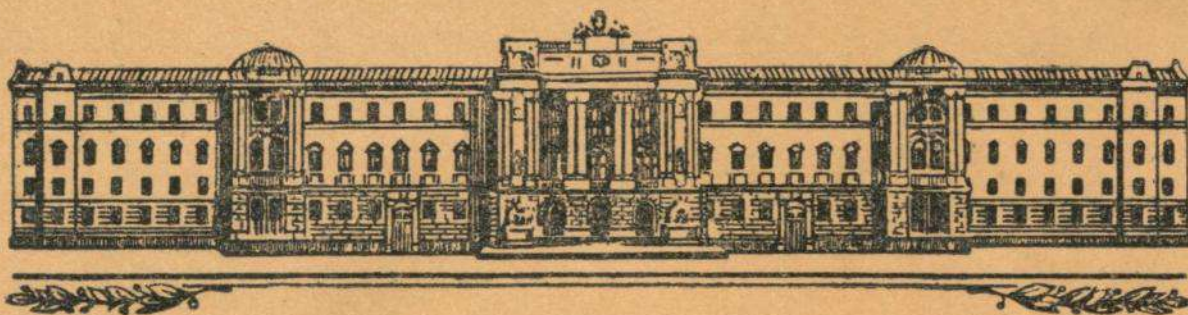




ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 6

1971

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 6

ВИДАВІНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Львів — 1971

Друкується за рішенням редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

УДК 51

У збірнику вміщено статті з теорії функцій, диференціальних рівнянь, геометрії, алгебри і теорії пружності.

Розрахований на наукових працівників.

Редакційна колегія:

Гольдберг А. А., Гриліцький В. Д., Кованько О. С. (відп. редактор), Костенко В. Г., Костовський О. М., Мартинович Т. Л. (відп. секретар).

О.С.КОВАНЬКО

ПРО ОДНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОХ КЛАСІВ
УЗАГАЛЬНЕНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В нашій статті "Взаимоотношение различных обобщений почти периодических функций" (Изв. НИИММ Томск. ун-та, т. 3, вып. 1, 1946) було побудовано дев'ять підкласів відомих S_p , W_p і B_p класів майже періодичних функцій (див. стор. 12). Два з цих підкласів, логічно різних, виявились збіжними.

Покажемо конкретно про що йде мова. Для цього пригадаємо деякі означення і позначення.

Розглянемо такі метрики в просторі функцій, які означені на всій дійсній осі:

$$D_{S_p}^{\ell E}(\varphi, \psi) = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left\{ \frac{1}{\ell} \int_{E(x, x+\ell)} |\varphi(t) - \psi(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (p > 1),$$

$$D_{W_p}^E(\varphi, \psi) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} D_{S_p}^{\ell E}(\varphi, \psi).$$

Також розглянемо дві щільності множини (вимірної і необмеженої, яка лежить на осі ОХ):

$$\delta_S^{\ell E} = D_{S_1}^{\ell E}(1, 0); \quad \delta_W^E = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \delta_S^{\ell E}.$$

Будемо скорочено позначати тригонометричний поліном загального вигляду $\sum_{n=1}^m \alpha_n e^{i\lambda_n x}$ через $S_m(x)$.

Відзначимо ряд означень і властивостей узагальнених майже періодичних функцій і функцій, які означені на всій дійсній осі ОХ.

Означення 1. $f(x) \in (S_p$ майже періодична (м. п.)), якщо для будь-яких чисел $\varepsilon > 0$ і $\ell > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $D_{S_p}^{\ell E}(f, S_n) < \varepsilon$ для будь-якої множини E .

Означення 2. $f(x) \in (W_p$ м.п.), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $D_{W_p}^E(f, S_n) < \varepsilon$ для будь-якої множини E .

Означення 3. $f(x) \in (\{S_p\}$ рівномірно сумована (р.с.)), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, що

$$\begin{cases} D_{S_p}^{\ell E}(f, 0) < \varepsilon, & \text{якщо } \delta_s^{\ell} E < \sigma, \\ D_{W_p}^E(f, 0) < \varepsilon, & \text{якщо } \delta_w E < \sigma, \end{cases}$$

Означення 4. $f(x) \in \{\tilde{S}_w\}$ майже періодична ($\tilde{S}_w$ м.п.), якщо для будь-якого додатного $\ell > \varepsilon > 0$ можна знайти такий поліном $S_n(x)$, що $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, за винятком хіба такої множини E , що

$$\begin{cases} \delta_s^{\ell} E < \varepsilon, \\ \delta_w E < \varepsilon, \end{cases}$$

Властивість 1. $(S_p \text{ м.п.}) \subset (W_p \text{ м.п.})$.

Властивість 2. $[(\tilde{S} \text{ м.п.}) \cap (S_p \text{ р.с.})]$ є клас, який збігається з класом $(S_p \text{ м.п.})$.

Властивість 3. $\{\text{Клас } (\tilde{S} \text{ м.п.}) \cap (W_p \text{ м.п.})\} \subset \{\text{клас } W_p \text{ м.п.}\}$.

Основна теорема. Класи $[(\tilde{S} \text{ м.п.}) \cap (S_p \text{ р.с.})]$ і клас $[(\tilde{S} \text{ м.п.}) \cap (W_p \text{ р.с.})]$ тотожні.

Вказівка. Доведення даного твердження ґрунтується на такому співвідношенні:

$$\left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^{\frac{1}{\ell_2}} D_{S_p}^{\ell_1 E}(\varphi, \psi) \leq D_{S_p}^{\ell_2 E}(\varphi, \psi), \quad \text{якщо } (\ell_1 < \ell_2).$$

А.А.ГОЛЬДБЕРГ, М.М.ПЕРЕМЕТА

ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(z)$ — ціла функція. Корені рівняння $f(z) = z$ називаються нерухомими точками функції $f(z)$. Нерухома точка a функції $f(z)$ називається відтовхуючою, індиферентною або притягуючою, яка відповідно виконується $|f'(a)| > 1$, $|f'(a)| = 1$ або $|f'(a)| < 1$.

В роботі [1] доведено, якщо ріст цілої функції $f(z)$ не перевищує мінімального типу порядку $\frac{1}{2}$, то $f(z)$ має нескінченну кількість відтовхуючих або індиферентних точок. В [1] побудовано також приклад, який показує, що для цілих функцій нормального типу порядку $\frac{1}{2}$ це твердження не виконується: всі нерухомі точки можуть бути притягуючими.

Нижче ми побудуємо приклади цілих функцій порядку $\rho > \frac{1}{2}$, в яких число відтовхуючих та індиферентних точок скінченне. Ми будемо користуватись функцією Міттаг-Леффлера (див., наприклад, [2])

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \frac{k}{\rho})}, \quad \frac{1}{2} < \rho < \infty,$$

яка є цілою функцією порядку ρ . Як відомо ([2], стор. 134), для функції $E_\rho(z)$ при $\rho > \frac{1}{2}$ мають місце такі асимптотичні співвідношення:

$$E_\rho(z) = \begin{cases} \rho e^{z^\rho} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1 - \frac{k}{\rho})} + O(|z|^{-1-\nu}), & \text{якщо } |\arg z| \leq \alpha; \\ -\sum_{k=1}^{\nu} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1 - \frac{k}{\rho})} + O(|z|^{-1-\nu}), & \text{якщо } \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \quad (1)$$

де α — довільне дійсне число, яке задовольняє умову

$$\frac{\pi}{2\rho} < \alpha < \min\left(\pi, \frac{\pi}{\rho}\right). \quad (2)$$

Відомо також ([2], стор. 142), що для нулів a_k функції $E_\rho(z)$ при $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, $\rho \neq 1$ справджується

$$a_k = |a_k| \exp\left(\pm i \left\{ \frac{\pi}{2\rho} + o(1) \right\}\right), \quad (3)$$

де $|a_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Використовуючи формулу Коші для похідних аналітичних функцій, легко довести, що асимптотичну формулу (1) можна диференціювати, причому

$$E_\rho(z) = \begin{cases} P(z)e^{z^\rho} - (-1)^\nu \frac{\nu!}{z^{\nu+1}\Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|z|^{\nu+2}}\right), & \text{якщо } |\arg z| \leq \alpha; \\ -(-1)^\nu \frac{\nu!}{z^{\nu+1}\Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|z|^{\nu+2}}\right), & \text{якщо } \alpha \leq |\arg z| \leq \pi, \end{cases} \quad (4)$$

де $\nu = 1, 2, 3, \dots$, $P(z)$ - функція виду $P(z) = b_0 z^{\mu_0} + \dots + b_m z^{\mu_m}$, $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_m$, а α задовольняє умову (2). Легко показати (порівн. [2], стор. 143), що нулі функції $E_\rho^{(\nu)}(z)$ мають асимптотику (3).

Перейдемо тепер до наших прикладів. Ми будемо розрізняти три випадки: 1) $\frac{1}{2} < \rho < 1$, 2) $1 < \rho < 2$, 3) $2 \leq \rho < \infty$. Для випадків $\rho = 1$ і $\rho = \infty$ прикладами можуть служити функції $z + e^z$ та $z + e^{e^z}$, які взагалі не мають нерухомих точок.

1°. П е р ш и й в и п а д о к. Розглянемо функцію $\varphi(z) = z - E_\rho(z)$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Нерухомі точки функції $\varphi(z)$ будуть нулями функції $E_\rho(z)$ і матимуть асимптотику (3). Далі $\varphi'(z) = 1 - E_\rho'(z)$ і, використовуючи (1), маємо

$$\rho e^{a_k^\rho} = \frac{1}{a_k \Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right),$$

звідки

$$\begin{aligned}\varphi'(a_k) &= 1 - \rho e^{a_k^{\frac{1}{\rho}}} \rho a_k^{\frac{1}{\rho}-1} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right) = \\ &= 1 - \frac{\rho a_k^{\frac{1}{\rho}-2}}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|a_k|^2}\right) = 1 - \frac{\delta_k}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho})},\end{aligned}\quad (5)$$

де, внаслідок (3),

$$\delta_k = (1+o(1))|a_k|^{\frac{1}{\rho}-2} \exp\left(\pm i\left\{\pi\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\right)+o(1)\right\}\right).$$

Враховуючи, що $\frac{1}{2} < \rho < 1$, а отже $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) < 0$, стає очевидним, що $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, і всі точки $-\delta_k / \Gamma(1-\frac{1}{\rho})$, за винятком найбільш скінченного числа, лежать в крузі $|z+1| < 1$, і для всіх k , починаючи з деякого, виконується

$$|\varphi'(a_k)| < 1, \quad (6)$$

тобто функція $\varphi(z)$ може мати хіба що скінченну кількість відбитовхучих та індиферентних точок.

З а у в а ж е н н я. Можна показати, що наша функція має скінченне додатне число відбитовхучих точок принаймні при ρ , досить близьких до $\frac{1}{2}$.

2°. **Д р у г и й в и п а д о к.** У цьому випадку розглядаємо ту ж саму функцію, що і в першому випадку, але при $1 < \rho < 2$, і аналогічно одержуємо (5), де $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В цьому випадку $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) > 0$ і для всіх k , починаючи з деякого, виконується нерівність (6).

3°. **Т р е т і й в и п а д о к.** Якщо $\rho \geq 2$, то ми розглянемо функцію $\varphi(z) = z + E_p^{(\nu-2)}(z)$, де ν - деяке непарне число таке, що $\rho < \nu < 2\rho$ (таке число існує, бо $\rho \geq 2$). Нерухомими точками функції $\varphi(z)$ будуть нулі функції $E_p^{(\nu-2)}(z)$, і ці нерухомі точки матимуть асимптотику (3). Далі

$$\begin{aligned}
\varphi'(a_k) &= 1 + \rho(a_k) e^{a_k^\rho} \left(\frac{\rho'(a_k)}{\rho(a_k)} + \rho a_k^{\rho-1} \right) (-1)^{k-1} \frac{(\nu-1)!}{a_k^\nu \Gamma(1-\frac{1}{\rho})} + O\left(\frac{1}{|a_k|^{\nu+1}}\right) = \\
&= 1 + (-1)^{k-2} \frac{(\nu-2)!}{a_k^{\nu-1} \Gamma(1-\frac{1}{\rho})} \left\{ O\left(\frac{1}{|a_k|}\right) + \rho a_k^{\rho-1} \right\} + O\left(\frac{1}{|a_k|^\nu}\right) = \\
&= 1 - \frac{\rho(1+o(1))(\nu-2)!}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) a_k^{\nu-\rho}} = 1 - \delta'_k \exp\left(\pm i \left\{ (\nu-\rho) \frac{\pi}{2\rho} + o(1) \right\}\right),
\end{aligned}$$

де $\delta'_k = \frac{\rho(1+o(1))(\nu-2)!}{\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) |a_k|^{\nu-\rho}} > 0$, бо $\Gamma(1-\frac{1}{\rho}) > 0$ при $\rho \geq 2$

і $\delta'_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тому що при $\rho < \nu < 2\rho$ виконується

$$0 < (\nu-\rho) \frac{\pi}{2\rho} + o(1) < \frac{\pi}{2}, \text{ починаючи з деякого } k, \text{ то величина}$$

$$\delta'_k \exp\left(\pm i \left\{ (\nu-\rho) \frac{\pi}{2\rho} + o(1) \right\}\right) \text{ при } k \geq k_0 \text{ лежить в } |z-1| < 1,$$

звідки одержуємо (6). Значить, $\varphi(z)$ не може мати більше, ніж скінченну кількість відитовхуючих та індиферентних точок.

Зауважимо, що при нецілому ρ , $\frac{1}{2} < \rho < \infty$, ми не спроможні вказати цілу функцію порядку ρ , яка мала б лише притягуючі точки.

Л і т е р а т у р а

1. J. E. Whittington. On the fixpoints of entire functions. Proc. London Math. Soc., vol. 17, 1967, 530-546.

2. М. М. Д ж р б а ш я н. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. "Наука", М., 1966.

—0—

І.Д.КВІТ

УТОЧНЕННЯ ЗВОРотної ФОРМУЛИ
ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

1. Вступ. Розглянемо n -вимірний евклідовий простір точок $(x_1, \dots, x_n)$, $(-\infty < x_k < +\infty; k=1, 2, \dots, n; n=1, 2, \dots)$. Декартів добуток n інтервалів вигляду $(a_k, b_k] = \{a_k < x_k \leq b_k\}$, $(-\infty \leq a_k < b_k \leq +\infty; k=1, 2, \dots, n)$ назовемо n -вимірним інтервалом і позначимо його через J_n :

$$J_n = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n] = \{a_k < x_k \leq b_k; k=1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

Нехай система n випадкових змінних $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ приймає значення з нашого евклідового простору. Тоді її називаємо n -вимірною випадковою змінною або n -вимірним випадковим вектором. Функція розподілу n -вимірної випадкової змінної $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\} \quad (2)$$

1°. n -вимірно неспадна, це значить, для довільного n -вимірного інтервалу (1) невід'ємною є різниця

$$F(b_1, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^n F(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} F(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, a_j, b_{j+1}, \dots, b_n) - \dots + (-1)^n F(a_1, \dots, a_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} dF(x_1, \dots, x_n) = P\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in J_n\};$$

2°. n -вимірно правобічно неперервна, тобто для довільних незростаючих послідовностей $x_k^{(1)} \geq x_k^{(2)} \geq \dots$, збіжних до x_k , ($k=1, 2, \dots, n$),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} F(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) = F(x_1, \dots, x_n);$$

3°. для кожного n , ($n=1, 2, \dots, n$), при довільних $x_1, \dots, x_{n-1}$, $x_{n+1}, \dots, x_n$, задовольняє співвідношення

$$\lim_{x_k \rightarrow -\infty} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

та для довільних неспадних послідовностей $x_k^{(1)} \leq x_k^{(2)} \leq \dots$, збіжних до безмежності ($k = 1, 2, \dots, n$), задовольняє співвідношення

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) = 1.$$

Характеристичною функцією $f(s_1, \dots, s_n)$ n -вимірної випадкової змінної $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, з функцією розподілу (2), називається інтегральне перетворення Фур'є-Стільт'єса вигляду

$$f(s_1, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n)} d\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

$$(i = \sqrt{-1}; -\infty < s_1, \dots, s_n < \infty),$$

де інтеграл (3) розуміємо в сенсі Радона-Стільт'єса.

У теорії ймовірностей використовують зворотну формулу, відповідну (3), для довільного "інтервалу з неперервністю на границях" (див., наприклад, [1], стор. 235 та [2], стор. 229). Уточнимо зворотну формулу, відповідну (3), на всі значення $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ і розглянемо наслідки з цього.

2. Обмежник. З математичного аналізу відомо, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha, \quad (4)$$

де

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} -1, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ +1, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (5)$$

З (4) випливає, що

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\pi i x} dx = \operatorname{sgn} \alpha, \quad (6)$$

де (V.P.) = valor principalis = головне значення (Коші), тобто

$$(V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c, \quad c > 0.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{i\alpha x}}{\pi i x} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-c}^0 + \int_0^c \right\} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{\pi i x} dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{sgn} \alpha. \end{aligned}$$

Відмітимо, що (5), а значить і (6), в околі ненульових значень аргумента приймає єдине значення, а в околі нуля — три значення. Значення (6), при нульовій вартості аргумента, нам надалі ніколи не буде потрібне. Треба буде тільки або значення *с п р а в а* від нуля, або *з л і в а* від нуля. Тому замість (6) символічно писатимемо:

$$\text{або} \quad (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha+0)x}}{\pi i x} dx = \operatorname{sgn}(\alpha+0) = \begin{cases} -1, & \alpha < 0, \\ +1, & \alpha \geq 0, \end{cases} \quad (6')$$

$$\text{або} \quad (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha-0)x}}{\pi i x} dx = \operatorname{sgn}(\alpha-0) = \begin{cases} -1, & \alpha \leq 0, \\ +1, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (6'')$$

Функція (6') — неперервна *с п р а в а*; функція (6'') — неперервна *з л і в а*.

Означення I. **Обмежником** називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $(\alpha, \beta]$ рівна одиниці, а зовні цього інтервалу рівна нулю.

У наступному пункті зустрінемося обмежник

$$J = \frac{\operatorname{sgn}(x-\alpha-0) - \operatorname{sgn}(x-\beta-0)}{2} \quad (7)$$

Означення 2. n -вимірним обмежником називаємо довільну функцію, яка на n -вимірному інтервалі (I) рівна одиниці, а зовні цього інтервалу рівна нулю.

У наступному пункті зустрінемося n -вимірний обмежник

$$J = \prod_{k=1}^n \frac{\operatorname{sgn}(x_k - a_k - 0) - \operatorname{sgn}(x_k - b_k - 0)}{2} \quad (8)$$

Означення 3. Точковим обмежником називаємо довільну функцію, яка в одному пункті C рівна одиниці, а зовні цього пункту рівна нулю.

У дальшому пункті зустрінемося точковий обмежник

$$R = \frac{\operatorname{sgn}(x - c + 0) - \operatorname{sgn}(x - c - 0)}{2} \quad (9)$$

3. Зворотна формула. А. Нехай випадкова змінна ξ має функцію розподілу $F(x)$ та характеристичну функцію $f(s)$. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $(a, b]$, де $-\infty < a < b \leq \infty$, рівний головному значенню інтеграла від добутку характеристичної функції на ядро

$$N(s, a, b) = \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi is}, \quad (10)$$

тобто,

$$F(b) - F(a) = (\text{V. P.}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi is} f(s) ds, \quad (-\infty < a < b \leq \infty). \quad (11)$$

Доведення. Коли врахувати означення (3), при $n = 1$, то правий бік (11) можна записати у формі подвійного інтеграла

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(b+0)}}{2\pi is} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF(x) ds \quad (12)$$

Оскільки в (12) інтеграл відносно x абсолютно збігається, а відносно s межі інтеграла обмежені, то змінимо черговість інтегрування. Одержимо

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-c}^c \frac{e^{-is(a-x+0)} - e^{-is(b-x+0)}}{2\pi is} ds \right\} dF(x). \quad (13)$$

Зважаючи на існування інтеграла (6), можемо (13) записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(a-x+0)} - e^{-is(b-x+0)}}{2\pi is} ds \right\} dF(x) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-a-0) - \operatorname{sgn}(x-b-0)}{2} dF(x). \end{aligned}$$

В останньому інтегралі інтегрованою функцією є обмежник (7); отже, цей інтеграл рівний

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

Зворотна формула (11) - виведена.

Б. Нехай тепер випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ має функцію розподілу $F(x_1, \dots, x_n)$ та характеристичну функцію $f(s_1, \dots, s_n)$. Тоді приріст функції розподілу на інтервалі $J_n = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n]$, де $-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$ ($k=1, 2, \dots, n$), рівний головному значенню інтеграла від добутку характеристичної функції на ядро

$$N(s_1, \dots, s_n; a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{-is_k(a_k+0)} - e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi is_k},$$

тобто

$$P\{\xi \in J_n\} = (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-is_k(a_k+0)} - e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi is_k} f(s_1, \dots, s_n) ds_n \dots ds_1. \quad (14)$$

n -кратний інтеграл справа в (14) розуміємо в сенсі головного значення Коші, тобто $(V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} (n) \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c (n) \int_{-c}^c$, $c > 0$.

Доведення. Коли врахувати означення (3), то правий бік (14) можна записати у формі $2n$ -кратного інтеграла

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \dots \int_{-c}^c \prod_{k=1}^n \frac{e^{-is_k(a_k+0)} - e^{-is_k(b_k+0)}}{2\pi i s_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n)} dF(x_1, \dots, x_n) ds_n \dots ds_1. \quad (15)$$

Оскільки в (15) інтеграли відносно x -ів абсолютно збігаються, а відносно s -ів межі інтегралів обмежені, то змінивши черговість інтегрування. Одержимо

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n \int_{-c}^c \frac{e^{-is_k(a_k-x_k+0)} - e^{-is_k(b_k-x_k+0)}}{2\pi i s_k} ds_k \right\} dF(x_1, \dots, x_n). \quad (16)$$

Зважаючи на існування інтеграла (6), можемо (16) записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is_k(a_k-x_k+0)} - e^{-is_k(b_k-x_k+0)}}{2\pi i s_k} ds_k \right\} dF(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{\operatorname{sgn}(x_k - a_k - 0) - \operatorname{sgn}(x_k - b_k - 0)}{2} \right\} dF(x_1, \dots, x_n).$$

В останньому інтегралі інтегрованою функцією є n -вимірний обмежник (8); отже, останній інтеграл рівний

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} dF(x_1, \dots, x_n),$$

і, з огляду на вираз 1^о п. 1, одержано лівий бік (14). Обернена формула (14) - доведена.

4. Наслідки. Безпосереднім наслідком зворотної формули (14) є n -вимірна теорема єдиності. Характеристична функція (3) о д н о - з н а ч н о визначає свою функцію розподілу $F(x_1, \dots, x_n)$, причому

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\sup a_k \rightarrow -\infty} (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-is_k(a_k+0)} - e^{-is_k(x_k+0)}}{2\pi i s_k} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n. \quad (17)$$

Для доведення (17) досить у зворотній формулі (14) замість b_k прийняти x_k та спрямувати a_k у мінус безмежність для всіх $k = 1, 2, \dots, n$.

Формули (3) і (17) вказують на те, що відповідність між функцією розподілу $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ та характеристичною функцією $f(s_1, \dots, s_n)$ випадкового вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ взаємно однозначна.

Першим безпосереднім наслідком зворотної формули (11) є

Одномірна теорема єдиності. Характеристична функція $f(s)$ однозначно визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$, причому

$$\mathcal{F}(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(a+0)} - e^{-is(x+0)}}{2\pi i s} f(s) ds. \quad (18)$$

Для доведення (18) досить у зворотній формулі (11) замість b прийняти x та спрямувати a в мінус безмежність, або в (17) прийняти $n = 1$.

Другим безпосереднім наслідком зворотної формули (11) є

Теорема про величину стрибка функції розподілу в точці. Нехай випадкова змінна ξ має функцію розподілу $\mathcal{F}(x)$ та характеристичну функцію $f(s)$. Тоді стрибок функції розподілу в точці c рівний

$$\mathcal{F}(c+0) - \mathcal{F}(c-0) = (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-is(c-0)} - e^{-is(c+0)}}{2\pi i s} f(s) ds. \quad (19)$$

Для доведення (19) досить у зворотній формулі (11) замість b прийняти $c+0$, замість a — $c-0$ і повторити доведення (11). При доведенні замість обмежника (7) зустрінеться точковий обмежник (9). Правий бік (19) зводиться до

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-c+0) - \operatorname{sgn}(x-c-0)}{2} dF(x) = \int_{x=c} dF(x) = F(c+0) - F(c-0).$$

Зауважимо, що коли функція розподілу $F(x)$ неперервна в точці c , то інтеграл справа в (19) обертається в нуль.

2. Приклади. 1) Дано характеристичну функцію $f(s) = e^{ics}$. Знайти величину стрибка відповідної функції розподілу в точці $x=c$.

За формулами (19) і (6) одержуємо

$$F(c+0) - F(c-0) = (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(+0)} - e^{is(-0)}}{2\pi is} ds = \frac{\operatorname{sgn}(+0) - \operatorname{sgn}(-0)}{2} = 1.$$

2) Дано характеристичну функцію

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho q^{k-1} e^{iks}.$$

Знайти значення та величину стрибка відповідної функції розподілу в точці $x=4$ та показати, що функція розподілу неперервна в точці $x=\pi$.

