпленою круговою границею. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз., хім. і мех.-мат., 1968.

5. Н. П. Ф л е й ш м а н, Ж. В. С т а р о в о й т е н к о. Обобщенная граничная задача для пластинки с подкрепленным краем. Прикладная механика, т. 3, вып. 12, 1967.

—o—

УДК 593.3

І.О.МІЩЕНКО, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗГИН КУСОЧНО-ОДНОРІДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ

Розглянемо тонку ізотропну плиту, серединна площина якої займає область S, обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 та L_2. Ця область співфокусним еліпсом L_0 розділяється на дві підобласті S_1, S_2, що відповідають двом різним матеріалам. Надалі всі величини, які відносяться до області S_1, будемо відмічати індексом "I", а величини, що відносяться до S_2 - індексом "2". На зовнішньому контурі L_1 діють рівномірно розподілені згинальні моменти інтенсивності M, а внутрішній контур плити L_2 або вільний від дії зовнішніх зусиль, або жорстко закріплений.

Зробимо конформне відображення області S на концентричне кільце з радіусами $\rho_2 = 1$, $\rho_1 > 1$ (еліпсу L_0 відповідає коло радіуса ρ_0) за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \tag{1}$$

де

$$R = \frac{a_2 + b_2}{2}; \qquad m = \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2}; \qquad \rho_2 = 1;$$

$$\rho_1 = \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}; \qquad \rho_0 = \frac{a_0 + b_0}{a_2 + b_2};$$

a_j, b_j – півосі співфокусних еліпсів L_j.

Головний вектор і головний момент зовнішніх зусиль на кожному з контурів дорівнюють нулю, а тому функції напружень голоморфні у відповідних підобластях, і інтегральні співвідношення для визначення функцій $\Phi_\kappa(\zeta)$, $\Psi_\kappa(\zeta)$ в перетвореній області, згідно з [1], мають вигляд

$$\sum_{\kappa=1}^{2} D_\kappa (1-\nu_\kappa)\Big\{ n_\kappa \int_{\gamma_\kappa} \overline{F(\sigma)}\, \Phi_\kappa(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma + æ_\kappa \int_{\gamma_0} \overline{F(\sigma)}\, \Phi_\kappa(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma - \tag{2}$$

$$- \int_{\gamma_\kappa+\gamma_0} \overline{\Phi_\kappa(\sigma)}\,\omega(\sigma)\, d\overline{F(\sigma)} \Big\} = (M + iN_1)\int_{\gamma_1} \overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)d\sigma;$$

$$\sum_{\kappa=1}^{2} \Big[n_\kappa \int_{\gamma_\kappa} \overline{F(\sigma)}\, \Phi_\kappa(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma + \int_{\gamma_0} \overline{F(\sigma)}\, \Phi_\kappa(\sigma)\omega'(\sigma)d\sigma - \tag{3}$$

$$- \int_{\gamma_\kappa+\gamma_0} \overline{\Phi_\kappa(\sigma)}\,\omega(\sigma)\, d\overline{F(\sigma)} \Big] = \frac{M + iN_1}{D_1(1-\nu_1)}\int_{\gamma_1} \overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)d\sigma;$$

$$\int_{\gamma_\kappa+\gamma_0} F(\sigma)\,\overline{\Psi_\kappa(\sigma)}\,\overline{\omega'(\sigma)}\,\overline{d\sigma} = -(n_\kappa - \varkappa_\kappa)\int_{\gamma_\kappa} F(\sigma)\,\Phi_\kappa(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\int_{\gamma_\kappa+\gamma_0} \overline{\Phi_\kappa(\sigma)}\,\omega(\sigma)\,dF(\sigma) + \delta_{1\kappa}\frac{M+iN_1}{D_1(1-\nu_1)}\int_{\gamma_1} F(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma + \tag{4}$$

$$+\frac{(-N)^{\kappa-1}}{N-1}\int_{\gamma_0^-} F(\sigma)\Big[(1-\varkappa_1)\,\Phi_1(\sigma)-(1-\varkappa_2)\,\Phi_2(\sigma)\Big]\,\omega'(\sigma)\,d\sigma;$$

$$\delta_{\kappa n} = \begin{cases} 1 & (\kappa = n) \\ 0 & (\kappa \neq n). \end{cases}$$

Тут γ_j - коло з радіусом ρ_j ; σ - афікс точки контура перетвореної області; N_1 - дійсна постійна, яку треба ще визначити; $N = D_1(1-\nu_1)/D_2(1-\nu_2)$, Значення $n_j = \varkappa_j = -(3+\nu_j)/(1-\nu_j)$ відповідає вільному внутрішньому контуру, а при жорсткому закріпленні контура треба взяти $n_2 = 1$.

Функції $\Phi_j(\zeta), \Psi_j(\zeta), F(\zeta)$, голоморфні в кругових кільцях, розкладаються в ряди Лорана

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n; \qquad \Phi_2(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \zeta^n;$$

$$\Psi_1(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \zeta^n; \quad \Psi_2(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \zeta^n; \quad F(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \zeta^n. \tag{5}$$

Коефіцієнти A_n , B_n , C_n , H_n , завдяки геометричній та силовій симетрії задачі відносно обох осей координат, будуть всі дійсними, причому не рівними нулю лише з парними індексами.