За формулами (18) і (6), значення функції розподілу в точці $x=4$ рівне

$$\begin{aligned} F(4) &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho q^{k-1} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(k-\alpha-0)} - e^{is(k-4-0)}}{2\pi is} ds = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho q^{k-1} \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn}(k-4-0)}{2} = \rho(1+q+q^2+q^3). \end{aligned}$$

За формулами (19) і (6), величина стрибка функції розподілу в точці $x=4$ рівна

$$F(4+0) - F(4-0) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho q^{k-1} (V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is(k-4+0)} - e^{is(k-4-0)}}{2\pi is} ds =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho q^{\kappa-1} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\kappa-4+0) - \operatorname{sgn}(\kappa-4-0)}{2} = \rho q^3.$$

Величина стрибка функції розподілу в точці $x = \pi$ рівна

$$F(\pi+0) - F(\pi-0) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \rho q^{\kappa-1} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\kappa-\pi+0) - \operatorname{sgn}(\kappa-\pi-0)}{2} = 0.$$

Отже, $F(x)$ - неперервна в точці $x = \pi$.

3) Дано характеристичну функцію

$$f(s_1, s_2) = e^{\lambda_1(e^{is_1} - 1) + \lambda_2(e^{2is_2} - 1)} =$$

$$= \sum_{\kappa_1=0}^{\infty} \sum_{\kappa_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_1^{\kappa_1}}{\kappa_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{\kappa_2}}{\kappa_2!} e^{is_1 \kappa_1} e^{2is_2 \kappa_2}, \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0).$$

Знайти значення відповідної функції розподілу в точці (2,3).

За формулою (17), значення функції розподілу в точці $(x_1, x_2) = (2, 3)$ рівне

$$F(2, 3) = \sum_{\kappa_1=0}^{\infty} \sum_{\kappa_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_1^{\kappa_1}}{\kappa_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{\kappa_2}}{\kappa_2!} \times$$

$$\times \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow -\infty \\ \alpha_2 \rightarrow -\infty}} (V, \rho) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{is_1(\kappa_1 - \alpha_1 - 0)} - e^{is_1(\kappa_1 - 2 - 0)}}{2\pi i s_1} \cdot \frac{e^{is_2(2\kappa_2 - \alpha_2 - 0)} - e^{is_2(2\kappa_2 - 3 - 0)}}{2\pi i s_2} ds_2 ds_1.$$

З огляду на (6) одержуємо:

$$F(2, 3) = \sum_{\kappa_1=0}^{\infty} \sum_{\kappa_2=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_1^{\kappa_1}}{\kappa_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{\kappa_2}}{\kappa_2!} \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn}(\kappa_1 - 2 - 0)}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{sgn}(2\kappa_2 - 3 - 0)}{2}.$$

Тільки при $\kappa_1 = 0, 1, 2$ та $\kappa_2 = 0, 1$ останні два множники подвійної суми рівні одиниці; при дальших κ_1 та κ_2 вони рівні нулю. Отже,

$$F(2,3) = e^{-\lambda_1 - \lambda_2} (1 + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2})(1 + \lambda_2).$$

Це і є шукане значення функції розподілу в точці (2,3). Легко зауважити, що, взагалі, для точок (x_1, x_2) , $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, одержимо

$$F(x_1, x_2) = e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{k_1=0}^{[x_1]} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \sum_{k_2=0}^{[x_2]} \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!},$$

де $[x]$ - ціла частина з числа x . Коли ж хоча б одне з x_1 , x_2 від'ємно, то $F(x_1, x_2) = 0$.

Л і т е р а т у р а

1. Б. В. Г н е д е н к о. Елементи теорії функцій розподілення випадкових векторів. Успехи мат. наук, вип. 10, 1944.
2. Б. В. Г н е д е н к о. Курс теорії ймовірностей. "Наука", 1965.

—0—

УДК 517.9:538.2

Б.М.КОРДУБА, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ПЛОЩИНИ З ЩІЛИНАМИ

§ 1. Постановка задачі. Розглянемо площину Oxy , в якій розміщено m прямолінійних щілин $L_1, L_2, \dots, L_m$ довільних, але скінченних довжин $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$. Нехай ці щілини розміщені паралельно одній з осей координат, наприклад осі Oy (рис. 1). Необхідно знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє в площині Oxy рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

а на щільностях $L_1, L_2, \dots, L_m$ збігається з заданими на них функціями

$$u|_{L_i} = \varphi_i(y) \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Сформульована задача (1)-(2) є зовнішня задача Діріхле для рівняння Лапласа в необмеженій області.

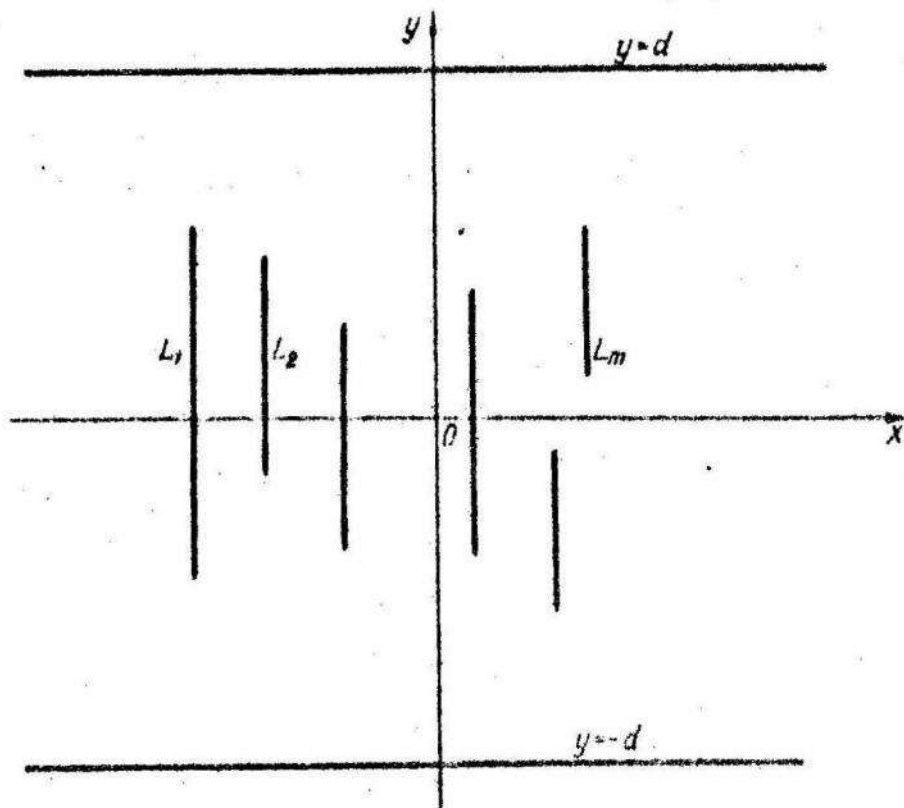


Рис. 1.

З прикладеної точки зору найбільший інтерес становить розв'язок поставленої задачі не в усій площині Oxy , а в тій її частині, де зосереджені щільності. Будемо розглядати розв'язок задачі тільки в такій частині площини.

Для цього замінимо розв'язок задачі (1)-(2) для необмеженої обла-

оті розв'язком такої ж задачі для смуги. Виберемо початок системи координат приблизно в центрі системи щілин. По обидві сторони від осі Ox на деякій віддалі d від неї проведемо паралельні їй прямі. Задачі (1)-(2) будемо розглядати в цій смузі.

В зв'язку з тим, що розв'язок задачі (1)-(2) є функція гармонічна в усій площині Oxy , має місце нерівність

$$\min_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(y) \leq u(x, \pm d) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \varphi_i(y). \quad (3)$$

Щоб з достатньою точністю одержати розв'язок вихідної задачі (1)-(2) в частині області, що нас цікавить, необхідно вивчити:

1) вплив віддалі d ;

2) вплив граничних умов, що будуть задаватися на прямих $y = \pm d$.

Найпростіше на прямих $y = \pm d$ задавати не функцію, а постійну

$$u(x, \pm d) = \alpha. \quad (4)$$

Відправляючись від деякого фіксованого d , збільшуючи і зменшуючи його, а також змінюючи величину α в границях (3), розв'язуємо задачу (1), (2), (4) для різних смуг і різних граничних умов на них. При цьому можна вибрати таке d , що дальше збільшення його, а також зміна величини α не впливають з необхідною точністю на значення шуканої функції в тій частині площини, де зосереджені щілини.

§ 2. Розв'язок задачі методом прямих. Розв'язок задачі (1), (2), (4) замінимо розв'язком еквівалентної їй задачі: знайти функцію $U(x, y)$, що задовольняє всередині смуги, включаючи і щілини $L_1, L_2, \dots, L_m$, рівняння Пуассона

$$\Delta U = -q(x, y), \quad (5)$$

де $q(x, y) = 0$ всюди в полосі $\{-\infty < x < \infty, -d \leq y \leq d\}$, крім щілин, а на щілинах $q(x, y) \neq 0$ і визначається із умов

$$U(x, y) \Big|_{L_i} = u(x, y) \Big|_{L_i} = \varphi_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

Крім цього, шукана функція $U(x, y)$ повинна задовольняти умови на границі полоси

$$U(x, -d) = U(x, d) = u(x, -d) = u(x, d) = \alpha. \quad (7)$$

При знайдених $q(x, y)$ на щілинах із умов (6) розв'язки задач (1), (2), (4) і (5), (7) будуть тотожними всередині розглядуваної смуги. Задача (5), (7) є задача Діріхле для рівняння Пуассона всередині однозв'язної області, що значно простіше в порівнянні з задачею (1), (2), (4) для багатозв'язної області.

Припустивши $q(x, y)$ відомою функцією, задачу (5), (7) будемо розв'язувати методом прямих [1] - [7].

Після застосування P -трансформації до рівняння, що одержується методом прямих [6] із (5), маємо

$$\frac{d^2}{dx^2} V_s(x) - \mu_s^2 V_s(x) = -Q_s(x) - \Omega_s(x), \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} V_s(x) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{l=1}^n U_l \sin \frac{sl\pi}{n+1}, \\ Q_s(x) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{l=1}^n q_l(x) \sin \frac{sl\pi}{n+1}, \\ \Omega_s(x) &= \frac{\alpha}{h^2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{s\pi}{n+1} + \sin \frac{sn\pi}{n+1} \right], \\ \mu_s &= \frac{e}{h} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)} > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Кожне рівняння системи (8) містить лише одну невідому функцію $V_s(x)$ і розв'язується незалежно від інших.

Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є

$$V_s^{(0)}(x) = A_s e^{\mu_s x} + B_s e^{-\mu_s x}. \quad (10)$$

Визначимо тепер функції $q_\alpha(x)$, що входять в праві частини системи (8). В зв'язку з тим, що функція $q(x, y)$ повинна бути рівна нулю всюди, крім щілин L_j ($j=1, 2, \dots, m$), а функції $q_\alpha(x)$ одержуються із неї при перетині прямої з номером α , перпендикулярної до осі Oy , то природно $q_\alpha(x)$ зобразити у вигляді

$$q_\alpha(x) = \sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x) \delta(x - x_\alpha^{(j)}), \quad (11)$$

де m_α - кількість щілин, що перетинаються прямою з номером;

$\delta(x - x_\alpha^{(j)})$ - δ - функція Дірака;

$x_\alpha^{(j)}$ - координата точки перетину α -прямою j -ї щілини;

$q_\alpha^{(j)}(x)$ - невідомі параметри, які знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь, складеної при задоволенні на кожній прямій $y = \alpha$ граничних умов на щілинах

$$\left. U \right|_{L_j} = \varphi_j(y) \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

Враховуючи (9) і (11), система (8) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_s(x)}{dx^2} - \mu_s^2 V_s(x) = & -\sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{\alpha=1}^n \left[\sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x) \delta(x - x_\alpha^{(j)}) \right] \sin \frac{3\alpha\pi}{n+1} - \\ & - \frac{\alpha}{h^2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{s\pi}{n+1} + \sin \frac{sn\pi}{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

В зв'язку з тим, що функція $q(x, y)$ рівна нулю всюди, за винятком щілин, в зовнішній сумі правої частини останнього рівняння сумування фактично ведеться з $\alpha = R$ до $\alpha = \omega$, де α і ω - відповідно номери першої і останньої прямої, що перетинає систему щілин.

Частковий розв'язок рівняння

$$\frac{d^2 V_s(x)}{dx^2} - \mu_s^2 V_s(x) = -\sqrt{\frac{2}{n+1}} q_\alpha^{(j)}(x) \delta(x - x_\alpha^{(j)}) \sin \frac{3\alpha\pi}{n+1} \quad (13)$$

знайдемо в допомогою прямого і оберненого перетворення Фур'є [9]

$$F[V(x)] = W(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{i\rho x} dx, \quad (14)$$

$$F^{-1}[W(\rho)] = V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W(\rho) e^{-i\rho x} d\rho,$$

враховуючи його властивості

$$F[V^{(\kappa)}] = (i\rho)^\kappa F[V] \quad (\kappa = 1, 2, \dots). \quad (15)$$

Тут $F[V^{(\kappa)}]$ - перетворення Фур'є κ -ї похідної функції V . Цей розв'язок набуває вигляду

$$V_{s,\alpha}^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{s\pi}{n+1} q_\alpha^{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\rho(x-x_\alpha^{(j)})}}{\rho^2 + \mu_s^2} d\rho. \quad (16)$$

Згідно з [10],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\rho(x-x_\alpha^{(j)})}}{\rho^2 + \mu_s^2} d\rho = \frac{\pi}{\mu_s} e^{-\mu_s |x-x_\alpha^{(j)}|} \quad (17)$$

Таким чином,

$$V_{s,\alpha}^{(j)} = \frac{1}{2\mu_s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} q_\alpha^{(j)} \sin \frac{s\pi}{n+1} e^{-\mu_s |x-x_\alpha^{(j)}|}, \quad (18)$$

і загальний розв'язок рівняння (8) запишеться у вигляді

$$V_s = -\frac{1}{2\mu_s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x) \sin \frac{s\pi}{n+1} e^{-\mu_s |x-x_\alpha^{(j)}|} +$$

$$+ \frac{a}{\mu_s^2 h^2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{s\pi}{n+1} + \sin \frac{sn\pi}{n+1} \right] + A_s e^{\mu_s x} + B_s e^{-\mu_s x}. \quad (19)$$

Якщо шукається розв'язок, обмежений на безконечності, необхідно прийняти $A_s = B_s = 0$.

Враховуючи ще раз ρ -трансформацію, одержуємо

$$U_\kappa(x) = -\frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^n \frac{1}{\mu_s} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} \sum_{j=1}^{m_\alpha} q_\alpha^{(j)}(x) \sin \frac{s\pi}{n+1} \sin \frac{\kappa s\pi}{n+1} e^{-\mu_s |x-x_\alpha^{(j)}|} +$$

$$+ \frac{4a}{(n+1)h^2} \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1}}{\mu_s} \cos \frac{s\pi(n-1)}{2(n+1)} \sin \frac{\kappa s\pi}{n+1} \quad (20)$$

Система, яку ми тільки що розв'язали, апроксимує задачу (5), (7) з точністю $O(h^2)$. Розкладаючи функцію $U(x, y)$, а також $U''(x, y)$ в ряд Тейлора, відкидаючи при цьому величини порядку $O(h^6)$ [7], одержимо систему рівнянь

$$\frac{5}{6} \frac{d^2 U_{\kappa}(x)}{dx^2} + \frac{1}{12} \left[\frac{d^2 U_{\kappa+1}(x)}{dx^2} + \frac{d^2 U_{\kappa-1}(x)}{dx^2} \right] + \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{h^2} [U_{\kappa+1}(x) - 2U_{\kappa}(x) + U_{\kappa-1}(x)] = - \left\{ \frac{5}{6} q_{\kappa}(x) + \frac{1}{12} [q_{\kappa+1}(x) + q_{\kappa-1}(x)] \right\},$$

що апроксимує вихідне рівняння з точністю $O(h^4)$. Розв'язок одержується у вигляді (20), лише μ_s має вигляд

$$\mu_s = \frac{2\sqrt{3} \sin \frac{s\pi}{2(n+1)}}{h \sqrt{3 - \sin^2 \frac{s\pi}{2(n+1)}}} \quad (22)$$

§ 3. Розрахунок поля плоскої лінзи. Викладеним методом розрахуємо поле плоскої електронної лінзи, конфігурація і розміри якої зображені

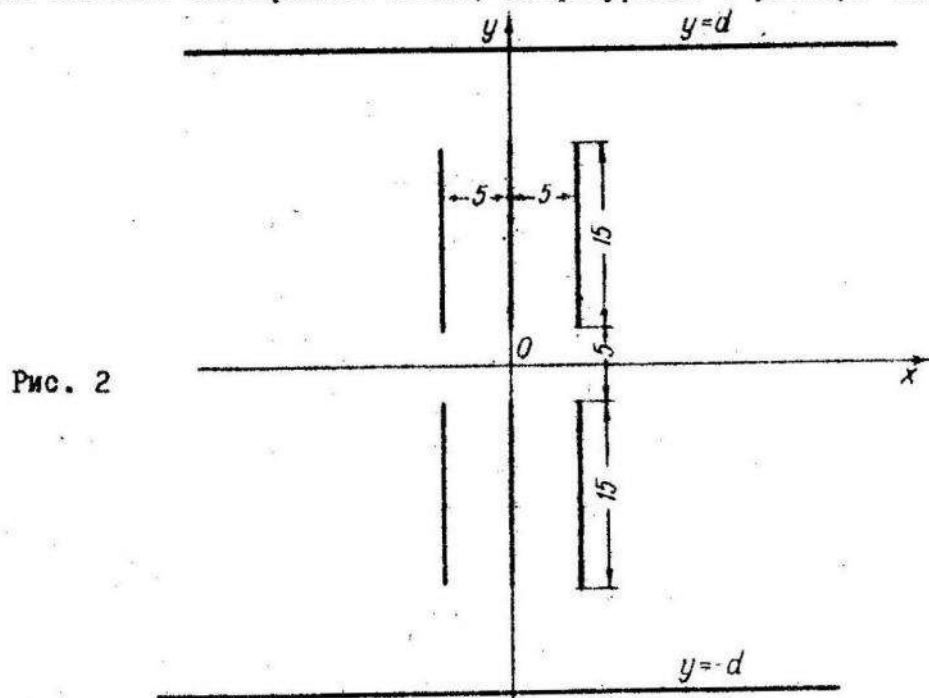


Рис. 2

на рис. 2. $L_1, L_2, \dots, L_6$ - система плоских электродів (щілин) однакових довжин $\ell_1 = \dots = \ell_6 = 15$ (мм), розміщених симетрично відносно осей. На електродах задається потенціал

$$U|_{L_1} = U|_{L_3} = U|_{L_4} = U|_{L_6} = 1; \quad U|_{L_2} = U|_{L_5} = 0$$

Необхідно знайти поле потенціалу цієї системи в області, що лежить між електродами (рис. 3). Виберемо $h = \frac{5}{3}$ (мм). Враховуючи симетрію задачі, складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів $q_x^{(j)}(x)$ (в нашому випадку система 18-го порядку).

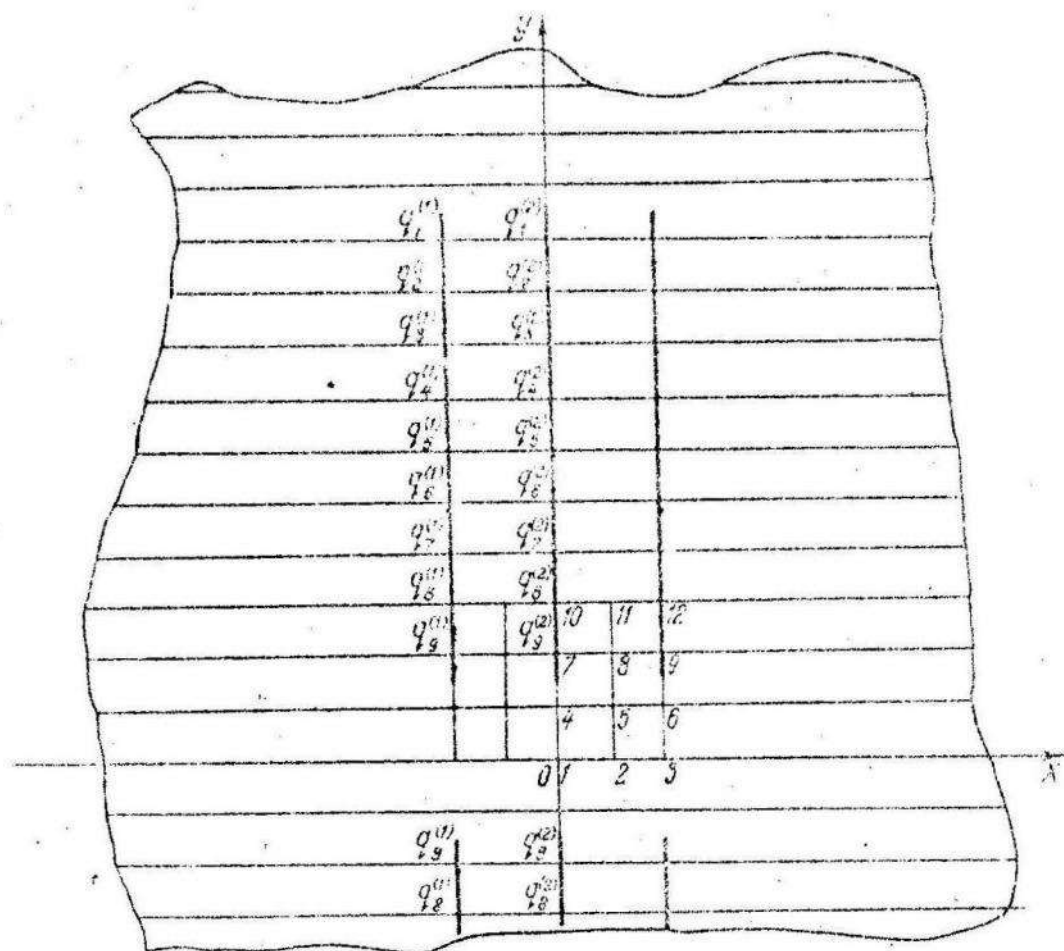


Рис. 3.

Задача розв'язувалась при $d_1 = 90$ (мм), $d_2 = 180$ (мм), $d_3 = 270$ (мм), а також при різних граничних умовах

$$U(x, \pm d) = 1; \quad U(x, \pm d) = 0,5; \quad U(x, \pm d) = 0.$$

Наведемо результати деяких обчислень при $d = 90$ (мм), $U(x, \pm d) = 1$:

а) Параметри $q_{\alpha}^{(j)}$:

$$\begin{array}{ll} q_1^{(1)} = 0,269947 & q_1^{(2)} = -0,334806 \\ q_2^{(1)} = 0,212035 & q_2^{(2)} = -0,222594 \\ q_3^{(1)} = 0,208597 & q_3^{(2)} = -0,206514 \\ q_4^{(1)} = 0,208247 & q_4^{(2)} = -0,202287 \\ q_5^{(1)} = 0,208169 & q_5^{(2)} = -0,201171 \\ q_6^{(1)} = 0,208442 & q_6^{(2)} = -0,201500 \\ q_7^{(1)} = 0,209742 & q_7^{(2)} = -0,203989 \\ q_8^{(1)} = 0,216525 & q_8^{(2)} = -0,214780 \\ q_9^{(1)} = 0,287903 & q_9^{(2)} = -0,300326 \end{array}$$

б) Значення потенціалу (для порівняння наводимо значення потенціалу, знайдені іншим методом).

№ точки	За формулою (20) даної роботи	За формулами (10), (11) роботи [11]
1	0,457685	0,457856
2	0,586304	0,586710
3	0,792855	0,792885
4	0,385598	0,385614
5	0,570627	0,570955
6	0,823663	0,823573
7	0,000000	0,000000
8	0,532592	0,532734
9	1,000000	1,000000
10	0,000000	0,000000
11	0,512760	0,512817
12	1,000000	1,000000

Розрахунок проводився на ЕОМ "Минск-22".

Л и т е р а т у р а

1. М. Г. С л о б о д я н с к и й. Способ интегрирования уравнения с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. мат. и механ., 3, вып. 1, 1939, 75-81.
2. В. Н. Ф а д д е е в а. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 28, 1949, 73-103.
3. Я. И. А л и х а н к и н. Решение задачи о несовершенной скважине методом прямых. Сб. "Вычисл. мат.", вып. 1, М., 1957, 136-152.
4. Б. М. Б у д а к, Ф. П. В а с и л ь е в. Сходимость и оценка погрешностей метода прямых для решения некоторых задач фильтрации. Сб. "Численные методы в газовой динамике". ВЦ МГУ, М., 1963.
5. В. И. Л е б е д е в. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода. Вестник МГУ, вып. 7, № 10, 1955, 47-57.
6. Т. Д. М а р т ы н о в и ч, Б. М. К о р д у б а. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. КВМ и МФ, 5, № 6, 1965.
7. Т. Д. М а р т ы н о в и ч, Б. М. К о р д у б а. Решение пространственной осесимметрической задачи Дирихле методом прямых с повышенной точностью аппроксимации. Сб. "Численные методы решения задач математической физики", М., 1966.
8. Г. Н. П о л о ж и й. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.
9. Г. Е. Ш и л о в. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. УМН, т. XIV (5), 1959.
10. И. С. Г р а д и т е й н, И. М. Р ы ж и к. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
11. Е. С. Д о р о ж о в с ь к и й, Б. М. К о р д у б а, В. Г. К о т е н к о. Задача Діріхле плоскої електростатики. Вісник Львів. ун-ту, серія мех.-мат., вип. 1, 1965.

—0—

М.М.ШЕРЕМЕТА

ПРО ЛАКУНАРНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ АНАЛІТИЧНИХ
У КРУЗІ ФУНКЦІЙ

Покази

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

аналітична в крузі $|z| < 1$ функція і $M(z) = M(z, f) = \max_{|z|=z} |f(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 1$, а $\mu(z)$ і $\nu(z)$ - відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1), $0 < z < 1$. Ріст функції $f(z)$ переважно визначається за допомогою порядку і нижнього порядку, які визначаються формулами

$$\rho = \overline{\lim}_{z \rightarrow 1} \frac{\ln \ln M(z)}{-\ln(1-z)}, \quad \lambda = \underline{\lim}_{z \rightarrow 1} \frac{\ln \ln M(z)}{-\ln(1-z)}. \quad (2)$$

В [1] встановлюється зв'язок між λ , ρ і послідовністю індексів ненульових коефіцієнтів $\{a_n\}$ ряду (1) при умові, що $0 < \rho < \infty$.

Нашою метою буде доведення аналогічних теорем для випадку, коли $\rho = 0$ і $\rho = \infty$.

Ми будемо використовувати функції з класу Λ , який визначається так. Прийmemo, що додатна функція $\alpha(x)$, визначена на $[a, \infty)$, належить до класу Λ , якщо вона диференційована на $[a, \infty)$, строго монотонно зростає на $[a, \infty)$, при $x \rightarrow \infty$ прямує до ∞ і є повільно зростаючою функцією [2], тобто для всіх c , $0 < c < \infty$, виконується

$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(cx)/\alpha(x) = 1$. Будемо вважати, що $\alpha(\infty) = \infty$. Нам будуть зустрічатись значення функції $\alpha(x) \in \Lambda$ в точках, де вона не ви-

значена. Тоді приписуємо їй значення 1. За означенням $\ell n^+ x = \ell n x$, якщо $x \geq 1$, $\ell n^+ x = 0$, якщо $x < 1$.

Нехай $\varphi(\tau)$ — неспадна додатна функція, $0 < \tau < 1$, яка прямує до ∞ при $\tau \rightarrow 1$. Позначимо

$$\rho(\alpha, \beta, \varphi(\tau)) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1} \frac{\alpha(\varphi(\tau))}{\beta(\frac{1}{1-\tau})}, \quad \lambda(\alpha, \beta, \varphi(\tau)) = \underline{\lim}_{\tau \rightarrow 1} \frac{\alpha(\varphi(\tau))}{\beta(\frac{1}{1-\tau})}, \quad (3)$$

$$\rho(\alpha, \varphi(\tau)) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ell n \varphi(\tau))}{\alpha(-\ell n(1-\tau))}, \quad \lambda(\alpha, \varphi(\tau)) = \underline{\lim}_{\tau \rightarrow 1} \frac{\alpha(\ell n \varphi(\tau))}{\alpha(-\ell n(1-\tau))}, \quad (4)$$

де $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$. Очевидно, що при $\varphi(\tau) = \ell n M(\tau)$, $\alpha(x) = \ell n x$, $\beta(x) = \ell n x$ означення (3) збігаються з означенням (2).

Позначимо: $F(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $\Phi(x; c) = \alpha^{-1}(c\alpha(x))$.

Лема 1. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$, а функція $F(x; c)$ для всіх c , $0 < c < \infty$, задовольняє умовам

$$\alpha(x[F(x; c)]^{-1}) = \alpha(x)(1 + o(1)) \quad \text{при } x \rightarrow \infty; \quad (5)$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x F'(x; c)[F(x; c)]^{-1} < 1. \quad (6)$$

Тоді

$$\rho(\alpha, \beta, \ell n M(\tau)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n)}{\beta\{n[\ell n^+ \alpha_n]^{-1}\}}.$$

Лема 1'. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$. Тоді, якщо $\rho(\alpha, \ell n M(\tau)) \geq 1$ і для всіх c ($0 < c < 1$) виконуються умови

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \Phi'(x; c) < 1; \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(\ell n x) / \alpha(x) = 0. \quad (8)$$

то

$$\varphi(\alpha, \ln M(z)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln n)}{\alpha(\ln[n(\ln^+ |a_n|)^{-1}])}; \quad (9)$$

якщо $\varphi(\alpha, \ln M(z)) < 1$ і виконується умова (8), то

$$\varphi(\alpha, \ln M(z)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha(\ln^+ \ln^+ |a_n|) / \alpha(\ln n). \quad (10)$$

Доведення лем 1 і 1' проведене в [3] і [4].

Лема 2. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$ і виконуються умови

$$\alpha(xy) \leq \alpha(x) + \alpha(y) \quad (11)$$

при $x > x_0$, $y > y_0$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) / \beta(x) = 0. \quad (12)$$

Тоді

$$\varphi(\alpha, \beta, \ln M(z)) = \varphi(\alpha, \beta, \nu(z)), \quad \lambda(\alpha, \beta, \ln M(z)) = \lambda(\alpha, \beta, \nu(z)).$$

Д о в е д е н н я. Легко бачити, що

$$\mu(z) \leq M(z) \leq \frac{2}{1-z} \mu\left(\frac{z+1}{2}\right). \quad (13)$$

Дійсно, ліва частина нерівності (13) є відомою нерівністю Коші, а права одержується так:

$$M(z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\frac{z+1}{2}\right)^n \left(\frac{2z}{1+z}\right)^n \leq \mu\left(\frac{z+1}{2}\right) \frac{1}{1-\frac{2z}{1+z}} = \frac{2}{1-z} \mu\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Далі, для максимального члена і центрального індекса має місце (див. [1], стор. 199) співвідношення

$$\ln \mu(z_2) = \ln \mu(z_1) + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\nu(x)}{x} dx, \quad z_2 > z_1 > 0, \quad (14)$$

звідки одержуємо

$$\ln \mu\left(\frac{z+1}{2}\right) \geq \int_z^{\frac{z+1}{2}} \frac{v(x)}{x} dx \geq v(z) \int_z^{\frac{z+1}{2}} \frac{dx}{x} \geq v(z) \int_z^{\frac{z+1}{2}} dx = \frac{v(z)}{2}(1-z). \quad (15)$$

Разом з тим, при $z \geq z_0 > 0$ з (14) маємо

$$\begin{aligned} \ln \mu(z) &= \ln \mu\left(\frac{z}{2}\right) + \int_{\frac{z}{2}}^z \frac{v(x)}{x} dx \leq \\ &\leq \ln \mu\left(\frac{1}{2}\right) + v(z) \ln 2 \leq \ln \mu\left(\frac{1}{2}\right) + v(z). \end{aligned} \quad (16)$$

З (13) і (16) одержуємо

$$\begin{aligned} \ln M(z) &\leq v\left(\frac{z+1}{2}\right) + \ln \frac{1}{1-z} + \ln(2\mu\left(\frac{1}{2}\right)) \leq \\ &\leq 2 \max\left\{v\left(\frac{z+1}{2}\right), \ln \frac{1}{1-z} + \ln(2\mu\left(\frac{1}{2}\right))\right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

а з (13) і (15) маємо

$$v(z) \leq \frac{e}{1-z} \ln M\left(\frac{z+1}{2}\right). \quad (18)$$

Завдяки умовам леми, з (18) одержуємо, що

$$\rho(\alpha, \beta, v(z)) \leq \rho(\alpha, \beta, \ln M(z)), \quad \lambda(\alpha, \beta, v(z)) \leq \lambda(\alpha, \beta, \ln M(z)). \quad (19)$$

А тому що за умовою (12) $\alpha(\ln \frac{1}{1-z} + O(1)) = O(\beta(\frac{1}{1-z}))$, то з (17) одержуємо нерівності, протилежні до нерівностей (19). Лема 2 доведена.

Лема 2'. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$ задовольняє умову (8). Тоді

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \ln M(z)) &\leq \rho(\alpha, v(z)) \leq \max\{1, \rho(\alpha, \ln M(z))\}, \\ \lambda(\alpha, \ln M(z)) &\leq \lambda(\alpha, v(z)) \leq \max\{1, \lambda(\alpha, \ln M(z))\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Д о в е д е н н я. Завдяки тому, що $\alpha(x) \in \Lambda$ і що

$$\ln \ln M\left(\frac{z+1}{2}\right) + \ln \frac{2}{1-z} \leq 2 \max \left\{ \ln \frac{2}{1-z}, \ln \ln M\left(\frac{z+1}{2}\right) \right\},$$

маємо із (18)

$$\rho(\alpha, \nu(z)) \leq \max \{1, \rho(\alpha, \ln M(z))\}, \quad \lambda(\alpha, \nu(z)) \leq \max \{1, \lambda(\alpha, \ln M(z))\}.$$

Разом з тим, з (17), звадяки умові (8) і означенню класу Λ , маємо

$$\rho(\alpha, \ln M(z)) \leq \max \{0, \rho(\alpha, \nu(z))\} = \rho(\alpha, \nu(z)),$$

$$\lambda(\alpha, \ln M(z)) \leq \max \{0, \lambda(\alpha, \nu(z))\} = \lambda(\alpha, \nu(z)).$$

Лема 2' доведена.

Зауважимо, що нерівності (20) покращити не можна, на що вказує приклад функції $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \exp\{\exp(\sqrt{\ln n})\} z^n$. Легко перевірити, що

$$\rho(\ln x, \nu(z)) = 1, \quad \text{а за лемою 1 (див. (10)) виконується } \rho(\ln x, \ln M(z)) = \frac{1}{2}.$$

Теорема 1. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$ і виконуються умови (11) і (12). Тоді, якщо

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n_p} z^{n_p}, \quad (21)$$

то

$$\lambda(\alpha, \beta, \ln M(z)) \leq \rho(\alpha, \beta, \ln M(z)) \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n_p)}{\alpha(n_{p+1})}. \quad (22)$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\rho(\alpha, \beta, \ln M(z)) = 0$, то нерівність (22) тривіальна. Якщо $\rho(\alpha, \beta, \ln M(z)) > 0$, то за лемою 4 нерівність (22) еквівалентна нерівності

$$\frac{\lambda(\alpha, \beta, \nu(z))}{\rho(\alpha, \beta, \nu(z))} \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha(n_p)}{\alpha(n_{p+1})}. \quad (23)$$

Позначимо нижню границю в правій частині (23) через δ ; якщо $\delta = \infty$, то нерівність (23) очевидна, а тому можна припустити, що $\delta < \infty$. Тоді для всякого $\varepsilon > 0$ існує послідовність індексів $\{p_k\}$ така, що $\alpha(n_{p_k}) \leq (\delta + \varepsilon) \alpha(n_{p_k+1})$, тобто $n_{p_k} \leq \alpha^{-1}\{(\delta + \varepsilon) \alpha(n_{p_k+1})\}$. Нехай z_k - значення z , при якому $\nu(z_k - 0) \leq n_{p_k} < n_{p_k+1} \leq \nu(z_k + 0)$

Тоді

$$\lambda(\alpha, \beta, \nu(z)) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\nu(z_k + 0))}{\beta\left(\frac{1}{1-z_k}\right)} \leq (6+\varepsilon) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\nu(z_k + 0))}{\beta\left(\frac{1}{1-z_k}\right)} \leq (6+\varepsilon) \rho(\alpha, \beta, \nu(z)),$$

звідки, завдяки довільності $\varepsilon > 0$, одержуємо (23).

Теорема 1'. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$ задовольняє умову (8), а $f(z)$ має зображення (21). Тоді

$$\lambda(\alpha, \ln M(z)) \leq \max\{1, \rho(\alpha, \ln M(z))\} \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha(\ln n_p)}{\alpha(\ln n_{p+1})}.$$

Доведення теореми 1' аналогічне доведенню теореми I, лише використовується лема 2'.

Теорема 2. Нехай $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$ і виконуються умови (5) і (6). Нехай, крім того, $\lambda(\alpha, \beta, \ln M(z)) < \delta < \rho(\alpha, \beta, \ln M(z))$.

Тоді $f(z) = g_r(z) + h_r(z)$, де $g_r(z)$ - аналітична в крузі $|z| < 1$ функція така, що $\rho(\alpha, \beta, \ln M(z, g_r)) \leq \delta$, а $h_r(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p}$ - аналітична в $|z| < 1$ функція, яка задовольняє умову

$$\lambda(\alpha, \beta, \ln M(z, h_r)) \geq \delta \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\alpha(m_p)}{\alpha(m_{p+1})}.$$

Д о в е д е н н я. Прийнемо $g_r(z) = \sum a_n z^n$, де сумування береться по тих значеннях n , для яких $|a_n| \leq \exp\left\{\frac{n}{F(n; \frac{1}{\delta})}\right\}$. За лемою I з останньої нерівності випливає, що $\rho(\alpha, \beta, \ln M(z, g_r)) \leq \delta$.

Тоді приймаємо $h_r(z) = f(z) - g_r(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p}$, де $|a_{m_p}| > \exp\left\{\frac{m_p}{F(m_p; \frac{1}{\delta})}\right\}$. Виберемо $z_p = 1 - \frac{1}{2F(m_p; \frac{1}{\delta})}$. Тоді, якщо

$$z_p \leq z \leq z_{p+1}, \quad \text{то } \ln M(z, h_r) \geq \ln |a_{m_p}| + m_p \ln z_p \geq$$

$$\geq m_p \left\{ \frac{1}{F(m_p; \frac{1}{\delta})} + \ln \left(1 - \frac{1}{2F(m_p; \frac{1}{\delta})} \right) \right\} \geq \frac{A m_p}{F(m_p; \frac{1}{\delta})}, \quad \text{де } A - \text{постійна ве-}$$

личина $0 < A < \infty$, $p \geq p_0$. Звідси, внаслідок умови (5) і того, що $\alpha(x) \in \Lambda$ і $\beta(x) \in \Lambda$, одержуємо

$$\frac{\lambda(\ln M(z, h_r))}{\beta\left(\frac{1}{1-z}\right)} \geq \frac{\lambda\left(\frac{A m_p}{F(m_p; \frac{1}{\delta})}\right)}{\beta\left(\frac{1}{1-z_{p+1}}\right)} \geq \frac{\lambda(m_p)(1+o(1))}{\beta(2F(m_{p+1}; \frac{1}{\delta}))} = \delta \frac{\lambda(m_p)}{\lambda(m_{p+1})} (1+o(1)),$$

що і вказує на справедливості теореми 2.

Теорема 2'. Нехай $\lambda(x) \in \Lambda$ і виконуються умови (7) і (8). Нехай, крім того, $\lambda(\alpha, \ln M(z)) < \delta < \rho(\alpha, \ln M(z))$. Тоді $f(z) = g_r(z) + h_r(z)$, де $g_r(z)$ - аналітична в $|z| < 1$ функція така, що $\rho(\alpha, \ln M(z, g_r)) \leq \delta$, а $h_r(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p}$ - аналітична в $|z| < 1$ функція, яка задовольняє умову

$$\lambda(\alpha, \ln M(z, h_r)) \geq \max(1, \delta) \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\ln m_p)}{\lambda(\ln m_{p+1})}.$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\rho(\alpha, \ln M(z)) \geq 1$, прийнемо $g_r(z) = \sum_1 a_n z^n$, де оумування береться по тих індексах n , для яких $|a_n| \leq \exp\left\{\frac{n}{\exp\{\Phi(\ln n; \frac{1}{\delta})\}}\right\}$. За лемою 1 з останньої нерівності маємо $\rho(\alpha, \ln M(z, g_r)) \leq \delta$. Тоді приймаємо $h_r(z) = f(z) - g_r(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p}$, де $|a_{m_p}| > \exp\left\{\frac{m_p}{\exp\{\Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})\}}\right\}$. Виберемо $z_p = 1 - \frac{1}{e \exp\{\Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})\}}$.

Тоді, якщо $z_p \leq z \leq z_{p+1}$, то

$$\ln M(z, h_r) \geq \ln |a_{m_p}| + m_p \ln z_p \geq m_p \left\{ \frac{1}{\exp\{\Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})\}} + \ln \left(1 - \frac{1}{e \exp\{\Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})\}} \right) \right\} \geq \frac{A m_p}{\exp\{\Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})\}},$$

де A - постійна

величина, $0 < A < \infty$, $p \geq p_0$. Тому $\ln \ln M(z, h_r) \geq \ln A + \ln m_p + \Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta}) \geq B_1 \ln m_p$, якщо $\delta \geq 1$, де B_1 - постійна величина, $0 < B_1 < \infty$ і $\ln \ln M(z, h_r) \geq B_2 \Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta})$, $0 < B_2 < \infty$,

якщо $\delta < 1$. Звідси одержуємо, що якщо $\delta > 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\ln \ln M(z, h_r))}{\alpha(-\ln(1-z))} &\geq \frac{\alpha(B, \ln m_p)}{\alpha(\ln(2 \exp \Phi(\ln m_{p+1}; \frac{1}{\delta})))} = \\ &= \frac{\alpha(\ln m_p)(1+o(1))}{\alpha(1+\Phi(\ln m_{p+1}; \frac{1}{\delta}))} = \frac{\delta \alpha(\ln m_p)(1+o(1))}{\alpha(\ln m_{p+1})}, \end{aligned} \quad (24)$$

а якщо $\delta < 1$, то

$$\frac{\alpha(\ln \ln M(z, h_r))}{\alpha(-\ln(1-z))} \geq \frac{\alpha(B, \Phi(\ln m_p; \frac{1}{\delta}))}{\alpha(1+\Phi(\ln m_{p+1}; \frac{1}{\delta}))} = \frac{(1+o(1))\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1})}. \quad (25)$$

Якщо $\rho(\alpha, \ln M(z, f)) < 1$, прийнемо $g_r(z) = \sum a_n z^n$, де сумування береться по тих індексах n , для яких $|a_n| \leq \exp\{\exp\{\Phi(\ln n; \delta)\}\}$. В лемі 1' очевидно, що $\rho(\alpha, \ln M(z, g_r)) \leq \delta$. Тоді приймаємо $h_r(z) = f(z) - g_r(z) = \sum_{n \geq 0} a_{m_p} z^{m_p}$, де $|a_{m_p}| > \exp\{\exp\{\Phi(\ln m_p; \delta)\}\}$. Виберемо $z_p = 1 - \frac{\exp\{\Phi(\ln m_p; \delta)\}}{m_p}$. Легко зауважити, що $0 < z_p < 1$, а також, що $z_p \rightarrow 1$ (див. [4], лема 2). Отже, якщо $z_p < z < z_{p+1}$, то $\ln \ln M(z, h_r) \geq \ln\{\ln|a_{m_p}| + m_p \ln z_p\} \geq \ln m_p$, звідки

$$\frac{\alpha(\ln \ln M(z, h_r))}{\alpha(-\ln(1-z))} \geq \frac{\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1} - \Phi(\ln m_{p+1}; \frac{1}{\delta}))} = \frac{(1+o(1))\alpha(\ln m_p)}{\alpha(\ln m_{p+1})}. \quad (26)$$

Тепер справедливості теореми 2 випливає з нерівностей (24), (25), (26) і того факту, що якщо $\delta > 1$, то $\rho(\alpha, \ln M(z, f)) > 1$.

Л і т е р а т у р а

1. L. R. S o n s. Regularity of growth and gaps. Journ. of Math. Analys. and Appl., v. 24, 1968, 296-306.
2. Б. Я. Л е в и н. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.

3. М. М. Ш е р е м е т а. Про зв'язок між ростом функції, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вып. 2, 1965.

4. М. Н. Ш е р е м е т а. О связи между ростом целых или аналитических в круге функции нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений. Известия вузов, Математика, № 6, 1968.

5. А. В а л и р о н. Аналитические функции. М., 1957.

--0--

УДК 517.53

О.М.КОСТОВСЬКИЙ, Г.Г.ЦЕГЕЛИК

ПОБУДОВА МАЖОРАНТ ТА ДІАГРАМ НЬЮТОНА РЯДІВ ДІРІХЛЕ

В даній роботі розглядається побудова мажорант і діаграм Ньютонa рядів Діріхле та застосування останніх для встановлення достатніх умов існування смуг, в яких ряди Діріхле не перетворюються в нуль.

Розглянемо ряд Діріхле

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} e^{-\lambda_{\nu} x} \quad (1)$$

в абсцисов збіжності C ($C < \infty$), де $A_0 \neq 0$, $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Нехай $\alpha_{\nu} = |A_{\nu}|$ ($\nu = 0, 1, \dots$).

О з н а ч е н н я 1. Точку $P_{\nu}(x_{\nu}, y_{\nu})$ в площині xy з координатами $x_{\nu} = \lambda_{\nu}$, $y_{\nu} = -\ln \alpha_{\nu}$ будемо називати точкою зображення коефіцієнта A_{ν} ряду Діріхле (1).

Припустимо, що в площині xy точки зображення P_{ν} коефіцієнтів

A_ν ($\nu=0,1,\dots$) побудовані. З кожної точки P_ν ($\nu=0,1,\dots$) проведемо паралельно осі ординат в додатному напрямку півпрямку ℓ_ν . Множину точок півпрямих ℓ_ν ($\nu=0,1,\dots$) позначимо через E . Побудуємо випуклу оболонку $C(E)$ множини точок E . Границею випуклої оболонки $C(E)$ буде деяка випукла вниз ламана лінія ψ_f .

О з н а ч е н н я 2. Ламану лінію ψ_f будемо називати діаграмою Ньютона ряду Діріхле (1).

Нехай $B_\nu(\lambda_\nu, x_\nu)$ - точка діаграми Ньютона ψ_f , абсциса якої $x_\nu = \lambda_\nu$, а ордината x_ν ($\nu=0,1,\dots$).

Позначимо

$$T_\nu = e^{-x_\nu} > 0.$$

Ряд Діріхле з додатними коефіцієнтами

$$M_f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad (2)$$

є мажорантою ряду (1). Дійсно, з побудови діаграми Ньютона випливає, що

$$-\ln \alpha_\nu \geq -\ln T_\nu$$

або

$$|A_\nu| = \alpha_\nu \leq T_\nu.$$

О з н а ч е н н я 3. Ряд (2) будемо називати мажорантою Ньютона ряду Діріхле (1).

О з н а ч е н н я 4. Величину

$$R_\nu = \left(\frac{T_{\nu-1}}{T_\nu} \right)^{\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}}} \quad (\nu=1,2,\dots; R_0=0)$$

будемо називати ν -м числовим нахилом $M_f(x)$ або $f(x)$; величину

$$D_\nu = \frac{R_{\nu+1}}{R_\nu} \quad (\nu=0,1,2,\dots)$$

будемо називати відхиленням $M_f(x)$ або $f(x)$.

О з н а ч е н н я 5. Якщо точка зображення P_{ν_i} знаходиться у вершині діаграми Ньютона ψ_f , то індекс ν_i будемо називати вершинним

індексом; якщо точка зображення P_ν знаходиться на ламаній лінії $\mathcal{V}$, то індекс ν будемо називати діаграмним індексом.

Коефіцієнти мажоранти Ньютона $\mathcal{M}_f(z)$ ряду Діріхле (I) визначаються таким чином. Якщо ν_{i-1} і ν_i — два послідовні вершинні індекси, то

$$T_{\nu_i} = \sqrt{\lambda_{\nu_i} - \lambda_{\nu_{i-1}}} \sqrt{\frac{\lambda_{\nu_i} - \lambda_{\nu_i}}{a_{\nu_{i-1}}} \frac{\lambda_{\nu_i} - \lambda_{\nu_{i-1}}}{a_{\nu_i}}} \quad (\nu_{i-1} < \nu < \nu_i).$$

Якщо діаграма Ньютона має півпрямую L_{ν_n} , яка проведена з точки зображення P_{ν_n} вправо з кутовим коефіцієнтом $\kappa = \ell_n R$, то

$$T_{\nu_n + \kappa} = a_{\nu_n} R^{\lambda_{\nu_n} - \lambda_{\nu_n + \kappa}} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots).$$

Т е о р е м а 1. Якщо показники ряду Діріхле задовольняють умову

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n R}{\lambda_n} = 0,$$

то абсцису збіжності ряду Діріхле C можна визначити за формулою

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n T_n}{\lambda_n}.$$

Доведення цієї теореми спирається на властивості мажоранти і діаграми Ньютона.

Розглянемо застосування мажорант і діаграм Ньютона рядів Діріхле для встановлення достатніх умов існування смуг, в яких ряди Діріхле не перетворюються в нуль.

Позначимо через $\mathcal{M} = \{\nu\}$ множину всіх індексів ν ряду Діріхле (I) та розглянемо довільну систему множин індексів

$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\} (n = 0, 1, 2, \dots, m; \infty)$, що задовольняє умови

1. $\mathcal{M}_n \in \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$;
3. $\bigcup_{n=0}^m \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_\infty = \mathcal{M}$;
4. $\mathcal{M}_2 \neq \emptyset$;
5. $0 \in \mathcal{M}_\infty$.