Підставивши (5), (1) в співвідношення (2)-(4) і виконавши інтегрування вздовж відповідних контурів, вважаючи при цьому всі E_n, крім E_{2k+1}, рівними нулю, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу функцій $\Phi_j(\zeta)$, $\Psi_j(\zeta)$:

$$D_1(1-\nu_1)\Big[\varkappa_1(\rho_1^{4k+2}-\rho_0^{4k+2})(A_{2k}-mA_{2k+2})+(2k+1)\times \\ \times(\rho_1^2-\rho_0^2)\Big(A_{-2k}-\frac{m}{\rho_0^2\rho_1^2}A_{-2k-2}\Big)\Big]+D_2(1-\nu_2)\Big[(\varkappa_2\rho_0^{4k+2}-n_2)\times \\ \times(B_{2k}-mB_{2k+2})+(2k+1)(\rho_0^2-1)\Big(B_{-2k}-\frac{m}{\rho_0^2}B_{-2k-2}\Big)\Big]= \\ =(M+iN_1)\Big(\rho_1^2\delta_{k0}-\frac{m}{\rho_1^2}\delta_{-1k}\Big); \tag{6}$$

$$(\varkappa_1\rho_1^{4k+2}-\rho_0^{4k+2})(A_{2k}-mA_{2k+2})+(2k+1)(\rho_1^2-\rho_0^2)\times \\ \times\Big(A_{-2k}-\frac{m}{\rho_0^2\rho_1^2}A_{-2k-2}\Big)+(\rho_0^{4k+2}-n_2)(B_{2k}-mB_{2k+2})+ \\ +(2k+1)(\rho_0^2-1)\Big(B_{-2k}-\frac{m}{\rho_0^2}B_{-2k-2}\Big)=\frac{M+iN_1}{D_1(1-\nu_1)}\Big(\rho_1^2\delta_{k0}-\frac{m}{\rho_1^2}\delta_{-1k}\Big); \tag{7}$$

$$(\rho_0^{4k+4}-\rho_1^{4k+4})(C_{2k}-mC_{2k+2})=(2k+1)\Big[(\rho_1^{4k}-\rho_0^{4k})mA_{2k}+ \\ +(\rho_1^{4k+4}-\rho_0^{4k+4})A_{2k+2}\Big]-\frac{1}{N-1}\Big[(1-\varkappa_1)(A_{-2k-2}-mA_{-2k})- \\ -(1-\varkappa_2)(B_{-2k-2}-mB_{-2k})\Big]+\frac{M+iN_1}{D_1(1-\nu_1)}(\delta_{-1k}-m\delta_{0k}); \tag{8}$$

$$(1-\rho_0^{4k+4})(H_{2k}-mH_{2k+2})=(2k+1)\Big[(\rho_0^{4k}-1)mB_{2k}+$$

$$+(\rho_0^{4k+4}-1)B_{2k+2}\Big]+(n_2-\varkappa_2)(B_{-2k-2}-mB_{-2k})- \qquad (9)$$

$$-\frac{N}{N-1}\Big[(1-\varkappa_1)(A_{-2k-2}-mA_{-2k})-(1-\varkappa_2)(B_{-2k-2}-mB_{-2k})\Big]$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots).$$

Системи (6), (7) служать для визначення коефіцієнтів A_n і B_n. Коефіцієнти розкладу функції $\Psi_1(\zeta)$ знаходяться з системи рекурентних залежностей (8) і (9).

З умови однозначності прогину

$$\mathcal{J}_m\int_{\gamma_1}\omega(\sigma)\,\Psi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma=\mathcal{J}_m\left(C_{-2}-m^2C_2\right)=0 \qquad (10)$$

випливає, що стала N_1 повинна дорівнювати нулеві.

<u>Приклад.</u> Плита складається із зовнішнього мідного кільця S_1 і внутрішнього стального кільця S_2 з пружними сталими

$E_1 = 1,1\cdot 10^6$ кг/см^2; $\nu_1 = 0,32$; $E_2 = 2,1\cdot 10^6$ кг/см^2; $\nu_2 = 0,26$.

Внутрішній край стального кільця L_2 вільний від дії зовнішніх зусиль, тому $n_2 = -(3+\nu_2)/(1-\nu_2)$.

Обчислення проводиться для таких геометричних характеристик плити:

$$a_2 = 3b_2,\quad b_0=\sqrt{3}\,b_2,\quad b_1 = 3b_2.$$

В цьому випадку, згідно з (1), $m = 0,5$; $\rho_2 = 1$; $\rho_0 = 1,262$; $\rho_1 = 1,781$.

Бралося по II коефіцієнтів A_n і B_n $(\max|n|=10)$ і розв'язувалась укорочена система з 22 рівнянь на ЕОМ "Минск-22".

В таблиці наведені числові значення згинальних моментів M_θ в окремих точках зовнішнього і внутрішнього країв плити, а також значення моментів M_θ і M_ρ на лінії спаю L_o.

θ°	На спаю L_o			На L_1	На L_2
	M_ρ	$M_\theta^{(1)}$	$M_\theta^{(2)}$	$M_\theta^{(1)}$	$M_\theta^{(2)}$
0	0,607	3,036	5,582	2,184	8,206
10	0,677	2,832	5,170	2,127	7,155
20	0,818	2,364	4,226	1,973	5,155
30	0,916	1,900	3,307	1,769	3,844
40	0,917	1,594	2,721	1,565	3,269
50	0,857	1,416	2,403	1,390	2,828
60	0,787	1,298	2,201	1,253	2,549
70	0,722	1,226	2,087	1,153	2,501
80	0,668	1,205	2,066	1,090	2,422
90	0,645	1,206	2,075	1,068	2,340

Література

1. Т. Л. Мартинович, И. А. Нищенко. Об изгибе тонких изотропных плит и плит с подкрепленным краем. Материалы УII Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. "Наука", М., 1969.

2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

3. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.

—о—