Даній системі $\mathcal{O}$ будемо ставити у відповідність класи $R_\kappa(\mathcal{O})$ рядів Діріхле для кожного фіксованого $\kappa \in \mathcal{M}_2$. Будемо вважати, що ряд Діріхле $f(x)$ належить до класу $R_\kappa(\mathcal{O})$, якщо відхилення цього ряду задовольняють умови

$$D_\kappa > u_\kappa^2,$$

$$D_\nu \geq u_\kappa^{c_\nu}, \text{ де } c_\nu = n, \text{ якщо } \nu \in \mathcal{M}_n (\nu \neq \kappa);$$

$$D_\nu = \infty, \text{ якщо } \nu \in \mathcal{M}_\infty,$$

де u_κ - додатний корінь рівняння

$$H_\kappa(u) = -1 + \sum_{\nu=1}^{\kappa} u^{-(\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa-\nu}) - \sum_{j=1}^{\nu-1} (\lambda_{\kappa-j} - \lambda_{\kappa-\nu}) c_{\kappa-j}} + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} u^{-(\lambda_{\kappa+\nu} - \lambda_\kappa) - \sum_{j=1}^{\nu-1} (\lambda_{\kappa+\nu} - \lambda_{\kappa+j}) c_{\kappa+j}} = 0.$$

Т е о р е м а 2. Нехай задана довільна система множин індексів $\mathcal{O}$ і нехай для фіксованого індекса $\kappa \in \mathcal{M}_2$ відповідне рівняння $H_\kappa(u) = 0$ має додатний корінь u_κ . Тоді кожний ряд Діріхле, який належить до класу $R_\kappa(\mathcal{O})$, не перетворюється в нуль у смузі

$$-\ln \frac{R_{\kappa+1}}{u_\kappa} \leq \operatorname{Re}(x) \leq -\ln R_\kappa u_\kappa.$$

Л і т е р а т у р а

1. А. Н. К о с т о в с ь к и й. Локалізація по модулям нулей ряду Лорана и его производных. Изд-во Львов. ун-та, 1967.

2. А. І. К а р д а ш, О. М. К о с т о в с ь к и й, І. І. Ч у л и к. Мажоранта та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

---0---

Г.Л.БУЙМОЛА, І.М.ТЛУСТЯК

ВПЛИВ ОПТИЧНИХ ІЛЮЗІЙ НА ТОЧНІСТЬ КРЕСЛЕННЯ

Розглянемо лише ті види оптичних ілюзій, які являють певний інтерес і мають значення в кресленні. Їх необхідно враховувати при виконанні тих креслень, де точність відіграє велику роль.

Так, під впливом тих чи інших зорових ілюзій помилка, що вноситься в геометричну побудову при елементарних операціях креслення (наприклад, встановлення ніжки циркуля в точку перетину ліній), збільшується до значних розмірів.

Часто буває, що кресляр "на око" вносить деякі корективи у виготовлений ним рисунок, і тут зроблені ним помилки під впливом ілюзії, при дальшому ускладненні рисунка, приводять до значних помилок. Це часто трапляється в архітектурних кресленнях, геодезії, машинобудівних кресленнях.

В кресленні найчастіше зустрічаємось з ілюзіями, що виникають під впливом фізіологічних та психологічних факторів. Наприклад: 1) білі лінії, проведені на темному фоні, здаються товстішими, ніж такої ж товщини чорні лінії, проведені на білому фоні; 2) перпендикуляр CD , піднесений з середини рівного йому горизонтального відрізка AB , здається більшим за основу AB (рис. 1, а). Як показують дослідження, ця різниця збільшується при зменшенні відрізків і досягає $1/5$ всієї величини відрізка. Наскільки ця ілюзія значна, показує такий факт. Нами було запропоновано студентам нарисувати на аркуші паперу невеликий відрізок прямої і з його середини піднести рівний йому перпендикуляр. Виявилось, що, не дивлячись на те, що креслили з допомогою приладів, були допущені

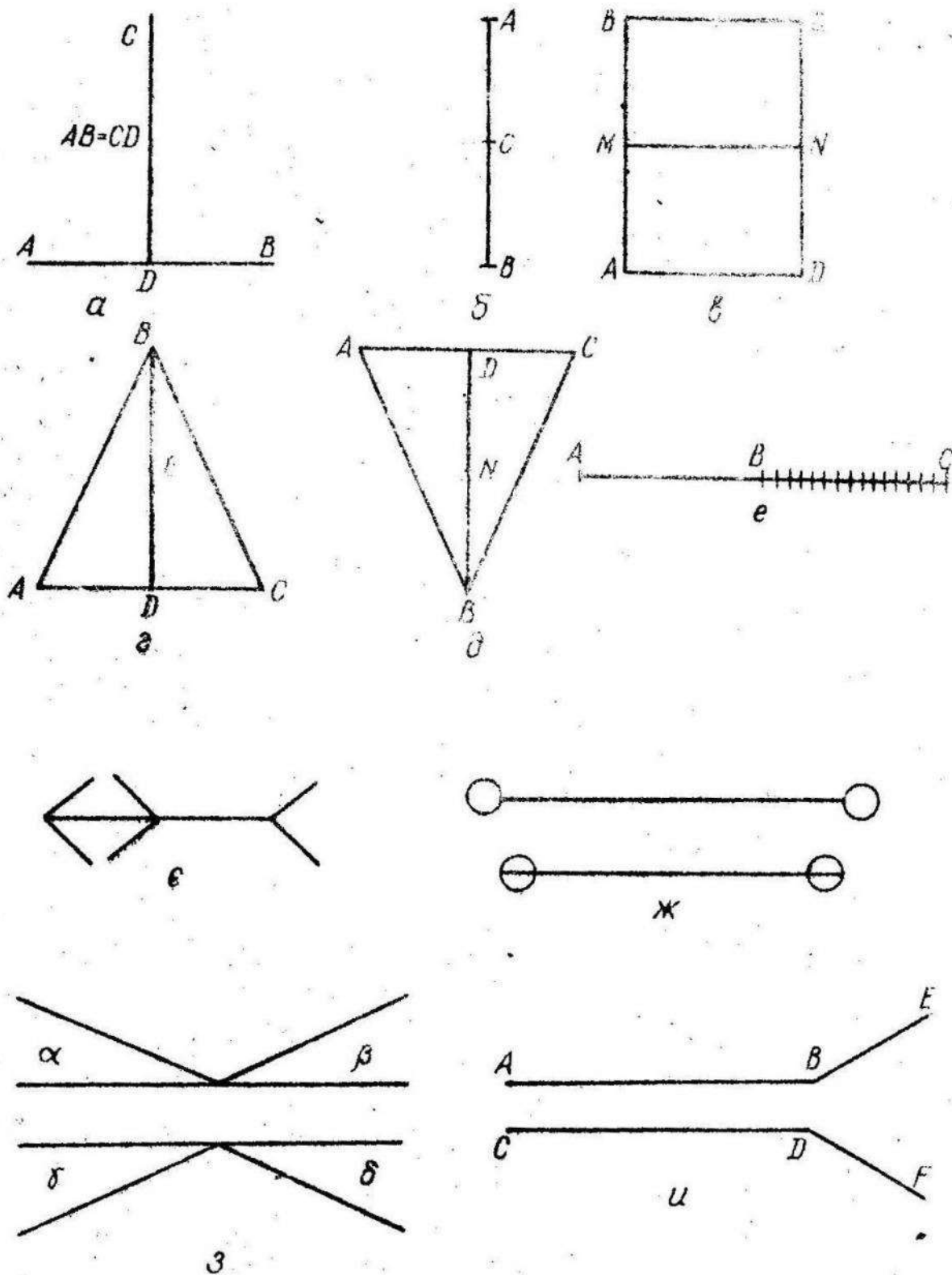


Рис. 1.

помилки, причиною яких є згадана ілюзія. Кожен кресляр намагався коректувати рисунок "на око". Помилки ці становили від $1/12$ до $1/6$ величини заданого горизонтального відрізка.

Причини виникнення ілюзії в кресленні такі:

1. Переоцінка верхньої частини фігури. Якщо взяти вертикальний відрізок AB (рис. 1,б) і поділити його пополам, то верхня частина відрізка AC буде здаватися більшою за рівну їй частину – відрізок CB . Ми пропонували креслярам поділити пополам "на око" вертикальний відрізок прямої і після старанного вимірювання виявляли, що верхня частина відрізка завжди була меншою за нижню, хоч "на око" вони здаються рівними. Різниця у величині верхньої і нижньої частин відрізка становить біля $1/14$ всього відрізка. Цю ж картину дістанемо, якщо візьмемо прямокутник $ABCD$ (рис. 1,в), поділений прямою на дві рівні частини. Верхній прямокутник $MBCN$ здається більшим за рівний йому нижній прямокутник $AMND$. Цей вид ілюзії впливає іноді на саме планування креслень. Якщо ж візьмемо не ізольований відрізок, а відрізок, що міститься всередині якоїсь геометричної фігури, то тут закономірності ілюзії можуть бути іншими. Наприклад, якщо візьмемо рівнобедрений $\triangle ABC$ і з його вершини опустимо перпендикуляр BD (рис. 1,г), а потім поділимо його пополам, то верхня його частина BE буде здаватися вже не більшою від нижньої ED , а, навпаки, меншою.

Отже, тут вирішальне значення має не положення зверху чи знизу, а приналежність до вершини чи основи перпендикуляра. Ця закономірність зберігається і в тому випадку, коли ми змінимо положення трикутника. На рис. 1,д $\triangle ABC$ повернуто вниз вершиною.

2. Переоцінка заповненого простору. При оцінці деяких величин, наприклад віддалі між точками, окремими об'єктами і т.д., необхідно враховувати заповнений між ними простір чи ні, бо заповнений простір здається більшим за рівновеликий йому незаповнений простір. Відрізок BC (рис. 1,е) здається більшим за AB , а насправді вони рівні. Ця ілюзія

часто вводить в оману креслярів, які, побудувавши лінійний масштаб "на око", коректують його, вносячи при цьому помилку. Форма фігури, що обмежує довжину відрізка, також впливає на зорові сприйняття, викликаючи невірну оцінку його довжини (рис. 1,е, 1,ж - фігури Мюллер-Ліера).

3. Переоцінка гострих кутів. Гострі кути здаються нам більшими, ніж вони є в дійсності, що часто приводить до ілюзорних змін в геометричних фігурах (рис. 1,з). Дві паралельні лінії через переоцінку величин гострих кутів α , β , γ , і δ здаються нам не паралельними, а трохи звужуються на кінцях. І навпаки, тупі кути здаються меншими, ніж вони є насправді. Так, наприклад, дві паралельні лінії AB і CD (рис. 1,и) утворюють з лініями BE і DF тупі кути ABE і CDF . Але через недооцінку величини останніх, ці лінії зміщуються і здаються непаралельними. Нам здається, що на кінцях B і D віддаль між ними менша, ніж на кінцях A і C . До цього типу ілюзій відносяться ілюзії Херінга (рис. 2,а і 2,б) і фігури Целльнера (рис. 2,в), де ряд паралельних прямих, перетятих рядом інших ліній, здається непаралельним. Сюди відносяться також ілюзії скривлення прямої (рис. 2,г), якщо кут нахилу прямої поступово змінюється. Через переоцінку величини гострих кутів і недооцінку тупих дістаємо явище ілюзорної деформації різних геометричних фігур (рис. 2,д; 2,е).

Особливе значення в кресленні має ілюзія Поггендорфа. Вона полягає в зміщенні перетинних ліній при паралельних прямих. Це добре видно на рис. 2,є, де дві паралельні лінії AB і CD перетинаються третьою. Нам здається, що KL - пряма. Насправді ж вона ламана, а прямою є KM . Якщо взяти ряд паралельних широких смужок і перетяти їх тонкими лініями, то ілюзія ще збільшиться (рис. 2,ж). Тут спостерігається "ілюзія додавання". Ефект ілюзії обернено пропорційний розмірам гострого кута перетину. Ілюзії Поггендорфа треба мати на увазі при проведенні точних побудов. В практиці геометричних побудов особливо часто доводиться визначати положення кутової точки перетином ліній під гострим кутом. Як-

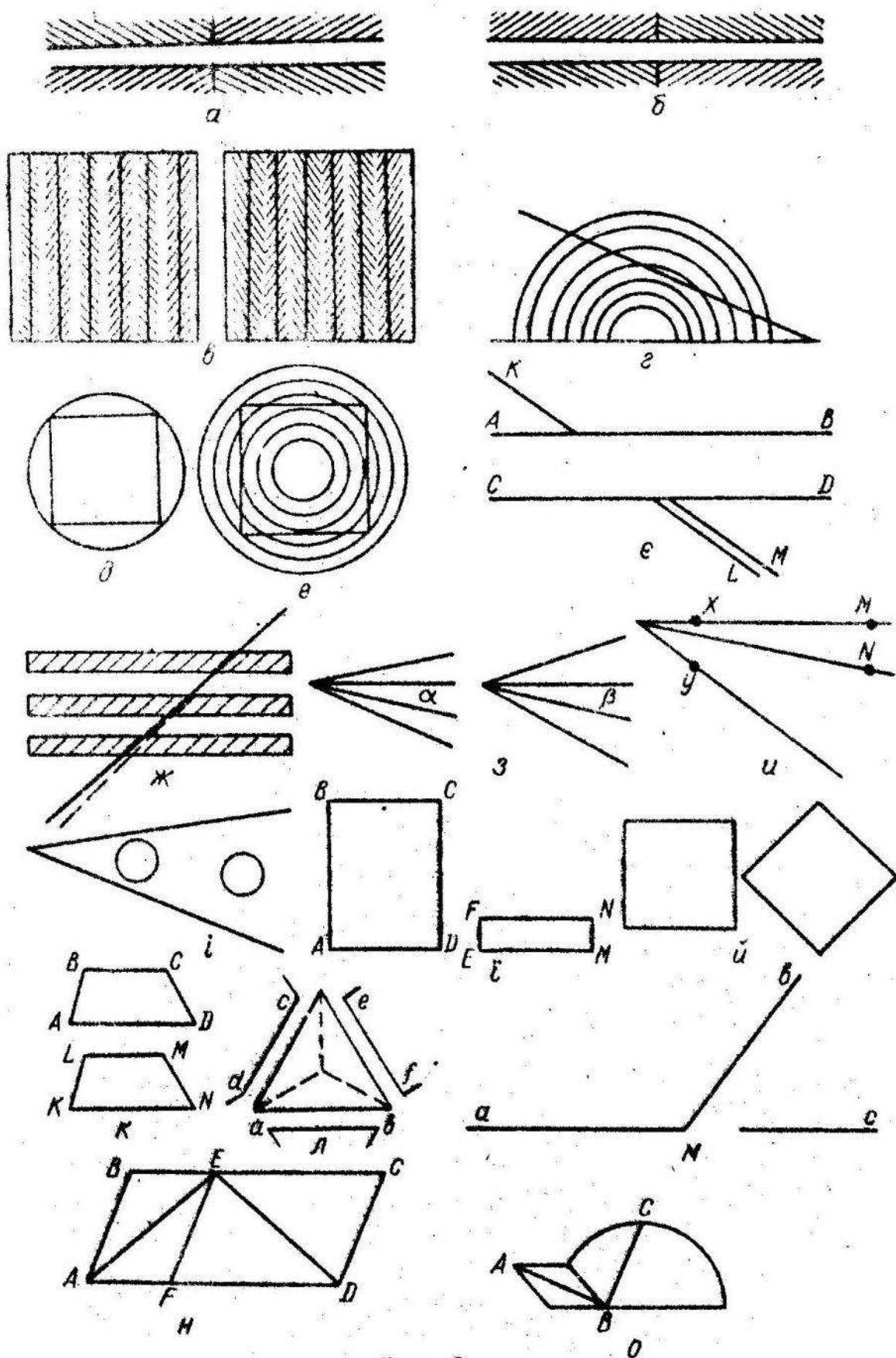


Рис. 2.

при цьому одна з цих ліній трохи товстіша від другої (а це найімовірніше), то треба з особливою увагою встановлювати ніжку циркуля чи гострий кінець олівця, якщо ми хочемо точно фіксувати цю точку.

4. Ілюзія контрасту. Ілюзія контрасту полягає в тому, що дана геометрична фігура, яка межує з іншими фігурами, що відрізняються від неї якоюсь ознакою, змінюється в бік більшого підкреслення цієї ознаки. Так, наприклад, рівні кути α і β (рис. 2, а) здаються нерівними тому, що межують з іншими кутами. Кут α , що межує з більшими, ніж він, кутами, здається меншим за рівний йому кут β , який межує з меншими кутами, через що здається більшим, ніж є насправді. На рис. 2, и віддаль між точками X і Y здається більшою за віддаль між точками M і N . Присутність третьої прямої ще більш посилює ілюзію. Ефект ілюзії залежить ще від взаємного розміщення фігур. На рис. 2, і між сторонами кута нарисовано два рівних кола. Коло, що знаходиться ближче до вершини кута здається більшим. Чим гостріший кут, тим ефект ілюзії більший. Те ж саме, з огляду на значну різницю висот прямокутників $ABCD$ і $EFGH$ (рис. 2, 7); нам здається, що основа AD першого чотирикутника менша за EH другого, в той час як насправді вони рівні.

5. Вплив взаємного розміщення фігур. Геометричні фігури або окремі їх частини сприймаються нами не ізольовано від сусідніх геометричних фігур, а в певному взаємозв'язку. Так, наприклад, на рис. 2, й, к, л показані: два рівні квадрати, проте квадрат, поставлений косо, нам здається більшим; трапеція $ABCD$ здається більшою за рівновелику їй трапецію $KLMN$; рівні відрізки ab , cd і ef здаються нерівними. На рис. 2, м маємо два відрізки, a і c , одної прямої, а нам здається, що відрізок c лежить вище від відрізка a . Ілюзія зникає, якщо змінити взаємне розміщення прямих.

Значна частина ілюзій є наслідком оцінки геометричної фігури в цілому і перенесення її властивостей на окремі частини фігури. Наприклад, діагональ ED (рис. 2, н), що належить більшому паралелограмові $ECDF$,

здається довшою за діагональ AE меншого паралелограма, в той час як вони рівні. Аналогічну картину ми дістанемо, якщо порівняємо величини відрізків AB і BC (рис. 2,0), які нам здаються нерівними.

З наведених прикладів вже можна бачити, яке велике значення мають ілюзії в кресленні. При здійсненні геометричних побудов необхідно їх враховувати, щоб досягти якнайбільшої точності. Для цього при виконанні будь-якого креслення не треба покладатись на зорове враження і не вносити в нього ніяких виправлень "на око" без попередніх уважних вимірів. Щоб зменшити вплив ілюзії Поггендорфа на точність побудов рисунок треба виготовляти лініями однакової товщини. При визначенні точок перетином двох прямих треба перевіряти їх прямолінійність провіреною лінійкою та уникати перетину їх під дуже гострим кутом, пам'ятаючи, що ефект ілюзії обернено пропорційний розмірам гострого кута перетину.

Л і т е р а т у р а

1. С. Толанський. Оптические иллюзии. "Иир", М., 1967.
2. И. Д. Артамонов. Иллюзии зрения. "Наука", М., 1969.
3. Kazimierz Bartel. Perspektywa malarska, том II, Warszawa, 1958.

—0—

УДК 611

О.М.ВВЕДЕНСКИЙ

ДУАЛЬНОСТЬ У ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД КВАЗІЛОКАЛЬНИМ ПОЛЕМ

Нехай k — квазілокальне поле (тобто повне дискретно нормоване поле з алгебраїчно замкненим полем лишків характеристики p ; далі з суто технічних міркувань $p > 3$).

Метою цієї роботи є побудова аналога квазілокальної теорії полів

класів мультиплікативної групи [1] для еліптичних кривих.

Питання про побудову квазілокальної теорії дуальності для абелевих многовидів було поставлене І.Р.Шафаревичем в роботі [2], де фактично розв'язано випадок $q \neq p$ компонент (див. також у [3]).

1. П о з н а ч е н н я. Вони в основному стандартні. $\mathcal{O}_k$ - кільце цілих, $\mathcal{U}_k$ - група одиниць, $\mathfrak{p}$ - максимальний ідеал кільця цілих - все у полі k ; ℓ/k - скінченне розширення Галуа, $g = \text{Gal}(\ell/k)$; $\mathcal{O}_\ell, \mathcal{U}_\ell$ - відповідні об'єкти для поля ℓ . Якщо X/g - модуль, то $H^n(g, X)$ ($n \in \mathbb{Z}$) - тейтівські когомології.

Нехай A - еліптична крива над k , V - представник класу з групи $H^1(k, A)$ головних однорідних просторів над A . $m = \sum z_i$ (z_i - різні точки V) - дивізор на кривій V з сенарабельним носем, раціональний над k . Через V/m позначимо звичайну [4] факторизацію $V \text{ mod } m$. Якщо X - схема над $\mathcal{O}_k$, то $X_n = X \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{O}_\ell / \mathfrak{p}^n$ ($n \in \mathbb{Z}, n > 0$). Якщо ж X - схема над схемою Y , то $\text{Pic}^\circ_{X/Y}$ - зв'язна компонента схеми Пікара [5], якщо остання існує. Врешті, якщо X - проалгебраїчна група, то $\pi_1(X)$ - фундаментальна група групи X ; якщо X - проалгебраїчна група розмірності нуль, то X^* - її дуальна.

2. А н а л о г і з о м о р ф і з м у з в а з е м о о т і. Нехай $\mathcal{M}(V)$ - мінімальна модель для V , тобто регулярна схема над $\mathcal{O}_k$, для якої $\mathcal{M}(V) \otimes_{\mathcal{O}_k} k = V$. Нескладне коректування міркувань дає існування деякої "мінімальної моделі" $\mathcal{M}(V/m)$ для V/m у відношенні до морфізму факторизації $V \rightarrow V/m$ (див. [4]). Застосування до даної ситуації методики теореми існування відносних схем Пікара [5] визначає морфізм схем

$$\text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_k} \longrightarrow \text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_k}.$$

Нехай ℓ вибрано так, що $\ell \supset k(\mathfrak{p}_i)$ для всіх $\mathfrak{p}_i \in \text{supp } m$. Запишемо стандартно [4] ядра у стрічках комутативних діаграм

$$\begin{array}{ccc} \left(\frac{\text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_E}}{\mathcal{O}_E} \right)_n & \longrightarrow & \left(\frac{\text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_E}}{\mathcal{O}_E} \right)_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left(\frac{\text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V/m)/\mathcal{O}_E}}{\mathcal{O}_E} \right)_{n+s} & \longrightarrow & \left(\frac{\text{Pic}^\circ_{\mathcal{M}(V)/\mathcal{O}_E}}{\mathcal{O}_E} \right)_{n+s} \end{array}$$

Застосуємо до цих діаграм з ядрами функтор Грінберга, потім по одержаних діаграмах квазіалгебраїчних груп перейдемо до проективної границі і отримаємо точну послідовність проалгебраїчних груп

$0 \longrightarrow \mathcal{U}_E \longrightarrow \mathcal{H}_E \longrightarrow F_E \longrightarrow A_E^\circ \longrightarrow 0$,
де $\mathcal{H}_E^\circ$ - зв'язана компонента проалгебраїчної групи A_E . Звідси маємо точну послідовність g -модулів

$$0 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{U}_E) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{H}_E) \longrightarrow \pi_1(F_E) \longrightarrow \pi_1(A_E^\circ) \longrightarrow 0,$$

яка визначає гомоморфізм

$$\begin{aligned} \delta_2(V, m): \pi_1(A_k) &\longrightarrow \mathcal{H}^2(g, \pi_1(\mathcal{U}_E)) \subset \\ &\subset \varprojlim_{\ell \rightarrow k_s} \mathcal{H}^2(g, \pi_1(\mathcal{U}_E)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Q}/\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теорема 1. $\delta_2(V, m)$ залежить лише від класу головних однорідних просторів, у якому лежить V , і визначає, таким чином, відображення множин

$$\mathcal{H}^2(k, A) \xrightarrow{\theta} \pi_1(A_k)^*,$$

яке є ізоморфізмом відповідних групових структур.

Доведення теореми 1 - це доведення гомоморфності θ за допомогою Вейлівського означення добутку двох головних однорідних просторів і техніки, а також пряме обчислення аналога ізоморфізму взаємності для простих циклічних розширень у кривих трьох основних типів.

3. Уточнення аналога ізоморфізму взаємності - взаємодія фільтрації.

Задамо зростаючу фільтрацію у $\mathcal{H}^i(k, A)$ підгрупами ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$)

$$(\mathcal{H}^i(k, A))^n = \begin{cases} \text{індуктивна границя } \mathcal{H}^i(q, A_n) \text{ по всіх } q/k \text{ та-} \\ \text{ких, що } q^n = \{1\} \text{ (} n\text{-на підгрупа верхньої фільт-} \\ \text{рації у } q \text{ - одинична)}. \end{cases}$$

Для кривих трьох основних типів нехай A_k° - зв'язна компонента A_k :

$$A_k^n = \mathcal{I}_k^n \quad - \quad n\text{-на підгрупа фільтрації Лотца підгрупи Лотца} \\ \mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k^1 \quad \text{групи } A_k \quad \text{для всіх } n \geq 1. \text{ Аналогічно визна-}$$

чається фільтрація у групі A_k для довільної кривої A над k (по-трібно використати $\mathcal{M}(A)$).

Нехай для $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$

$$(\pi_*(A_k^n))^* = \begin{cases} \text{група всіх характерів } \pi_*(A_k) \text{ , які тривіальні на} \\ \text{підгрупі } \pi_*(A_k^n). \end{cases}$$

Теорема 2. $\mathcal{O}((\mathcal{H}^i(k, A))^n) \subset (\pi_*(A_k^n))^*$ для всіх $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

4. Когомології вищих розмірностей.

Розглядаючи добуток q -модулів за Тейтом

$$\mathcal{H}^i(q, A) \times \pi_*(A_q) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

який визначено теоремою 1, дістаємо:

Теорема 3. Існує добуток

$$\mathcal{H}^n(q, A^i) \times \mathcal{H}^{4-n}(q, \pi_*(A_q)) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

який встановлює дуальність за Понтрягінін груп-множників для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Доведення теорем 2 і 3 без особливих труднощів випливає з теорем 1 і обчислень.

Л і т е р а т у р а

1. J. P. Serre. BSMF, 89, 1961.
2. М. Р. Шафаревич. Труды МИАН, 64, 1961.
3. A. P. Ogg. Ann. Math., 76, 1962.
4. В. П. Серр. Алгебраические группы и поля классов. М., 1968.
5. A. Grothendieck, Sem. Bourbaki, II 232, 236, 1961.

У.А.МИШКОВЕЦЬ

ПОБУДОВА ОДНОГО КЛАСУ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Простір Q^2 майже періодичних функцій

Майже періодичні (м.п.) функції Степанова (S^p), Вейля (W^p), Безиковича (B^p) [1,2], Левітана [2,4] являють собою узагальнення м.п. функцій Бора [1,2,3] в сенсі узагальнення поняття майже періоду і, відповідно, в сенсі наближення тригонометричними сумами в різних загальних метриках.

Означення м.п. функцій Бора, Степанова, Вейля, Кованько і Левітана даються за допомогою поняття майже періоду у відповідних метриках. Для кожного з цих класів доводиться теорема про наближення такої функції тригонометричними сумами у відповідній метриці. В якомусь розумінні трактується теорема єдиності та виводиться рівність Парозеваля для $p = 2$.

О з н а ч е н н я 1. Функція $f(x)$ називається B^p -майже періодичною, якщо існує послідовність тригонометричних сум $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k x}$; ($n = 1, 2, \dots$), для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x) - S_n(x)|^p dx \right\}^{1/p} = 0.$$

Означення і м.п. функцій Безиковича (B^p) за своїм характером відрізняються від означень м.п. функцій інших класів. Тут береться за означення те, що для інших класів є теоремою.

Число

$$\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1$$

називається нормою функції простору B^p .

В класі м.п. функцій Безиковича (B^2) справедлива теорема Рісса-Фішера.

Дамо означення одного класу м.п. функцій, яке ґрунтується на новій ідеї.

О з н а ч е н н я 2. Сукупність E вимірних локально інтегрованих комплексозначних функцій на дійсній прямій, для яких середнє значення

$$\mathcal{M}_t \{ f(x+t) \overline{g(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{g(t)} dt; \quad f(x), g(x) \in E$$

існує рівномірно для всіх $x \in (-\infty, \infty)$, назовемо простором Q^2 .

З властивостей м.п. функцій Бора випливає, що простір м.п. функцій Бора є підпростором простору Q^2 .

Під скалярним добутком в просторі Q^2 розуміємо число

$$(f, g) = \mathcal{M} \{ f(t) \overline{g(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Функція

$$R_f(x) = \mathcal{M}_t \{ f(x+t) \overline{f(t)} \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t) \overline{f(t)} dt \quad (1)$$

називається згорток функції $f(x)$.

Число

$$\sqrt{R_f(0)} = \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} = \|f\| < \infty \quad (2)$$

називається нормою функції $f(x)$.

Покажемо, що простір Q^2 є нормованим простором.

Справді, $\|f\| > 0$; $\|\alpha f(t)\| = |\alpha| \|f(t)\|$. Залишається показати,

що $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

При будь-якому фіксованому T будемо мати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t) + g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t) + g(t)] [\overline{f(t)} + \overline{g(t)}] dt = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt + \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt + 2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}] dt. \end{aligned}$$

З нерівності

$$|\operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}]| \leq |f(t) \overline{g(t)}|$$

і нерівності Коші-Буняковського

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

одержуємо

$$\left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \operatorname{Re}[f(t) \overline{g(t)}] dt \right\}^2 \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt.$$

Тому

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t) + g(t)|^2 dt \leq \left\{ \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt} \right\}^2.$$

При переході до границі, $T \rightarrow \infty$, одержуємо

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

При $\overline{g(t)} = e^{-i\lambda t}$ (λ - дійсне число) з означення 2 одержуємо

$$M\{f(x+t)e^{-i\lambda t}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x+t)e^{-i\lambda t} dt = A_f(\lambda)e^{i\lambda x}, \quad (3)$$

де

$$A_f(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)e^{-i\lambda t} dt. \quad (4)$$

Функції (3) будемо називати **компонентами** функції $f(x)$, а функції $e^{i\lambda x}$ — **базис** простору Q^* . Спектральну функцію (4) можна трактувати як числову "проекцію" функції $f(x)$ на базу $e^{i\lambda x}$. Природно називати функції простору Q^* **вектор-функціями**.

За допомогою періодичності Безельєра можна доводитися, що спектральна функція $A_f(\lambda)$ відрізняється від нуля не тільки як на основній частоті значень аргумента λ .

Сума компонент

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}; \quad A_f(\lambda_k) \neq 0$$

є рядом Фур'є функції $f(x)$.

Будь-якій функції $f(x) \in Q^*$ відповідає ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}.$$

Далі, для зручності, будемо писати так:

$$f(x) \sim \sum_{\lambda} A_f(\lambda) e^{i\lambda x} = \sum_{k=1}^{\infty} A_f(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}.$$

Тригонометричний многочлен $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\lambda_k x}$ далі будемо записувати так: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n A(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$, бо $A_{\lambda_k}(\lambda) \neq 0$ лише для $\lambda = \lambda_k$, тому $A_k = A(\lambda_k)$.

Т е о р е м а 1. Спектральна функція $A_f(\lambda)$ задовольняє нерівність

$$|A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| \leq \sqrt{2} \|f\|,$$

де λ_0 - довільно фіксоване.

Теорема безпосередньо випливає з нерівності Буняковського-Шварца

$$\begin{aligned} |A_f(\lambda) - A_f(\lambda_0)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}] f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

та рівності

$$|e^{-i\lambda x} - e^{-i\lambda_0 x}|^2 = 2[1 - \cos(\lambda - \lambda_0)x].$$

Н а о л і д о к. Якщо $A_f(\lambda) \neq 0$, то $\|f\| > 0$.

Якщо $\|f\| = 0$, то $A_f(\lambda) = 0$.

§ 2. Теорема єдності в просторі Q^2

Двом різним функціям $f(x)$, $g(x)$ відповідають різні ряди Фур'є тоді і лише тоді, коли відповідні їм спектральні функції не тотожні, тобто $A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

Т е о р е м а 2. (єдності). В просторі Q^2 умова

$$\|f - g\| > 0 \tag{5}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб $A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

Н е о б х і д н і о т ь. Позначимо через $A_h(\lambda)$ спектральну функцію різниці $f(x) - g(x) = h(x)$. Якщо $A_h(\lambda) = A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$, то з наслідку теореми 1 одержуємо, що $\|h\| = \|f - g\| > 0$.

Дочотність. Доведемо, що в умови $\|h\| = \|f - g\| > 0$ випливає, що $A_h(\lambda) = A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0$.

В просторі Q^2 справедлива формула

$$\begin{aligned} A_{R_f}(\lambda) &= \mathcal{M} \left\{ R_f(x) e^{-i\lambda x} \right\} = \\ &= \mathcal{M}_x \left\{ \mathcal{M}_t \left\{ f(x+t) \overline{f(t)} \right\} e^{-i\lambda x} \right\} = \\ &= \mathcal{M}_t \left\{ \mathcal{M}_x \left\{ f(x+t) e^{-i\lambda x} \right\} \overline{f(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

і оскільки середнє, яке визначає функцію $R_f(x)$, існує рівномірно, то від перестановки порядку середніх результат не зміниться.

На підставі формули (6) одержуємо, що спектральна функція $A_{R_f}(\lambda)$, згортки функції $f(x)$, визначається через спектральну функцію $A_f(\lambda)$ так:

$$A_{R_f}(\lambda) = |A_f(\lambda)|^2.$$

Тому

$$R_f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Оскільки тригонометричний ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}$ збігається рівномірно, то

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}$$

є н.п. функція Бора. З теореми єдиності для таких функцій одержуємо

$$R_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_f(\lambda_n)|^2 e^{i\lambda_n x}. \quad (7)$$



В частинному випадку, при $x = 0$, з формул (2) і (7) одержуємо рівність Парсонаса

$$R_0(0) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(\lambda_n)|^2.$$

Зручніше рівність Парсонаса доводиться до константи

$$R_0(0) = \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(\lambda_n)|^2 = \sum_{\lambda} |A_{\lambda}(\lambda)|^2. \quad (8)$$

Вводимо через $R_h(x)$ згорнувши рівності $f(x) - g(x) = h(x)$

$$\begin{aligned} R_h(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T h(x+t) \overline{h(t)} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(x+t) \overline{f(t)} - g(x+t) \overline{f(t)} - f(x+t) \overline{g(t)} + g(x+t) \overline{g(t)}] dt. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (6), після деяких перетворень одержимо

$$A_{R_h}(\lambda) = |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2.$$

Тому

$$R_h(x) = \sum_{\lambda} |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2 e^{i\lambda x}. \quad (9)$$

Рівність Парсонаса для різниці випадкової так:

$$R_h(0) = \|h\|^2 = \|f - g\|^2 = \sum_{\lambda} |A_f(\lambda) - A_g(\lambda)|^2. \quad (10)$$

З цієї формули і умови $\|f - g\| > 0$ одержуємо, що

$$A_f(\lambda) - A_g(\lambda) \neq 0. \text{ Теорема доведена.}$$

Теорему єдиності в просторі Q^2 можна трактувати ще так: функція $f(x) \in Q^2$ однозначно визначається своїм рядом Фур'є лише з точністю до "нульової" функції $h(x)$ з нормою $\|h\| = 0$.

Іншими словами, во існує н.п. функції $f(x) \in Q^2$ з нор-

моє $\|f\| > 0$, яка була б ортогональна до всіх функцій тригонометричної системи

$$\{e^{i\lambda x}\}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty). \quad (II)$$

Це означає, що $A_f(\lambda) \neq 0$, якщо $\|f\| > 0$.

Цей факт можна виразити таким терміном: тригонометрична система (II) повна в класі м.п. функцій $f(x) \in Q^2$.

Спираючись на факт повноти, доводиться така теорема для простору Q^2 .

Т е о р е м а (Рісса-Фішера). Необхідною і достатньою умовою того, щоб довільно заданий тригонометричний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}$ був рядом Фур'є деякої м.п. функції $f(x) \in Q^2$, є просто збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |A(\lambda_k)|^2$.

Відомо, що довільно заданий тригонометричний ряд, якщо навіть сума квадратів модулів його коефіцієнтів збігається, не завжди є рядом Фур'є м.п. функції $f(x) \in W^2$.

Клас м.п. функцій простору Q^2 є ширший класу м.п. функцій W^2 .

Простір Q^2 є гільбертовий простір: нормований (норма породжена скалярним добутком), повний.

Простір S^2 є підпростором простору Q^2 .

Л і т е р а т у р а

1. Г. Б о р. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1934.
2. Б. М. Л е в и т а н. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953.
3. Б. П. Д е м и д о в и ч. Лекции по математической теории устойчивости. "Наука", 1967.
4. Б. М. Л е в и т а н. Новое обобщение почти периодических функций. Записки Харьков. науч. иссл. ин-та мат. и мех., т. XV, 2, 1938.

ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ПРО ПОВЕРХНІ Σ ТА Δ -ПОВЕРХНІ

І. Нехай конгруенція C згинається в конгруенцію $\tilde{C}$. Якщо при цьому деяка лінійчаста поверхня конгруенції C еквівалентно відображається на відповідну лінійчасту поверхню конгруенції $\tilde{C}$, то ці поверхні називаються поверхнями Σ [1].

Нехай другі квадратичні форми Куммера конгруенцій C , $\tilde{C}$ відповідно будуть [2]:

$$- [a(\omega_1^3)^2 + (b+b')\omega_1^3\omega_2^3 + c(\omega_2^3)^2];$$

$$- [\tilde{a}(\tilde{\omega}_1^3)^2 + (\tilde{b}+\tilde{b}')\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_2^3 + \tilde{c}(\tilde{\omega}_2^3)^2].$$

Притому вважаємо, що опорні поверхні конгруенцій C , $\tilde{C}$ є різними положеннями поверхні, яка здійснює згинання конгруенції C . Тоді диференціальні рівняння поверхонь Σ запишуться таким чином:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2 &= (\tilde{\omega}_1^3)^2 + (\tilde{\omega}_2^3)^2; \quad (\alpha) \\ a(\omega_1^3)^2 + (b+b')\omega_1^3\omega_2^3 + c(\omega_2^3)^2 &= \\ = \tilde{a}(\tilde{\omega}_1^3)^2 + (\tilde{b}+\tilde{b}')\tilde{\omega}_1^3\tilde{\omega}_2^3 + \tilde{c}(\tilde{\omega}_2^3)^2. \quad (\delta) \end{aligned} \right\}$$

З цих рівнянь випливає така теорема.

Т е о р е м а І. Для того, щоб відповідні лінійчасті поверхні конгруенцій C , $\tilde{C}$ були поверхнями Σ , необхідно і достатньо, щоб

- 1) оферичні відображення цих поверхонь згинанням конгруенції C в конгруенцію $\tilde{C}$ ізометрично відображались одне на друге;
- 2) отрикційні лінії на цих поверхнях згинанням конгруенції C в конгруенцію $\tilde{C}$ відображались одна на другу.

Т е о р е м а 2. Якщо ізотропні конгруєнції C , C^* містять в собі поверхні Σ , то згинанням конгруєнції C в конгруєнцію C^* середні поверхні цих конгруєнцій відображаються одна на другу.

Д о в е д е н н я. В силу теореми 1 стрикційні лінії поверхонь Σ згинанням конгруєнції C в конгруєнцію C^* відображаються одна на другу. Але стрикційні лінії всіх лінійчастих поверхонь ізотропної конгруєнції проходять через центр променя [2]. Тому, оскільки середня поверхня конгруєнції є поверхня, що складається з центрів променів, справедливе наше твердження.

2. Нехай в тривимірному евклідовому просторі задано поле вектора $\bar{V}$. Зв'язуємо з кожною точкою простору ортонормальний репер векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ так, щоб вектор $\bar{e}_3$ був напрямним ортом вектора $\bar{V}$. Тоді для довільного елементарного переміщення одержуємо

$$\left. \begin{aligned} d\bar{M} &= \omega^k \bar{e}_k, \\ d\bar{e}_k &= \omega_k^j \bar{e}_j. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= -\omega_3^2 = \rho, & \omega_1^3 &= -\omega_3^1 = -q, \\ \omega_1^2 &= -\omega_2^1 = \tau. \end{aligned}$$

Оскільки форми $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ лінійно незалежні, то

$$\rho = \rho_k \omega^k, \quad q = q_k \omega^k, \quad \tau = \tau_k \omega^k. \quad (2)$$

Повертаємо в кожній точці простору вектор $\bar{V}$ на один і той же нескінченно малий кут φ . Будемо вважати, що вектор $\bar{e}_3$ вибрано в площині повертання вектора $\bar{V}$.

Лінійчасті поверхні поля, лінійний елемент яких в результаті повороту поля змінюється на нескінченно малу вище першого порядку мализми відносно кута φ , називаються поверхнями Δ , а криві, навколо яких здійснюється поворот твірних поверхонь Δ , — кривими δ [3], [4].

Для того щоб крива була кривою δ , необхідно і достатньо, щоб еле-

ментарне переміщення вздовж цієї кривої задовольняло умови

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 z - \omega^3 q &= 0, \\ \rho z &= 0, \\ \omega^4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

З третьої рівності системи (3) маємо таку теорему.

Т е о р е м а 1. Дотична до кривої δ міститься в площині, що проходить через вектор поля перпендикулярно до площини повороту.

Як видно з (3), існують тільки такі криві δ :

- 1) $z=0, q=0, \omega^4=0$;
- 2) $z=0, \omega^3=0, \omega^4=0$;
- 3) $\rho=0, \omega^2 z - \omega^3 q = 0, \omega^4=0$,

які відповідно будемо називати кривими $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Поверхні Δ , що відповідають кривим $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, будемо називати поверхнями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

В силу (2) рівняння кривих $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ записуються таким чином:

$$z_2 \omega^2 + z_3 \omega^3 = 0, \quad q_2 \omega^2 + q_3 \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0; \quad (4)$$

$$z_2 \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega^4 = 0; \quad (5)$$

$$\rho_2 \omega^2 + \rho_3 \omega^3 = 0, \quad (\omega^2)^2 z_2 + \omega^2 \omega^3 (z_3 - q_2) - (\omega^3)^2 q_3 = 0, \quad \omega^4 = 0. \quad (6)$$

Т е о р е м а 2. Для того щоб криві простору були кривими δ_1 , необхідно і достатньо, щоб вони були ортогональними траєкторіями поля сталого вектора $\bar{e}_1$.

Д о в е д е н н я. Нехай дана крива простору є кривою δ_1 . Тоді в силу $(4_1), (4_2)$ з (1_2) маємо, що вектор $\bar{e}_1$ - сталий. Крім цього, з (4_3) та (1_1) виходить, що дана крива є ортогональною траєкторією поля вектора $\bar{e}_1$.

Очевидно і навпаки, якщо дана крива простору є ортогональною траєкторією поля сталого вектора $\bar{e}_1$, то вона є кривою δ_1 .

Т е о р е м а 3. Для того щоб криві простору були кривими δ_2 , необхідно і достатньо, щоб вони були векторними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ і геодезичними лініями поля вектора $\bar{v}$.

Д о в е д е н н я. З (5) виходить, що криві простору є кривими δ_2 тоді і тільки тоді, коли вони є векторними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ і коли

$$z_2 = 0. \quad (7)$$

Оскільки умова (7) є необхідною і достатньою для того, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{e}_2$ були геодезичними лініями поля вектора $\bar{v}$ [5], то теорему доведено.

Т е о р е м а 4. Криві δ_2 , δ_3 є асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$.

Д о в е д е н н я. Рівняння асимптотичних ліній поля вектора $\bar{e}_1$ записуються таким чином [5] :

$$\left. \begin{aligned} z_2(\omega^2)^2 + (z_3 - q_2)\omega^2\omega^3 - q_3(\omega^3)^2 &= 0, \\ \omega^4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Звідси та з рівнянь (5), (6) виходить справедливність теореми.

Т е о р е м а 5. Для того щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_1 , необхідно і достатньо, щоб вони були геодезичними лініями та лініями кривини поля вектора $\bar{e}_2$.

Д о в е д е н н я. Рівняння ліній кривини поля вектора $\bar{e}_2$ мають вигляд [5]

$$\left. \begin{aligned} z_3(\omega^3)^2 + (z_4 + p_3)\omega^3\omega^4 + p_4(\omega^4)^2 &= 0, \\ \omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

З рівнянь (4) маємо необхідні і достатні умови для того, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_1 ,

$$z_3 = 0, \quad q_3 = 0. \quad (10)$$

Але умова (10₂) є необхідною і достатньою, щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були геодезичними лініями поля вектора $\bar{e}_2$ [5], а умова (10₁),

з огляду на (9), є необхідною і достатньою, щоб ці лінії були лініями кривини поля вектора $\bar{e}_2$.

Отже, теорему доведено.

Т е о р е м а 6. Для того щоб векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ були лініями δ_j , необхідно і достатньо, щоб вони були асимптотичними лініями як поля вектора $\bar{e}_1$, так і поля вектора $\bar{e}_2$.

Д о в е д е н н я. З (6) видно, що векторні лінії поля вектора $\bar{v}$ є лініями δ_j тоді і тільки тоді, коли

$$\rho_j = 0, \quad q_j = 0. \quad (11)$$

Тому, якщо взяти до уваги (8), а також рівняння асимптотичних ліній поля вектора $\bar{e}_2$, переконуємось в справедливості теореми.

Т е о р е м а 7. Якщо асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$ невизначені, то і лінії δ_j невизначені.

Д о в е д е н н я. Оскільки асимптотичні лінії поля вектора $\bar{e}_1$ невизначені, то з системи (8) маємо

$$z_1 = 0, \quad z_2 = q_2, \quad q_3 = 0.$$

Тому рівняння (4) набувають вигляду

$$q_2 \omega^1 = 0, \quad q_2 \omega^2 = 0, \quad \omega^4 = 0,$$

звідки $q_2 = 0$, що і доводить справедливість нашого твердження.

Л і т е р а т у р а

1. С. В. Д е н и с к о. Про один клас метричних згинань прямолінійної конгруєнції. Доповіді АН УРСР, 3, 1965, 288-290.

2. С. П. Ф и н и м к о в. Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.-Л., 1950.

3. С. В. Д е н и с к о. Об одном классе линейчатых поверхностей прямолинейной конгруэнции. Тезисы докладов Второй всесоюзной геометрической конференции, Харьков, 1964.

4. С. В. Д е н и с к о, О. І. П р и х о д о в с ь к а. $\triangle$ -поверхні прямолінійної конгруєнції. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 3, 1967.

5. С. С. Б у н г е н с. Геометрия векторного поля. Известия АН СССР, 10, 1946, 73-96.

—о—

УДК 518.69

А. О. КОПИСТЯНСЬКИЙ

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОБУДОВ АКСОНОМЕТРИЧНИХ
ПРОЕКЦІЙ

Згідно з теоремою Польке-Шварца, довільний чотирикутник є паралельною проекцією тетраедра, подібного віданому (рис. 1). Ця узагальнююча

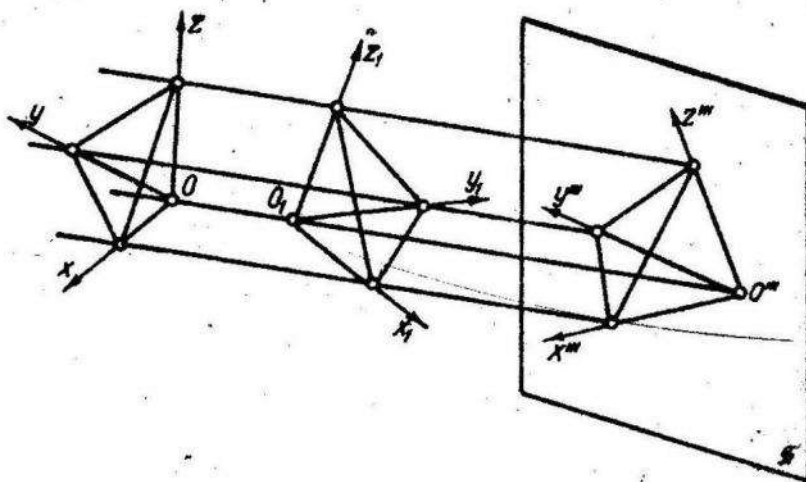


Рис. 1.

основа, використана в побудові аксонометричних проєкцій, зберігається тільки з певним наближенням точності до подібності.

Причини відхилень точності такі:

1. Перетворення побудов виконуються в графічній площині реальними інструментами.

2. Побудова позбавлена безпосереднього зв'язку між елементами перетворення. Точніше, аксонометрична проекція виконується шляхом переносу певних величин, які характеризують дану геометричну форму.

3. В побудові використовуються коефіцієнти спотворення, дані з певним наближенням.

Проаналізувавши ці причини відхилення точності побудов аксонометричних проекцій, приходимо до висновку, що є можливість ліквідувати тільки дві останні причини неточностей побудов. А це можна здійснити введенням такої основи побудов, яка дозволяє безпосередній зв'язок заданого образу та його зображення.

В цій роботі будуть пояснені побудови аксонометричних проекцій і знаходження показників характеристики для довільних систем на базі ортогональних комплексних проекцій при збереженні безпосереднього зв'язку між ортогональними та аксонометричними проекціями.

В основу побудови входить довільне проектування (ортогональне, кооскутне, центральне) на довільно розміщену площину.

Як відомо, в ортогональних комплексних проекціях немає обмежень щодо розміщення площин проекцій. Тим більше, одна із них може бути прийнята

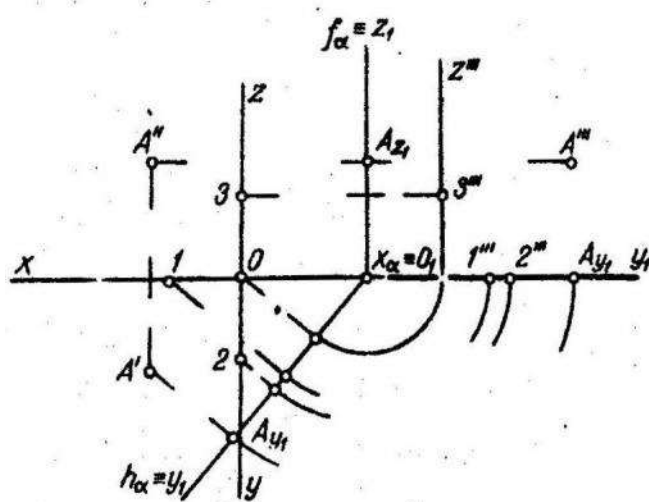


Рис. 2.

та довільно. Саме ця площина може бути аксонометричною площиною. Як перший приклад, приймемо, що аксонометрична площина - горизонтально проектуєча, а проектування - ортогональне (рис. 2). Приймаючи $h_\alpha \equiv y$ і $f_\alpha \equiv z$, знаходимо суміщене положення y''' і при збереженні перпендикулярності ліній проекційного зв'язку будемо аксонометрич-

не зображення точки A''' . Для встановлення розміщення аксонометричних осей x'' , y'' , z'' , а також для встановлення коефіцієнтів спотворення проектуємо, як і раніше, відрізки $O1$, $O2$, $O3$, які відповідають одиничним відріzkам осей x , y , z . У даному випадку x і y проектується в пряму.

Більш характерну побудову показано на рис. 3. Аксонометрична проекція побудована на площині загального положення, але також способом ортогонального проектування.

Побудова ортогональної проекції точки A на площину загального розміщення відбувається, як і в побудові на рис. 2, ускладнення лише в знаходженні суміщеної осі y_1 . Для встановлення масштабу спотворень знайдено також проекції відрізків осей x , y , z , відповідно $O1$, $O2$, $O3$. Таким чином, при збереженні безпосереднього зв'язку між образом та його зображенням побудовано основні елементи аксонометричного зображення. Очевидно, що в цій побудові можна міняти тип

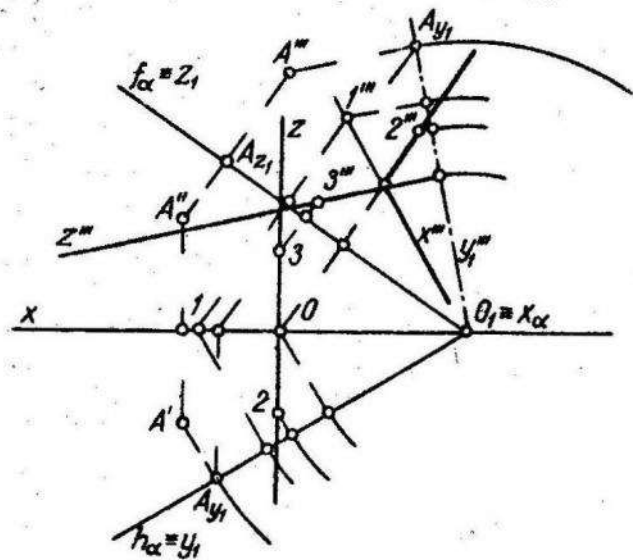


Рис. 3.

аксонометричних проекцій зміною нахилу площини. Наприклад, ізометричну проекцію можна одержати, якщо осі y і z утворять з віссю x кут 45° .

Такий засіб перетворень можна використати також для побудов косокутних аксонометричних проекцій. З цієї мети застосовується метод косокутного проектування на базі заданих ортогональних проекцій даної геометричної форми. В цій побудові (рис. 4) за аксонометричну площину прийнято горизонтально проектуєчу.

Спочатку знаходимо напрямки ліній проекційного зв'язку, тому що в косокутному проектуванні лінії проекційного зв'язку не перпендикулярні

осям x , y , z . Ці напрямки можна знайти як лінії перетину проєктуєчих площин, що проходять через заданий напрямок проєктування з аксонометричною площиною y_1 , z_1 , а далші побудови проводяться, як і раніше, при збе-

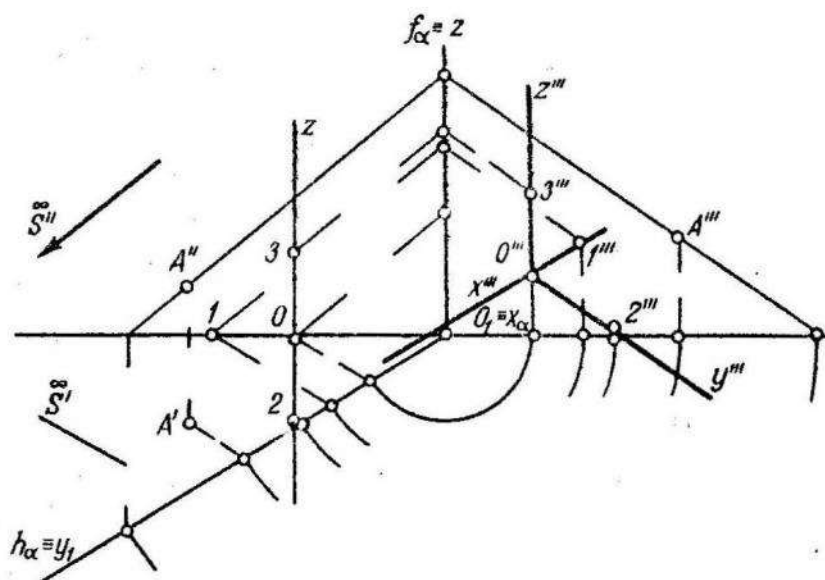


Рис. 4.

реженні напрямків ліній проєкційного зв'язку. Для спрощення побудови на рис. 4 знайдено напрямки ліній проєкційного зв'язку зразу для предметної точки А. Знаходження аксонометричної проєкції одиничних відрізків осей x , y , z , — $O1$, $O2$, $O3$ виконується при збереженні ліній проєкційного зв'язку, встановлених для першої побудови.

Як в побудовах прямокутних аксонометричних проєкцій, так і в косокутних аксонометричних проєкціях можна відтворити різні системи шляхом зміни розміщення площини та напрямку проєктування.

Наприклад, косокутну диметрію можна відтворити так: нехай аксонометрична площина збігається з фронтальною площиною проєкції і напрямок проєктування встановлюється так, щоб одиничний відрізок осі y проєктувався на аксонометричну площину вдвоє меншим.

На рис. 5 показано побудову аксонометричної проєкції точки А і оди-

ничних відрізків осей x , y , z (відповідно $O1$, $O2$, $O3$) у косокутній диметрії.

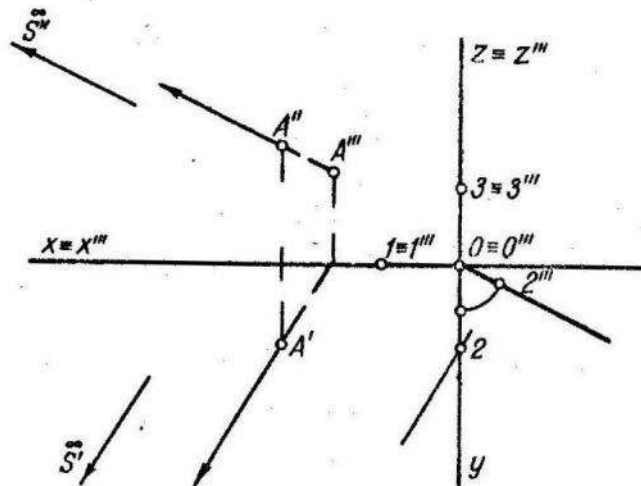


Рис. 5.

Для скорочення викладу побудови, зв'язані з центральними аксонометричними проекціями, виведемо без конкретних прикладів. Проекції окремих точок на довільну аксонометричну площину знаходяться як для косокутних проекцій з тим, що в дальших побудовах операції спрощуються. Для встановлення коефіцієнтів спотворення осей x , y , z , в даному випадку в розумінні перетворень в проєктивній площині, зв'язане зі збереженням складного відношення чотирьох точок. Тому необхідно побудувати проекції трьох точок кожної осі. Четверта точка може бути побудована як гармонічна.

Пропонована побудова аксонометричних проекцій має ряд переваг над побудовами, які використовуються на практиці, зокрема:

- 1) поширює можливості необмеженого використання довільних аксонометричних систем (на практиці використовуються тільки деякі системи, зокрема прямокутна диметрія та ізометрія, та декілька косокутних проекцій);
- 2) збільшує точність побудов за рахунок безпосереднього зв'язку прообразу та зображень та за рахунок графічного перетворення коефіцієнтів спотворення;

3) дає змогу практично використати центральні аксонометричні проєкції;

4) об'єднує два методи побудови в єдиний метод.

—0—

УДК 517.944:947

МАРІЯ Д. МАРТИНЕНКО

ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається задача про визначення розв'язку еліптичної системи рівнянь в частинних похідних другого порядку варіаційного типу від додатного визначеного функціоналу у тривимірному просторі з розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова за заданими на двох сторонах цієї поверхні граничними умовами типу Діріхле або типу Неймана.

1. Розглянемо еліптичну систему рівнянь другого порядку:

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x})u(x) \equiv \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (C_i'(x)u) - \sum_{i=1}^3 C_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0 u = 0, \quad (1)$$

де $B'_{ji} = B_{ij}$, $B_0 = B'_0$ (штрихом позначено транспонування). Систему (1) запишемо у вигляді

$$A(x, \frac{\partial}{\partial x})u(x) \equiv A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})u(x) + A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})u(x) = 0, \quad (2)$$

де $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ - однорідний оператор другого порядку; $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ - оператор, що містить всі інші похідні, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Має місце така теорема.

Т е о р е м а. Нехай існує така додатна в E_3 функція $F(x)$, що

¹⁾ Система (1) - загальна система другого порядку варіаційного типу.

$$\iiint_{\infty} \frac{dx}{\mathcal{F}(x)} < \infty \quad \text{та} \quad \frac{|\det(A_0(x, 2\pi i \alpha) - \lambda I)|}{[\mathcal{F}(x)]^p |\alpha|^{2p} + \lambda^{2p}} \geq \mu > 0 \quad (3)$$

для кожної точки $x \in E_j$ і для кожної дімної точки $(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$; нехай λ – достатньо велике додатне число. Якщо при цьому коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовані три рази в E_j , коефіцієнти при похідних порядку j ($j = 0; 1$) в операторі $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ неперервно диференційовані в E_j j раз, причому коефіцієнти оператора $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$ будуть порядку $O(\mathcal{F}(x))$; похідні до другого порядку від цих коефіцієнтів, коефіцієнти оператора $A_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ та їх похідні до другого порядку ростуть не швидше, ніж $\mathcal{F}(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, а система (2) являє собою систему Ейлера від додатно визначеного функціоналу, тоді існує єдина фундаментальна матриця системи (1) в рімановому просторі з простою гладкою замкненою лінією ґадування.

Доведення теореми проводиться за допомогою інтегральних рівнянь. Цей метод є узагальненням методу Д.П.Мельник відносно ріманового простору.

Далі вважаємо, що коефіцієнти системи (1) задовольняють умови сформульованої теореми.

2. Позначимо через S незамкнену поверхню типу Ляпунова, обмежену гладкою кривою $\mathcal{T}$, через $\mathcal{R}$ – дволистий рімановий простір з лінією ґадування $\mathcal{T}$, а через $H(x, y)$ – фундаментальну матрицю системи (1) у дволистому рімановому просторі, лінією ґадування є крива $\mathcal{T}$.

Розглянемо такі крайові задачі.

Задача типу Діріхле: визначити неперервно диференційований у всьому тривимірному просторі, два рази неперервно диференційований в просторі E_j зовні поверхні S розв'язок системи (1), що зникає на безмежності та приймає на даній незамкненій поверхні S задані значення f_1 та f_2 при наближенні до поверхні S по напрямку додатної та від'ємної

нормалей відповідно. Тут f_+ та f_- - неперервні функції, визначені на S , які збігаються на контурі $\mathcal{T}$, що обмежує S .

Задача типу Неймана: визначити неперервно диференційований розв'язок системи в просторі E_j , що задовольняє на поверхні S умови

$$B(y, \frac{\partial}{\partial y}) v(y) \Big|_{S_+} = f_+(y), \quad B(y, \frac{\partial}{\partial y}) v(y) \Big|_{S_-} = f_-(y), \quad (4)$$

де f_+ та f_- - задовольняють вказане вище припущення, а

$$B(y, \frac{\partial}{\partial y}) = 2 \sum_{i,j=1}^3 \tilde{B}_{ij}(y) v_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^3 C_i'(y) v_i(y), \quad (5)$$

причому $\tilde{B}_{ij}$ однозначно визначається із співвідношення

$$-2 \sum_{i,j=1}^3 \tilde{B}_{ij} v_i \tau_j = \operatorname{Re} \left[\int_+ A_0^{-1}(\beta v + \tau) d\beta \right]^{-1} \int_+ \beta A_0^{-1}(\beta v + \tau) d\beta \sum_{i,j=1}^3 (\tilde{B}_{ij} + \tilde{B}_{ji}) v_i v_j, \quad (6)$$

де $\tilde{B}_{ij} + \tilde{B}_{ji} = 2 \tilde{B}_{ij}$, $\tilde{B}_{ij} = \tilde{B}_{ji}'$, v та τ - одиничні вектори; $(\tau, v) = 0$, $\int_+ (\dots) d\beta$ означає інтегрування по простому додатно орієнтованому контуру, що охоплює β корені рівняння $\det A_0(\beta v + \tau) = 0$ з додатними уявними частинами,

$$A_0(\alpha) = \sum_{i,j=1}^3 B_{ij} \alpha_i \alpha_j, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Зобразимо розв'язок задачі типу Діріхле у вигляді

$$u(x) = \iint_S \mathcal{U}^{(u)}(x, y) \mu_+(y) d_y S + \iint_S \mathcal{U}^{(u)}(x, y) \mu_-(y) d_y S, \quad (7)$$

де

$$\mathcal{U}(x, y) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial K(x, y)}{\partial y_i} \tilde{B}_{ij} v_j + \sum_{i=1}^3 C_i(x) v_i(x) K(x, y), \quad (8)$$

2) Оператор $B(y, \frac{\partial}{\partial y})$ вперше був введений М.С.Волошиною [1].

3) Це співвідношення вперше введено М.С.Волошиною [1].

а $\mu_+(y)$ та $\mu_-(y)$ - невідомі густини, для визначення яких легко одержимо таку систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$\mu_+(x) + \iint_S \mathcal{G}^{(v)}(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S \mathcal{G}^{(v)}(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_+(x),$$

$$-\mu_-(x) + \iint_S \mathcal{G}^{(v)}(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S \mathcal{G}^{(v)}(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_-(x). \quad (9)$$

Подано розв'язок задачі типу Неймана у вигляді

$$v(x) = \iint_S K(x, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S K(x, y_-) \mu_-(y) d_y S, \quad (10)$$

де μ_+ , μ_- - невідомі густини, що визначаються в системі інтегральних рівнянь

$$-\mu_+(x) + \iint_S B^{(v)}(x, \frac{\partial}{\partial x}) K(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S B^{(v)}(x, \frac{\partial}{\partial x}) K(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_+(x);$$

$$\mu_-(x) + \iint_S B^{(v)}(x, \frac{\partial}{\partial x}) K(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S B^{(v)}(x, \frac{\partial}{\partial x}) K(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_-(x). \quad (11)$$

Таке зображення розв'язку істотно спирається на те, що ядра відповідних інтегралів мають тільки точкову особливість в розглядуваному випадку [1]. Єдиність розв'язку сформульованих задач впливає з першої формули Гріна.

Дослідження резольвент систем (9), (11) показує, що всі полюси їх прості, дійсні та лежать зовні проміжку. Звідси впливає розв'язність систем (9) та (11) методом послідовних наближень.

Л і т е р а т у р а

1. М. С. В о л о ш и н а. Про деякі властивості одного класу сильно-еліптичних систем диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. ДАН УРСР, № 10, 1958, 1033-1036.

2. Д. П. М е л ь н и к. Фундаментальна матриця системи варіаційного типу для необмеженого простору. ДАН УРСР, № 6, 1958.

3. М. М а р т и н е н к о і М. М а р т и н е н к о. Фундаментальні розв'язки еліптичних систем у рімановому просторі. ДАН УРСР, сер. А, 603, 1968.

Я.Г.ПРИТУЛА

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР'Є
МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Нехай $f(x)$ - рівномірна майже періодична (р.м.п.) функція, спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$ [1]. Запишемо її ряд Фур'є в симетричній формі:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \quad (1)$$

($\lambda_j > 0$ при $j > 0$; $\lambda_{-j} = -\lambda_j$; $|A_j| + |A_{-j}| > 0$; $\lambda_j \neq 0$; $\lambda_{j+1} < \lambda_j$ при $j > 0$).

Для ряду (1) розглянемо такий ряд:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^p |j|^r. \quad (2)$$

Нижче подаємо достатні умови збіжності ряду (2).

Розглянемо для р.м.п. функції $f(x)$ функцію

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t\delta} f(x-t) dt, \quad \delta > 0.$$

Легко показати, що $F(x)$ є р.м.п. функція.

Нехай

$$\bar{\omega}_p(\delta, f) = \delta \left[M_x \left\{ \left| \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x-t) dt \right|^p \right\} \right]^{1/p}, \quad \delta > 0.$$

Як побачимо, величина $\bar{\omega}_p(\delta, f)$ у випадку, якщо р.м.п. функція $f(x)$ має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$, є аналогом звичайного модуля неперервності для випадку $\lambda^* = \infty$.

Т е о р е м а 1. Якщо для р.м.п. функції $f(x)$, спектр якої має точку згущення $\lambda^* = 0$, ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{q})} \bar{\omega}_\rho^\beta(\lambda_{2^\nu}, f) \quad (3)$$

$$1 < \rho \leq 2, \quad 1/\rho + 1/q = 1, \quad 0 < \beta < q, \quad r > 0$$

збігається, то і ряд (2) збігається.

Д о в е д е н н я. Запишемо ряд Фур'є функції $\mathcal{F}(x)$

$$\mathcal{F}(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\delta A_j}{\delta + i\lambda_j} e^{i\lambda_j x}.$$

Дійсно

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathcal{F}(x) e^{-i\lambda_j x} dx &= M_x \{ \mathcal{F}(x) e^{-i\lambda_j x} \} = \\ &= M_x \left\{ \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) dt \cdot e^{-i\lambda_j x} \right\} = \\ &= \delta \int_0^\infty [M_x \{ f(x-t) e^{-i\lambda_j x} \}] e^{-\delta t} dt = \\ &= \delta A_j \int_0^\infty e^{-(\delta + i\lambda_j)t} dt = \frac{\delta A_j}{i\lambda_j + \delta}. \end{aligned}$$

З нерівності Хаусдорфа-Дінга [4], доведення якої переноситься на випадок р.м.п. функцій повністю, одержуємо

$$\bar{\omega}_\rho(\delta, f) = \delta [M_x \{ |\int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) dt|^p \}]^{1/p} \geq [\delta^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\frac{A_j}{\delta + i\lambda_j}|^q]^{1/q}, \quad 1 < \rho \leq 2. \quad (4)$$

Прийmemo в (4) $\delta = \lambda_{2^{\nu-1}}$, одержимо

$$2^{-\frac{q}{2}} \sum_{j=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} |A_j|^q < \bar{\omega}_\rho^q(\lambda_{2^{\nu-1}}, f). \quad (5)$$

Використавши нерівність Гельдера і нерівність (5), знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^\rho j^r &\leq \left\{ \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^q \right\}^{\rho/q} \cdot \left\{ \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} j^{r \frac{q}{q-\rho}} \right\}^{1-\rho/q} \leq \\ &\leq 2^{A/2} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f) \cdot (2^{v r \frac{q}{q-\rho}} : 2^{v-1})^{\frac{q-\rho}{q}} = \\ &= 2^{A/2} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f) \cdot 2^{v r + \frac{(v-1)(q-\rho)}{q}} = \\ &= 2^{A/2 + r} \cdot 2^{(v-1)(r + \frac{q-\rho}{q})} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f). \end{aligned}$$

Звідси маємо, що

$$\sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^\rho j^r \leq C 2^{(v-1)(r + \frac{q-\rho}{q})} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f). \quad (6)$$

Сумуємо нерівність (6) по v і одержуємо

$$\sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^\rho j^r \leq C \sum_{v=1}^{\infty} 2^{(v-1)(r + \frac{q-\rho}{q})} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f)$$

або

$$\sum_{j=2}^{\infty} |A_j|^\rho j^r \leq C \sum_{v=0}^{\infty} 2^{v(r + \frac{q-\rho}{q})} \bar{\omega}_\rho^\rho(\lambda_{2^{v-1}}, f). \quad (7)$$

Враховуючи, що $\lambda_{-j} = -\lambda_j$, і прийнявши в (4) $\delta = |\lambda_{-2^{v-1}}|$, маємо

$$2^{-\frac{q}{2}} \sum_{j=-2^v}^{2^{v-1}+1} |A_j|^q \leq \bar{\omega}_\rho^q(|\lambda_{-2^{v-1}}|, f) = \bar{\omega}_\rho^q(\lambda_{2^{v-1}}, f).$$

Далі, подібно як вище, приходимо до нерівності

$$\sum_{j=-2}^{\infty} |A_j|^\rho |j|^\gamma < C \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(\gamma + \frac{q-\rho}{2})} \bar{\omega}_\rho^\beta(\lambda_{2^\nu}, f). \quad (8)$$

З нерівностей (7) і (8) випливає справедливості теореми 1.

Нехай $\{\lambda_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ спектр р.м.п. функції. Введемо такі позначення:

$$B_n = \{j: 2^{-n-1} \leq \lambda_j < 2^{-n}\}; \quad (9)$$

$$B_{-n} = \{j: -2^{-n-1} \leq \lambda_j < -2^{-n}\};$$

$$J_n = \max_{j \in B_n} |j|; \quad \mu(a) = \sum_{\lambda_j > a} 1.$$

Т е о р е м а 2. Якщо для р.м.п. функції $f(x)$, спектр якої має єдину точку згущення $\lambda^* = 0$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^\gamma [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/q} \bar{\omega}_\rho^\beta(2^{-n}, f) \quad (10)$$

$$1 < \rho \leq 2, \quad 1/\rho + 1/q = 1, \quad 0 < \beta < q, \quad \gamma > 0$$

збігається, то і ряд (2) збігається.

Д о в е д е н н я. З нерівності (4), прийнявши $\delta = 2^{-n}$, одержуємо

$$\sum_{j \in B_n} |A_j|^q < 2^{3/2} \bar{\omega}_\rho^q(2^{-n}, f). \quad (11)$$

Використовувачи нерівність Гельдера і (11), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B_n} |A_j|^\rho |j|^\gamma &\leq \left\{ \sum_{j \in B_n} |A_j|^q \right\}^{p/q} \left\{ \sum_{j \in B_n} |j|^{\gamma \frac{q}{q-\rho}} \right\}^{1-\beta/2} \leq \\ &\leq J_n^\gamma [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/q} \cdot 2^{3/2} \bar{\omega}_\rho^\beta(2^{-n}, f). \end{aligned}$$

Просумуємо одержану нерівність по n

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B_n} |A_j|^\beta |j|^r &\leq \\ &\leq 2^{\beta/2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n^r [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/2} \bar{\omega}_\rho^\beta(2^{-n}, f). \end{aligned} \quad (12)$$

Дальше зауважимо, що $J_{-n} = J_n$ (це випливає з рівності $\lambda_{-j} = -\lambda_j$) і кількість елементів множини B_n і B_{-n} збігається. Тому одержимо, подібно як вище, нерівність

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B_{-n}} |A_j|^\beta |j|^r &\leq \\ &\leq 2^{\beta/2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n^r [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/2} \bar{\omega}_\rho^\beta(2^{-n}, f). \end{aligned} \quad (13)$$

З нерівностей (12) і (13) випливає твердження теореми.

Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє для деякого α ($0 < \alpha \leq 1$) таку умову:

$$\left| \int_0^u f(x-t) dt \right| \leq K |u|^{1-\alpha}. \quad (14)$$

Покажемо, що в цьому випадку

$$\bar{\omega}_\rho(\delta, f) \leq N \delta^\alpha. \quad (15)$$

Дійсно, проінтегруємо по частинах внутрішній інтеграл у виразі для $\bar{\omega}_\rho(\delta, f)$. (Такі міркування є в роботі [2]).

$$\left| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) dt \right| = \left| \int_0^\infty e^{-\delta t} d \left(\int_0^t f(x-t_1) dt_1 \right) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| e^{-\delta t} \int_0^t f(x-t_1) dt_1 \right|_0^\infty + \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} \left(\int_0^t f(x-t_1) dt_1 \right) dt \leq \\
&\leq K \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} t^{1-\alpha} dt = K \delta^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} dt = \\
&= N \delta^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

де

$$N = K \int_0^\infty e^{-t} t^{1-\alpha} dt.$$

Тепер уже легко побачити, що з умови (14) випливає (15).

З теорем 1 і 2 одержуємо:

Н а с л і д о к 1. Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє умови (14) і

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-\beta/2} (\lambda_n)^{\beta\alpha} < \infty, \quad (16)$$

тоді ряд (2) збігається.

Дійсно, з умови (14) випливає (15), а тому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{2})} \bar{\omega}_p^\beta(\lambda_{2^\nu}, f) \leq N \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu(r+\frac{q-\beta}{2})} (\lambda_{2^\nu})^{\beta\alpha}.$$

Збіжність ряду в правій частині нерівності еквівалентна збіжності ряду (16) внаслідок монотонності послідовності $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Н а с л і д о к 2. Нехай р.м.п. функція $f(x)$ задовольняє умови (14) і

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^r [\mu(2^{-n-1}) - \mu(2^{-n})]^{1-\beta/2} \cdot 2^{-n\alpha} < \infty,$$

тоді ряд (2) збігається.

Доведення очевидне.

Прийнявши в (15) $\delta = 0$, $\beta = 1$, $\rho = 2$, $\lambda_n = O(1/n)$, одержимо, що при $\alpha > 1/2$ ряд Фур'є збігається абсолютно. Цей результат одержано як наслідок також в роботі [2], де вивчаються умови абсолютної збіжності рядів Фур'є р.м.п. функцій.

2. Нехай $f(x)$ - майже періодична функція Безіковича (B^p - м.п. функція) [1], спектр якої має одну точку згущення $\lambda^* = \infty$. Її ряд Фур'є запишемо в симетричній формі

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x} \quad (17)$$

$$(\lambda_j > 0, \lambda_{j+1} > \lambda_j \text{ при } j > 0; \lambda_{-j} = -\lambda_j; |A_j| + |A_{-j}| > 0).$$

Нехай

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} [M_x \{ |f(x+h) - f(x)|^p \}]^{1/p}.$$

Наведемо одну теорему про збіжність ряду

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^p |j|^r \quad (18)$$

Умови збіжності ряду (18) вивчаються і в роботі [3].

Т е о р е м а 3. Якщо для B^p - м.п. функції $f(x)$ ($1 < p \leq 2$), спектр якої має одну точку згущення $\lambda^* = \infty$, ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_{2j}/\lambda_{2j-1})^p \omega_p(1/\lambda_{2j}, f) 2^{v(r + \frac{q-p}{2})} \quad (19)$$

$$0 < \beta < q, \quad r > 0$$

збігається, тоді і ряд (18) збігається.

Д о в е д е н н я. Легко побачити, що

$$f(x+h) - f(x-h) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j i \sinh h \lambda_j e^{i\lambda_j x}.$$

З нерівності Хаусдорфа-Юнга маємо:

$$\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_j|^q |\sinh \lambda_j|^q \right]^{1/q} \leq \left[M_x \{ |f(x+h) - f(x-h)|^p \} \right]^{1/p}. \quad (20)$$

Прийнявши в (20) $h = 1/2 \lambda_{2^v}$, одержуємо

$$|\sin \lambda_{2^{v-1}} / 2 \lambda_{2^v}|^q \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^q \leq \omega_p^q(1/\lambda_{2^v}, f);$$

враховуючи нерівність

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad 0 < x \leq \pi/2,$$

приходимо до нерівності

$$\sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^q \leq (\pi \lambda_{2^v} / \lambda_{2^{v-1}})^q \omega_p^q(1/\lambda_{2^v}, f). \quad (21)$$

Використовуючи нерівність Гельдера і (21), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^p j^r &\leq \left\{ \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} |A_j|^q \right\}^{p/q} \cdot \left\{ \sum_{j=2^{v-1}+1}^{2^v} j^{\frac{q}{q-p}} \right\}^{1-p/q} \\ &\leq C (\lambda_{2^v} / \lambda_{2^{v-1}})^p \cdot 2^{v(r + \frac{q-p}{q})} \omega_p^p(1/\lambda_{2^v}, f). \end{aligned}$$

Далі доведення проводиться аналогічно теоремі 1.

Аналог теореми 2 для випадку, коли B^p -м.п. функція має одну точку згущення $\lambda^* = \infty$, наведений в роботі [3].

Використовуючи теорему 1 з роботи [5], можна одержати з теорем 1, 2, 3 твердження відносно абсолютної сумовності по Чезаро від'ємного порядку рядів Фур'є м.п. функцій (1), (17).

Л і т е р а т у р а

1. Б. М. Л е в и т а н. Почти периодические функции. М., 1953.
2. Н. П. К у п ц о в. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. Мат. сборник, т. 40 (82), № 2, 1956.
3. J. M u s i e l a k. On absolute convergence of Fourier series of some almost periodic functions. Ann. polon. math, VI, № 2, 1959.
4. F. H a u s d o r f. Eine Ausdehnung des Parsevalsehen Satzes über Fourier reihen. Math. Zeitschrift, 16, 1929.
5. G. S u n o u c h i. On the absolute summability of Fourier series. J. Math. Japan, v. 1, № 2, 1949.

—0—

УДК 817.946

М. І. ІВАНЧОВ

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

В необмеженій області Ω n -вимірного евклідового простору, що лежить зовні поверхні S , розглянемо рівняння еліптичного типу

$$Lu = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x) \quad (1)$$

з обмеженими коефіцієнтами і правою частиною, що належить до класу $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Для рівняння (1) задамо граничну умову

$$u(x)|_S = \varphi(x). \quad (2)$$

Відомо [1], що коли $f(x) = 0$, то задача Діріхле для рівняння (1) завжди має обмежений розв'язок при $a(x) < 0$. Якщо $f(x) \neq 0$, то вимоги, які потрібно накласти на $f(x)$ для існування обмеженого розв'язку, істотно залежать від поведінки $a(x)$ при великих $|x|$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. У випадку, коли $a(x) \leq -m^2 < 0$, $m = \text{const}$, від правої ча-

стини рівняння (1) досить вимагати обмеженості для того, щоб існував обмежений розв'язок задачі Діріхле для рівняння (1) [2]. Якщо ж коефіцієнт $\alpha(x)$ прямує до нуля при $|x| \rightarrow \infty$, то для існування обмеженого розв'язку задачі (1)-(2) від $f(x)$ теж потрібно вимагати прямування до нуля з деякою швидкістю. Дійсно, розглянемо рівняння

$$\Delta u - \frac{n-2+\varepsilon}{|x|^2} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{|x|^2} u = -1 \quad (3)$$

у випадку центральної симетрії, тобто $u = u(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Тоді для знаходження невідомої функції $u(x)$ одержимо звичайне диференціальне рівняння

$$\Delta u - \frac{n-2+\varepsilon}{|x|^2} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{1}{|x|^2} u = -1, \quad (4)$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u(r) = C_1 \varphi_1(r) + C_2 \varphi_2(r) + r^2,$$

де $\{\varphi_1(r), \varphi_2(r)\}$ — фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння. Легко бачити, що при довільних значеннях постійних C_1 і C_2 цей розв'язок буде необмежено зростати при $r \rightarrow \infty$. А це й означає, що в даному випадку рівняння (3) не має подного обмеженого розв'язку.

Наведемо достатню умову існування обмеженого розв'язку задачі Діріхле для рівняння (1) у випадку, коли $\alpha(x) \leq -\frac{C}{\tau(x)}$, де $\tau(x) > 0$ — деяка необмежена зростаюча функція.

Т е о р е м а 1. Нехай коефіцієнти і права частина рівняння (1) обмежені і належать до класу $C_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, гранична функція $\varphi(x)$ з умови (2) належить до класу $C_{2,\alpha}(S)$ і, крім того,

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Якщо $\alpha(x) \leq -\frac{C}{\tau(x)}$, то для існування обмеженого розв'язку задачі (1)-(2) з класу $C_{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ досить вимагати, щоб права частина рівняння (1) задовольняла умову $|f(x)| \leq \frac{C}{\tau(x)}$.

Доведення опирається на таку теорему [1] :

Т е о р е м а 2. Якщо коефіцієнти і права частина рівняння (1) і гранична функція $\varphi(x)$ неперервні і обмежені в $\bar{\Omega}$ і, крім того,

$\alpha_{ij} \xi_i \xi_j > 0$, то необхідною і достатньою умовою розв'язності задачі (1)-(2) в класі $C(\bar{\Omega}) \cap C_2(\Omega)$ є існування пари обмежених функцій $\bar{\omega}(x)$ і $\underline{\omega}(x)$ в класу $C_2(\bar{\Omega})$, таких, що

$$L \bar{\omega}(x) \leq f(x) \leq L \underline{\omega}(x).$$

Д о в е д е н н я т е о р е м и 1. Легко бачити, що в ролі функції $\bar{\omega}(x)$ досить взяти $\frac{C}{c}$, а $\underline{\omega}(x)$ можна прийняти рівною $-\frac{C}{c}$. Звідси випливає оправданість теореми 1.

Твердження теорем 1 і 2 легко переносяться на випадок необмежених областей з нескінченними границями.

Л і т е р а т у р а

1. N. M e y e r s, J. S e r r i n. The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations. Journal of Mathematics, 9, N 4, 1960, 513-538.

2. T. K u s a n o. On bounded solutions of exterior boundary value problems for linear and quasilinear elliptic differential equations. Japanese Mathematical Journal, 9, 1965, 536-562.



Д.В.ГРИЛИЦЬКИЙ, Б.Г.ШЕЛЕСТОВСЬКИЙ

ТИСК ГАРЯЧОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИЙ ПІВПРОСТІР

Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск гарячого кільцевого штампа на ізотропний півпростір при однорідних умовах для температури на границі розглянута Ф.Н.Бородачовою [1] .

В нашій праці розглядається задача про тиск гарячого кільцевого штампа з плоскою основою на трансверсально-ізотропний півпростір при мішаних умовах для температури на границі півпростору. При розв'язуванні задачі використано метод, запропонований З.Олесьяк [2] . За допомогою інтегрального перетворення Ханкеля задача зводиться до розгляду парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких знаходиться за формулою обернення Б.Нобля [3] . Для двох розглянутих нижче випадків наводимо формули, для нормальних контактних напружень під штампом на поверхні півпростору та співвідношення, які встановлюють залежність між стискувчою силою, яка діє на штамп, температурою і зміщенням штампа.

1. Розв'язок осесиметричної температурної задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла за допомогою функцій напружень в циліндричній системі координат дав А.Синг [4] :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \nabla_z^2 \Phi, \\ \sigma_{rz} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \left(\kappa_{11}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), \\ \sigma_{rz} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r};\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$u = -\alpha_2 \left(\kappa_{11}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right),$$

$$w = -\alpha_2 \left(\kappa_{12}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right); \quad (1.2)$$

$$\nabla_1^2 \Phi + \kappa_{22}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - c T \right),$$

$$\nabla_1^2 \Psi + \kappa_{21}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \alpha_1^{(1)} T. \quad (1.3)$$

Температура задовольняє рівняння теплопровідності

$$\nabla_1^2 T + L^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \left(\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Нами використані позначення праці [4], що дає можливість на цьому не зупинятися.

Якщо на границі півпростору задані температура $T(z)$ і нормальне напруження $\bar{\sigma}_{zz}(z)$ при відсутності дотичного, то, застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля ([5], [6]) до вищенаведених співвідношень, одержимо формули, які пов'яжуть переміщення точок границі півпростору з нормальними напруженнями і температурами на границі,

$$w(z, 0) = \frac{\alpha_2}{h_2(\kappa_{21} - \kappa_{22})} \int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) +$$

$$+ \frac{N(L - \kappa_{22}) + M h_2(\kappa_{22} - \kappa_{21})}{L} \bar{T}(\xi)] \mathcal{Y}_0(\xi z) d\xi; \quad (1.4)$$

$$u(z, 0) = \alpha_2 \int_0^\infty \left[\frac{\kappa_{11}^2 h_2(\kappa_{22} - \kappa_{21}) + \kappa_{21}}{h_2(\kappa_{21} - \kappa_{22})} \bar{\sigma}(\xi) + \right.$$

$$+ \left. \frac{N(L - \kappa_{22})\kappa_{21} + M h_2(\kappa_{22} - \kappa_{21})L}{L h_2(\kappa_{21} - \kappa_{22})} \bar{T}(\xi) \right] \mathcal{Y}_1(\xi z) d\xi. \quad (1.5)$$

Якщо ввести позначення

$$C_0 = \frac{h_2(K_{22} - K_{21})}{\alpha_2}; \quad K_0 = \frac{N(L - K_{22}) + Mh_2(K_{22} - K_{21})}{L},$$

то формула (1.4) набуває вигляду

$$-C_0 w(z, 0) = \int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) + K_0 \bar{T}(\xi)] J_0(\xi z) d\xi. \quad (1.6)$$

2. Розглядаємо круговий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого збігається з віссю Ox циліндричної системи координат. Штамп втискується в трансверсально-ізотропний півпростір $z > 0$ під дією сили P , яка направлена вздовж осі симетрії. Границя півпростору зовні і всередині штампів не завантажена, сили тертя між штампом і півпростором відсутні. Площина, яка обмежує штамп, має задану температуру, і тому, вважаючи тепловий контакт штампів з півпростором досконалим, температуру поверхні півпростору в межах площинки контакту будемо вважати рівною температурі поверхні штампів. Температура поверхні півпростору всередині штампів рівна нулеві, а за штампом поверхня півпростору теплоізолювана.

Потрібно знайти розподіл нормальних контактних напружень під штампом.

Граничні умови задачі при $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & 0 < z < \beta; & & w(z, 0) &= \delta, & \beta < z < \alpha; \\ T(z, 0) &= 0, & & & T(z, 0) &= T_0, & \\ \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & z > \alpha; & & \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & 0 < z < \infty. \\ \frac{\partial T}{\partial z}(z, 0) &= 0, & & & & & \end{aligned} \quad (2.1)$$

Знайдемо температуру поверхні півпростору для $z > \alpha$. Розв'язок рівняння теплопровідності беремо у вигляді

$$T(z, z) = \int_0^\infty c(\alpha) e^{-\frac{\alpha z}{L}} J_0(\alpha z) d\alpha, \quad z > 0.$$

Функція $C(\alpha)$ знаходиться, задовольняючи граничні умови для температури,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} C(\alpha) J_0(\alpha z) d\alpha &= \begin{cases} 0, & 0 < z < b, \\ T_0, & b < z < a, \end{cases} \\ \int_0^{\infty} \alpha C(\alpha) J_0(\alpha z) d\alpha &= 0, \quad z > a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Застосовуючи формулу обернення [5] до парних рівнянь (2.2), знаходимо функцію $C(\alpha)$:

$$C(\alpha) = \frac{2}{\pi} \alpha^2 T_0 \int_{b/a}^1 \frac{x \cos(\alpha x)}{\sqrt{\alpha^2 x^2 - b^2}} dx;$$

$$T(z, 0) = \int_0^{\infty} C(\alpha) J_0(\alpha z) d\alpha = \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2 - b^2}}{\sqrt{z^2 - b^2}}, \quad z > a.$$

Розглянемо спочатку задачу з такими граничними умовами:

$$\begin{aligned} w(z, 0) &= 0, \\ T(z, 0) &= T_1, \\ \sigma_{rz}(z, 0) &= 0, \quad 0 < z < a; \\ \sigma_{rz}(z, 0) &= 0, \quad 0 < z < \infty; \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(z, 0) &= 0, \end{aligned} \quad z > a, \quad (2.3)$$

де

$$T_1 = \begin{cases} 0, & 0 < z < b, \\ T_0, & b < z < a. \end{cases}$$

Подібно як і в праці [7], формулу (1.6) запишемо у вигляді

$$-\alpha c_0 w(\alpha \rho) = \int_0^{\infty} \bar{\sigma}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) J_0(\rho \rho) d\rho + \frac{2k_0 T_0 a^3}{\pi} \times \quad (2.4)$$

$$\times \int_{b/a}^1 \frac{t dt}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - b^2}} \left\{ \int_0^1 \frac{\cos pt J_0(\rho \rho) - 1}{\rho} d\rho + \int_1^{\infty} \frac{\cos pt J_0(\rho \rho)}{\rho} d\rho \right\}.$$

Задовольняючи граничні умови (2.3), використовуючи при цьому співвідношення (2.4) і теорему обернення для перетворення Ханкеля, приходимо до парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^{\infty} \bar{\sigma}\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) J_0(\rho \rho) d\rho + \frac{2k_0 T_0}{\pi} a^3 \int_{b/a}^1 \frac{t dt}{\sqrt{\alpha^2 t^2 - b^2}} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{\cos pt J_0(\rho \rho)}{\rho} d\rho \right. +$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\cos pt}{\rho} \dot{J}_0(\rho\rho) - 1 \, d\rho \right\} = a c_0 w(a\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (2.5)$$

$$\int_0^\infty \rho \bar{b}\left(\frac{\rho}{a}\right) J_0(\rho\rho) d\rho + \frac{2\kappa_0 T_0 a^3}{\pi} \int_{b/a}^1 \frac{t dt}{\sqrt{a^2 t^2 - b^2}} \int_0^\infty \cos pt J_0(\rho\rho) d\rho =$$

$$= \frac{2\kappa_0 T_0 a^2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 \rho^2 - b^2}},$$

Функцію $\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 \rho^2 - b^2}}$ апроксимуємо виразом

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{z} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \frac{a^3}{z^3}, \quad z > a.$$

Застосовуючи формулу обернення для парних інтегральних рівнянь (2.5), а також теорему обернення для перетворення Ханкеля, одержимо співвідношення для визначення контактних напружень під штапом

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -\frac{2c_0 \delta}{\pi \sqrt{a^2 - z^2}} - \kappa_0 T_0 - \frac{4}{\pi^2} \kappa_0 T_0 \sqrt{a^2 - b^2} \frac{\ln 2}{\sqrt{a^2 - z^2}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi a} \right) \kappa_0 T_0 \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 - z^2}} + \frac{a \sqrt{a^2 - z^2}}{z^3} - \right. \quad (2.6)$$

$$\left. - \frac{\pi a^3}{z^3} + \frac{a^3}{z^3} \arccos \frac{z}{a} \right\}, \quad 0 < z < a.$$

Щоб зняти напруження на поверхні півпростору в межах $0 < z < b$, накладемо на розв'язок задачі (2.3) розв'язок іншої задачі з такими граничними умовами:

$$\sigma_{zz}(z, 0) = -\sigma_{zz}^{(1)}, \quad 0 < z < b, \quad w(z, 0) = 0, \quad z > b; \quad (2.7)$$

$$\sigma_{zz}(z, 0) = 0, \quad 0 < z < \infty.$$

Розв'язувачи задачу (2.7) за вищезгаданов схемою, одержимо формулу для визначення нормальних напружень на границі півпростору для значень $\tau > \delta$.

В результаті накладання напружених станів (2.3) і (2.7) отримаємо формулу для нормальних контактних напружень під штапом. Роблячи заміну $\rho = \frac{z}{a}$ і позначаючи $\xi = \frac{\delta}{a}$, знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(\rho, 0) = & -\frac{2c_0\delta}{\pi a \sqrt{1-\rho^2}} - \left(\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} + \frac{4}{\pi^3} \sqrt{1-\xi^2} \kappa_0 T_0 \ln 2 \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\arcsin \frac{\rho^2+\xi}{\rho(1+\xi)} - \arcsin \frac{\rho^2-\xi}{\rho(1-\xi)} \right) \right] - \\ & - \kappa_0 T_0 - \frac{4\kappa_0 T_0 \sqrt{1-\xi^2} \ln 2}{\pi^2 \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} \right) \kappa_0 T_0 \times \\ & \times \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2} - \frac{\pi}{2\rho^3} + \frac{1}{\rho^3} \arccos \rho \right] + \Phi(\rho), \quad \xi < \rho < 1; \\ \sigma_{xz}(\rho, 0) = & - \left(\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} + \frac{4}{\pi^3} \sqrt{1-\xi^2} \kappa_0 T_0 \ln 2 \right) \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} \ln \frac{(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\xi^2)} + \rho^2 + \xi)(1-\xi)}{(\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\xi^2)} + \rho^2 - \xi)(1-\xi)} \right] + \Phi(\rho), \quad \rho > 1, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) = & \frac{4}{\pi^2} (1 - 2\sqrt{1-\xi^2}) \kappa_0 T_0 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{10} \rho^2 + \frac{15}{56} \rho^4 \right) \arcsin \frac{\xi}{\rho} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{3} \xi + \frac{1}{5} \xi^3 + \frac{1}{7} \xi^5 \right) \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} - \left(\frac{3}{10} \xi + \frac{5}{28} \xi^3 + \frac{15}{56} \xi^5 \right) \sqrt{\rho^2-\xi^2} \right]. \end{aligned}$$

Напруження σ_{xz} для $\rho > 1$ вказує на похибку, яку ми допускаємо при такому наближеному розв'язуванні задачі. Відносна похибка при $\xi \leq 0,7$ не перевищує 7%.

Встановимо залежність між силою P , температурою T_0 і зміщенням штамп δ

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_{zz}(z, 0) z dz,$$

$$P = a \left\{ \frac{4c_0 \delta}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{8c_0 \delta}{\pi} \arcsin \sqrt{1-\xi^2} \right\} + J;$$

$$\begin{aligned} J = & \kappa_0 T_0 a^2 \left\{ (1-\xi^2) \pi + \frac{8\sqrt{1-\xi^2}}{\pi^2} \ln 2 \left[\sqrt{1-\xi^2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} + \right. \right. \\ & + 2 \arcsin \sqrt{1-\xi^2} \left. \right] + 4 \left(1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\xi} + \frac{1}{\xi} \arccos \xi \right) + \\ & + \frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} \right) \left[0,23927 \arcsin \xi - \left(\frac{1}{6} \xi + \frac{1}{8} \xi^3 + \frac{1}{12} \xi^5 \right) \sqrt{1-\xi^2} + \right. \\ & + \left(\frac{1}{8} \xi + \frac{5}{28} \xi^3 \right) \sqrt{(1-\xi^2)^3} - \frac{17}{336} \xi \sqrt{(1-\xi^2)^5} - \frac{\pi}{12} \xi^2 - \\ & \left. \left. - \frac{3\pi}{80} \xi^4 - \frac{5\pi}{224} \xi^6 \right] \right\}. \end{aligned}$$

3. Розглянемо осесиметричну контактну задачу термопружності для трансверсально-ізотропного півпростору при таких умовах на границі:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & w(z, 0) &= \delta, & b < z < a; \\ \frac{\partial T}{\partial t}(z, 0) &= 0, & T(z, 0) &= T_0, \\ \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & z > a; \\ \sigma_{zz}(z, 0) &= 0, & T(z, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

Температура поверхні півпростору для $0 < z < b$ визначається за формулою

$$T(z, 0) = \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

Як і в попередньому випадку, розв'язок цієї задачі знайдемо шляхом накладання розв'язків таких двох задач:

$$\begin{aligned} w(z, 0) &= \delta, & 0 < z < a; & \quad \sigma_{zz}(z, 0) = 0, & \quad z > a; \\ T(z, 0) &= 0, & 0 < z < \infty; & \quad \sigma_{zx}(z, 0) = 0, & \quad 0 < z < \infty. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Розв'язок задачі з граничними умовами (3.2) відомий. Для нормальних напружень під штапом маємо формулу

$$\sigma_{zz}^{(1)} = -\frac{2c_0\delta}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}, \quad 0 < z < a. \quad (3.3)$$

Другий напружений стан відповідає таким умовам при $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, 0) &= -\sigma_{zz}^{(1)}, & 0 < z < b; & \quad w(z, 0) = 0, & \quad z > b, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(z, 0) &= 0, & & \quad T(z, 0) = T_0, & \quad b < z < a; \\ T(z, 0) &= 0, & \quad z > a; & \quad \sigma_{zx}(z, 0) = 0, & \quad 0 < z < \infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Задовольняючи граничні умови (3.4), приходимо до парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) + \kappa_0 \bar{T}(\xi)] \gamma_0(\xi z) d\xi &= \frac{2c_0\delta}{\pi\sqrt{a^2-z^2}} + \\ &+ \frac{2\kappa_0 T_0}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}, \quad 0 < z < b; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\int_0^\infty [\bar{\sigma}(\xi) + \kappa_0 \bar{T}(\xi)] \gamma_0(\xi z) d\xi = 0, \quad z > b.$$

Функцію $\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-z^2}}$ на $0 < z < b$ апроксимуємо виразом

$$c_1^0 + c_2^0 z^2 + c_3^0 z^4,$$

де

$$c_1^0 = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

$$C_2^0 = \frac{32}{3\pi b^2} \arcsin \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}} - \frac{10}{\pi b^2} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{1}{3b^2},$$

$$C_3^0 = \frac{28}{\pi b^4} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{32}{3\pi b^4} \arcsin \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}} + \frac{4}{3b^4}.$$

Застосувавши формулу обернення для парних інтегральних рівнянь, а також теорему обернення інтегрального перетворення Ханкеля, одержимо співвідношення для визначення нормальних напружень на границі півпростору для значень $z > b$.

Накладаючи напружені стани (3.2) та (3.4), одержимо формулу для визначення контактних напружень під кільцевим штампом. Зробивши заміну $\rho = \frac{z}{a}$ і ввівши позначення

$$C_1^0 = C_1, \quad C_2^0 = \frac{C_2}{b^2}, \quad C_3^0 = \frac{C_3}{b^4}, \quad \ell = \frac{1}{a},$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\rho, 0) = & -\frac{2C_0\delta}{\pi a \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{2C_0\delta}{\pi^2 a} \ln \frac{1+\ell}{1-\ell} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\ell^2}} + \\ & + \frac{2C_0\delta}{\pi^2 a \sqrt{1-\rho^2}} \left[\arcsin \frac{\rho^2+\ell}{\rho(1+\ell)} - \arcsin \frac{\rho^2-\ell}{\rho(1-\ell)} \right] - \kappa_0 T_0 + \\ & + \frac{2}{\pi} \kappa_0 T_0 \left[\left(C_1 + C_2 \frac{\rho^2}{\ell^2} + C_3 \frac{\rho^4}{\ell^4} \right) \arcsin \frac{\ell}{\rho} - \right. \\ & \left. - \frac{(15C_1 - 5C_2 - 2C_3)\ell^4 + (15C_2 - 5C_3)\ell^2 \rho^2 + 15C_3 \rho^4}{15\ell^3 \sqrt{\rho^2-\ell^2}} \right], \quad \ell < \rho < 1; \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}(\rho, 0) = -\frac{2c_0\delta}{\pi^2 a} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \ell^2}} \ln \frac{1+\ell}{1-\ell} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \times \right. \\
\times \ln \frac{(\sqrt{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - \ell^2)} + \rho^2 + \ell)(1 - \ell)}{(\sqrt{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - \ell^2)} + \rho^2 - \ell)(1 + \ell)} \Bigg) + \frac{2}{\pi} \kappa_0 T_0 \left[(c_1 + c_2 \frac{\rho^2}{\ell^2} + c_3 \frac{\rho^4}{\ell^4}) \times \right. \\
\left. \times \arcsin \frac{\ell}{\rho} - \frac{(15c_1 - 5c_2 - 2c_3)\ell^4 + (15c_2 - 5c_3)\ell^2 \rho^2 + 15c_3 \rho^4}{15\ell^3 \sqrt{\rho^2 - \ell^2}} \right], \quad \rho > 1.$$

Як і в першому випадку, напруження σ_{zz} для $\rho > 1$ вказує на похибку розв'язку. Відносна похибка не перевищує 7% при $\ell < 0,7$.

Зв'язок між силою P , переміщенням δ і температурою T_0 штампна дається за формулою

$$P = a \left[\frac{4c_0\delta}{\pi} \sqrt{1 - \ell^2} \ln \frac{1+\ell}{1-\ell} + \frac{8c_0\delta}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \ell^2} \right] + j; \\
j = \kappa_0 T_0 a^2 \left\{ (1 - \ell^2) \pi - 4 \left[\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4\ell^2} + \frac{c_3}{6\ell^4} \right) \arcsin \ell - \right. \right. \\
- (30c_1 + 25c_2 + 22c_3) \frac{\ell \sqrt{1 - \ell^2}}{60} - (16c_3 + 9c_2) \frac{\sqrt{(1 - \ell^2)^3}}{36\ell} - \\
\left. \left. - \frac{\sqrt{(1 - \ell^2)^5}}{6\ell^3} - \frac{\pi \ell^2}{4} \left(c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} \right) \right] \right\}.$$

Нами знайдені також формули для визначення нормальних переміщень граничних точок півпростору, але для скорочення викладу тут їх не наводимо.

На рис. 1 і 2 показано розподіл нормальних контактних напружень під штампом, відповідно у першому і другому випадках при $\ell = 0,2$.

$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{\pi \alpha^2 \sigma_{xx}^{(p)}}{\rho}$ — напруження, які викликані отискувчою силою ρ ;

$\sigma_{zz}^{(2)} = \frac{\sigma_{xx}^{(T)}}{K_0 T_0}$ — напруження, які викликані температурою T_0 .

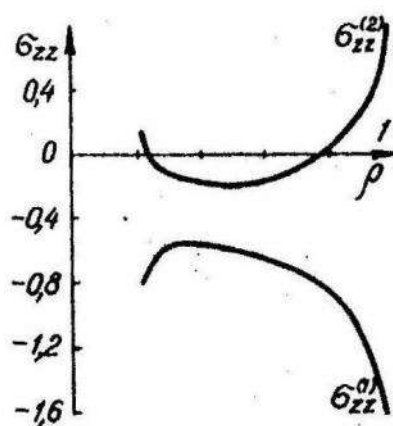


Рис. 1.

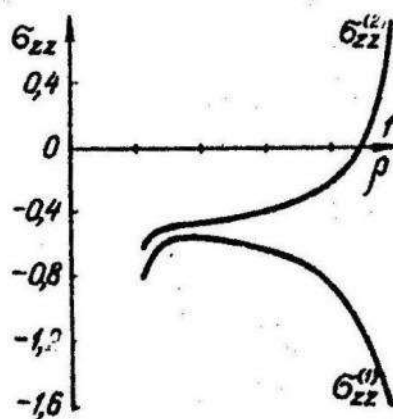


Рис. 2.

В таблиці подано значення коефіцієнтів K_0 , C_0 для деяких матеріалів

Матеріал	Магніт	Пісковик	Ізотропний магніт
$C_0 \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	$2,523 \cdot 10^5$	$1,957 \cdot 10^5$	$2,283 \cdot 10^5$
$K_0 \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$	8,42	8,50	8,18

Для ізотропного матеріалу коефіцієнти K_0 та C_0 набирають значення

$$C_0 = \frac{G}{1-\nu}; \quad K_0 = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} G,$$

де G — модуль зсуву; ν — коефіцієнт Пуассона; α — коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Л і т е р а т у р а

1. Ф. Н. Б о р о д а ч е в а. Термоупругая контактная задача для кольцевого штампа. Сб. "Некоторые задачи прочности и устойчивости плоских и пространственных систем", Приволжское кн. изд-во, Саратов, 1966.
2. Z. O l e s i a k. Annular Punch on Elastic Semispace, Arch. Mech. Stosow; vol. 17. N 4, 1965.
3. B. N o b l e. The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method. Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 59, N 2, 1963.
4. A. S i n g h. Axisymmetrical Thermal Stresses in Transversely Geotropic Bodies, Arch. Mech. Stosow., vol. 12, N 3, 1960.
5. И. С н е д д о н. Преобразования Фурье, ИЛ, М., 1955.
6. Я. С. У ф л я н д. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Л., 1967.
7. Mahalanalis Ranjiz Kumars. A mixed boundary values problem of thermoelasticity for a halfspace, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 20, N 1, 1967.

—0—

УДК 538

Т.Л.МАРТИНОВИЧ, В.П.ВУШКО

КРУГОВЕ ЕКСЦЕНТРИЧНЕ КІЛЬЦЕ З ПІДСИЛЕННЯМ ВНУТРІШНІМ КРАЄМ

Розглянемо пластинку, обмежену двома неконцентричними колами $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ радіусів z_1 і z_2' ($z_2' > z_1$). Нехай для означеності внутрішній край пластинки $\mathcal{L}_1$ підсилений пружним кільцем (стержнем) сталого перерізу, а до зовнішнього краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладені напруження N_2 і T_2 (N_2 , T_2 - нормальна і дотична складові заданих напружень).

Вважається, що зовнішні зусилля, прикладені до пластинки, задовольняють умови статички. Для одержання контурних умов розглядуваної задачі в думці відкинемо кільце, а дію його на пластинку замінимо контактними напруженнями $N_1^{(i)}$ і $T_1^{(i)}$ або переміщеннями u_1 , v_1 точок контура $\mathcal{L}_1$. Розглядаючи окремо першу і змінану основні крайові задачі для пластини, обмеженої контуром $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, на підставі [1,2] маємо

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_2} \varphi_1(t) \overline{F_1(t)} dt - \varkappa \int_{\mathcal{L}_1} \varphi_1(t) \overline{F_1(t)} dt - \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} \overline{F_2'(t)} d\bar{t} = \\ = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(t)} dt - 2\mu \int_{\mathcal{L}_1} \overline{F_1(t)} d(u_1 + i v_1); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \varphi_1(t) \overline{F_1(t)} dt - \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} \overline{F_1'(t)} t d\bar{t} = \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) \overline{F_1(t)} dt + \\ + \int_{\mathcal{L}_1} (N_1^{(i)} + iT_1^{(i)}) \overline{F_1(t)} dt; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} F_1(t) d\bar{t} = \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} F_1'(t) t dt + \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) F_1(t) dt + \\ + \int_{\mathcal{L}_1} (N_1^{(i)} + iT_1^{(i)}) F_1(t) dt; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} F_1(t) d\bar{t} = (\varkappa + 1) \int_{\mathcal{L}_1} \varphi_1(t) F_1(t) dt + \int_{\mathcal{L}} \overline{\varphi_1(t)} F_1'(t) t dt + \\ + \int_{\mathcal{L}_2} (N_2 + iT_2) F_1(t) dt - 2\mu \int_{\mathcal{L}_1} F_1(t) d(u_1 + i v_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Віднімаючи з рівності (4) рівність (3), одержимо

$$(1 + \varkappa) \int_{\mathcal{L}_1} \varphi_1(t) F_1(t) dt = \int_{\mathcal{L}_1} (N_1^{(i)} + iT_1^{(i)}) F_1(t) dt + 2\mu \int_{\mathcal{L}_1} F_1(t) d(u_1 + i v_1). \quad (5)$$

Тут t - афіка точки контура $\mathcal{L}$; μ - модуль зсуву; $de = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ - для плоского напруженого стану; $\varphi_i(t) = \varphi'_i(t)$, $\psi_i(t) = \psi'_i(t)$ - комплексні потенціали [3]; $F_i(x)$ - довільна голоморфна функція в області пластинки.

Напружено-деформований стан підсилювального кільця описується рівнянням малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Тому залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня $\mathcal{L}_1$, спаяного з пластинкою, відносним подовженням його волокна $\mathcal{L}_0$, нейтрального для чистого згину стержня, й кутом повороту поперечного перерізу θ можемо подати, згідно з [4], такою формулою:

$$d(u_i + i v_i) = \left[\frac{z_i}{z_0} e_0 + (z_i - z_0) i \frac{d\theta}{dt} + i \theta \right] dt, \quad (6)$$

де z_0 - радіус кривини нейтральної для чистого згину лінії $\mathcal{L}_0$, яка зміщена від осі стержня до центра її кривини на величину η_c . З рівнянь рівноваги елемента стержня, з врахуванням його розмірів [4] і закону Гука [5]

$$V_c = g e_0, \quad M = g \eta_c z_i i \frac{d\theta}{dt}, \quad (7)$$

одержуємо

$$(N_i^{(1)} + i T_i^{(1)}) dt = \pm \frac{1}{2h} d \left[i (V_n + i V_c) \right] + \frac{h^*}{h} \frac{z_i}{z_0} (N_i + T_i) dt, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} i(V_n + i V_c) &= \frac{d}{dt} \left[g(z_0 - z_i) e_0 + g \eta_c z_i i \frac{d\theta}{dt} \right] + i g e_0 i \pm \\ &\pm 2h^* (z_i - z_0) \frac{z_i}{z_0} i T_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Верхній знак береться при $z_i < z_0$; нижній - при $z_i > z_0$. Тут позначено: V_n і V_c - поперечна і поздовжня складові головного вектора; $M = M_c + \eta_c V_c$ - головний момент внутрішніх зусиль в довільному

перерізі стержня; N_1 , T_1 - зовнішні напруження, прикладені до стержня; $2h$ - товщина пластинки; $2h^*$ - товщина стержня; z_1 і z_2 - радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під z_1 будемо розуміти радіус кривини того крайового волокна $\mathcal{L}$, вздовж якого стержень спаяний з пластинкою; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$.

Далі розглядувану область, зайняту пластинкою, конформно відобразимо на кільце, що міститься між двома внутрішніми колами r_1 і r_2 радіусів ρ_1 і ρ_2 площини S , прийнявши [3]

$$z = \omega(\xi) = \frac{\xi}{1 - \alpha \xi}, \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 < \frac{1}{\alpha}. \quad (10)$$

Внесемо вирази (6) і (8) в (1)-(5) та проведемо потрібні перетворення; одержимо в області S при відсутності навантаження на кільце ($N_1 = 0$, $T = 0$) такі крайові умови задачі ($z_1 > z_0$):

$$\begin{aligned} \int_{r_1} \Phi(\sigma) \overline{F'(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{r_1} \overline{\Phi(\sigma)} F'(\sigma) \omega(\sigma) d\bar{\sigma} &= \frac{g}{2h} \int_{r_1} e_0 \overline{F'(\sigma)} \frac{\xi \omega'(\sigma)}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} d\bar{\sigma} - \\ &- \frac{g}{2h} \int_{r_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{z_0 z_1 \sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} \right] d \left\{ \frac{F'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right\} + \int_{r_2} (N_2 + iT_2) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{r_2} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \kappa \int_{r_1} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma - \int_{r_1} \overline{\Phi(\sigma)} F'(\sigma) \omega(\sigma) d\bar{\sigma} &= \\ &= 2\mu \int_{r_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0) \sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} + i \sigma \right] \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\bar{\sigma} + \int_{r_2} (N_2 + iT_2) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma; \end{aligned} \quad (12)$$

$$(1 + \kappa) \int_{r_1} \Phi(\sigma) \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma = 2\mu \int_{r_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0) \sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} + i \sigma \right] \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\bar{\sigma} - \quad (13)$$

$$- \frac{g}{2h} \int_{r_1} e_0 \overline{F'(\sigma)} \frac{\xi \omega'(\sigma)}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} d\bar{\sigma} + \frac{g}{2h} \int_{r_1} \left[(z_0 - z_1) e_0 + i \frac{z_0 z_1 \sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} \right] d \left\{ \frac{F'(\sigma) \sigma^2}{\rho_1^2 \omega'(\sigma)} \right\};$$

$$\int_{\gamma} \overline{\Psi(\sigma)} F(\sigma) \overline{\omega'(\sigma)} d\bar{\sigma} = (\alpha + 1) \int_{\gamma_1} \Phi(\sigma) F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\gamma} \overline{\Phi(\sigma)} F'(\sigma) \omega(\sigma) d\sigma -$$
(14)

$$- 2\mu \int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} + i\theta \right] F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\gamma_2} (N_2 + iT_2) F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma.$$

Тут σ - аф. ко точки контура $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$;

$$\Phi(\xi) = \Phi_1[\omega(\xi)]; \Psi(\xi) = \Psi_1[\omega(\xi)]; F(\xi) = F_1[\omega(\xi)]. \quad (15)$$

При обході контура $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ область повинна залишатися зліва. До системи контурних умов (11)-(14) необхідно долучити умову однозначності переміщень (6)

$$\int_{\gamma_1} \left[\frac{z_0}{z_1} e_0 + i \frac{(z_1 - z_0)\sigma}{\rho_1 |\omega'(\sigma)|} \frac{d\sigma}{d\bar{\sigma}} + i\theta \right] \omega'(\sigma) d\sigma = 0. \quad (16)$$

Функції (15), голоморфні в кільці $\rho_1 < |\xi| < \rho_2$, розвинемо у ряди Лорана:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \xi^{-k}; \\ \Psi(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} A'_k \xi^k + \sum_{k=1}^{\infty} B'_k \xi^{-k}; \\ F(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \xi^{-n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Величини e_0 і θ , що описують деформацію кільця, а також навантаження $N_2 + iT_2$, подамо у формі комплексних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} e_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{2k} \bar{\alpha}_k \sigma^{-k}; \\ \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{2k} \bar{\beta}_k \sigma^{-k}; \\ N_2 + iT_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^{(2)} \sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^{(2)} \sigma^{-k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Внесемо розклади (17), (18) і вираз (10) у крайові умови (11)-(13).

Після вичислення контурних інтегралів з врахуванням довільності функції $F(\xi)$, дістанемо таку нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів A_k , B_k , α_k і β_k :

$$\begin{aligned}
 & (\rho_2^{-2n} - \rho_1^{-2n}) \left[\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a^{-k} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) a^k B_k \right] - \\
 & - n \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\rho_2^{2(n+k)} - \rho_1^{2(n+k)}) a^k \bar{A}_k + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_2^{2(n-k)} - \rho_1^{2(n-k)}) a^{-k} \bar{B}_k \right] = \\
 & = - \frac{g}{2h} n \rho_1^{2n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k} (1 - a^2 \rho_1^2) \alpha_k - a^{-n+2} \rho_1^2 \alpha_n + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \rho_1^{2k} (1 - a^2 \rho_1^2) \bar{\alpha}_k \right] + \\
 & + \frac{g}{2a^{n-1}h} (z_0 - z_1) n \rho_1^{2(n-1)} \left[(1-n) \alpha_{n-1} + 2na \rho_1^2 \alpha_n - (n+1) a^2 \rho_1^4 \alpha_{n+1} \right] + \\
 & + \frac{gi}{2a^{n-1}h} \eta_c z_1 n \rho_1^{2n-3} \left\{ a(n-1)(n-2) \beta_{n-2} - (n-1) [(n-1) + (3n-1) a^2 \rho_1^2] \beta_{n-1} + \right. \\
 & + na \rho_1^2 [(3n-1) + (3n+1) a^2 \rho_1^2] \beta_n - (n+1) a^2 \rho_1^4 [(3n+1) + (n+1) a^2 \rho_1^2] \beta_{n+1} + \\
 & \left. + (n+1)(n+2) a^3 \rho_1^6 \beta_{n+2} \right\} + \rho_2^{-2n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(2)} (n-k) a^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) a^k \delta_k^{(2)} \right] \\
 & (n = 0, 1, 2, \dots);
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho_2^{-2n} - \rho_1^{-2n}) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) a^k B_k + n \sum_{k=n+1}^{\infty} [\rho_2^{2(k-n)} - \rho_1^{2(k-n)}] a^k \bar{A}_k = \\
 & = \frac{g}{2h} n \rho_1^{-2n-1} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_1^{2k} a^k \bar{\alpha}_k - a^2 \rho_1^2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_1^{2k} a^k \bar{\alpha}_k \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g}{2h} a^{n+1} (z_0 - z_1) n \left[(n-1) a^2 \bar{\alpha}_{n-1} - 2na \bar{\alpha}_n + (n+1) \bar{\alpha}_{n+1} \right] - \quad (20) \\
& -\frac{ig}{2h} a^{n+1} \eta_c z_1 \rho_1^{-1} n \left\{ a^3 (n-1)(n-2) \bar{\beta}_{n-2} - (n+1) a^2 \left[(3n-1) + (n-1) a^2 \rho_1^2 \right] \bar{\beta}_{n-1} + \right. \\
& + n a \left[(3n-1) a^2 \rho_1^2 + (3n+1) \right] \bar{\beta}_n - (n+1) \left[(3n+1) a^2 \rho_1^2 + (n+1) \right] \bar{\beta}_{n+1} + \\
& \left. + a \rho_1^2 (n+1)(n+2) \bar{\beta}_{n+2} \right\} + \rho_2^{-2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n) a^k \delta_k^{(2)} \\
& (n = 1, 2, 3, \dots);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_2^{2n} + a \rho_1^{2n}) \left[\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a^{-k} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) a^k B_k \right] - \\
& - n \left[\sum_{k=0}^{\infty} (\rho_2^{2(n+k)} - \rho_1^{2(n+k)}) a^k \bar{A}_k + \sum_{k=1}^{n-1} (\rho_2^{2(n-k)} - \rho_1^{2(n-k)}) a^{-k} \bar{B}_k \right] = \\
& = 2\mu \rho_1^{2n} \frac{z_0}{z_1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a^{-k} \alpha_k + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{2k} (n+k) a^k \bar{\alpha}_k \right] + \quad (21) \\
& + 2\mu \rho_1^{2n} i \left\{ n \beta_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{-k} \left[n-k + k(z_1 - z_0) \rho_1^{-1} (1 - a^2 \rho_1^2) \right] \beta_k - \right. \\
& \left. - (z_1 - z_0) \rho_1^{2n} \beta_n \right\} + 2\mu \rho_1^{2n} i \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1^{2k} a^k \left[n+k + k(z_1 - z_0) \rho_1^{-1} (a^2 \rho_1^2 - 1) \right] \bar{\beta}_k + \\
& + \rho_2^{2n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a^{-k} \gamma_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} (n+k) a^k \delta_k^{(2)} \right] \\
& (n = 0, 1, 2, 3, \dots);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho_2^{-2n} + \alpha \rho_1^{-2n}) \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} (\kappa-n) a^{\kappa} B_{\kappa} + n \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} a^{\kappa} (\rho_2^{2(\kappa-n)} - \rho_1^{2(\kappa-n)}) A_{\kappa} = \\
& = 2\mu \rho_1^{-2n} \frac{z_0}{z_1} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \rho_1^{2\kappa} (\kappa-n) a^{\kappa} \bar{A}_{\kappa} + 2\mu \rho_1^{-2n} i \{ a^{n+2} (z_1 - z_0) \rho_1^{2n+1} n \bar{\beta}_n + \\
& + \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \rho_1^{2\kappa} [(\kappa-n) a^{\kappa} + a^{\kappa} (z_1 - z_0) \rho_1^{-1} \kappa (a^2 \rho_1^2 - 1)] \bar{\beta}_{\kappa} \} + \rho_2^{-2n} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \delta_{\kappa}^{(2)} (\kappa-n) a^{\kappa} \\
& \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}
\tag{22}$$

До системи рівнянь (19)-(22) потрібно додати умову однозначності переміщень (16)

$$\frac{z_0}{z_1} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \rho_1^{2\kappa} a^{\kappa-1} \bar{A}_{\kappa} + i \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \rho_1^{2\kappa} a^{\kappa-1} \{ 1 + (z_1 - z_0) \rho_1^{-1} [a^2 \rho_1^2 - 1] \} \bar{\beta}_{\kappa} = 0 \tag{23}$$

та умову голоморфності функції $\Psi(\zeta)$ (кілець вільне від зовнішнього навантаження)

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa a^{\kappa-1} B_{\kappa} = 0. \tag{24}$$

Функція напружень $\Psi(\zeta)$ визначається з контурної умови (14). Для кільця прямокутного перерізу з розмірами $2h^* \times b$

$$g = 2h^* E^* b, \quad r = \frac{h^*}{h}, \quad F = 2h^* b, \quad \delta = \frac{b}{z_1};$$

$$\eta_c \cong \frac{\delta}{6(2-\delta)} \cdot b; \quad z_1 - z_0 \cong \frac{b}{2} \left(1 + \frac{\delta}{3(2-\delta)} \right);$$

$$\eta_z \cong \frac{1}{6(2-\delta)} \cdot b^2; \quad \frac{z_0}{z_1} \cong 1 - \frac{1}{2} \delta \left(1 + \frac{\delta}{3(2-\delta)} \right);$$

b - ширина кільця в площині його кривини.

Для числового прикладу візьмемо мідну пластину і стальне кільце прямокутного перерізу при таких значеннях пружних сталих матеріалу і геометричних параметрів:

$$\mu = 4,42 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad \alpha e = 2,08; \quad E^* = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{z'_2}{z_2} = 3; \quad r = 1; \quad \delta = 0,2; \quad z'_2 = 1.$$

До зовнішнього краю пластинки $\mathcal{L}_2$ прикладений рівномірний тиск інтенсивності p_2 . Розв'язувалась укорочена система одержаних рівнянь (22) порядку на ЕОЦМ "Минск-22".

Нижче наведені числові значення кільцевих напружень σ_θ в пластинці і $\bar{\sigma}$ - в кільці в окремих точках вздовж лінії спая.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
σ_θ/p_2	-1,42	-1,48	-1,59	-1,70	-1,73	-1,71	-1,69
$\bar{\sigma}/p_2$	-2,75	-2,94	-3,12	-3,27	-3,36	-3,32	-3,26
$\sigma_\theta^{(0)}/p_2$	-2,20	-2,26	-2,40	-2,52	-2,56	-2,54	-2,52

Через $\sigma_\theta^{(0)}$ позначено напруження в пластинці при відсутності кільця. Нормальні напруження в перерізі кільця вивислялися за формулою

$$\bar{\sigma} = \frac{V_r}{F} \cdot \frac{z_0}{z} + \frac{M}{F\eta_c} \left(1 - \frac{z_0}{z}\right),$$

де z - радіус кривини довільного волокна стержня.

Л і т е р а т у р а

1. Т. Л. М а р т и н о в и ч. Обобщение теоремы Бетти-Максвелла в двумерной теории упругости. Прикладная механика, т. II, вып. 3, 1966.
2. Т. Л. М а р т и н о в и ч, В. П. В у ш к о. Про один спосіб розв'язування змішаних задач для однорідних і кусочно-однорідних середовищ. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вып. 5, 1970.
3. Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Некоторые основные задачи математической теории упругости. "Наука", М., 1966.
4. Т. Л. М а р т и н о в и ч. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленням пружним кільцем. Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вып. 1, 1965.

5. В. И. Федосьев. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.

6. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.

7. Ю. И. Соловьев. Плоская задача теории упругости для концентрического кольца с подкрепленным контуром. Труды Новосибирского ин-та ин. т. д. транспорта, вып. 14, 1948.

—0—

УДК 517.3

Д.В.ГРИЛИЦЬКИЙ, В.Г.ГАБРУСЕВ, О.П.ПІДДУБНЯК

ДЕЯКІ ВИПАДКИ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

1. З теорії осесиметричної задачі термопружності для трансверсально-ізотропних тіл [5] відомі такі співвідношення:

$$\begin{aligned}T(\bar{r}, z) &= A_{33} A_{44} (\mu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) (\mu_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Psi(\bar{r}, z); \\ \sigma_{zz}(\bar{r}, z) &= \beta A_{33} A_{44} \nabla^2 (d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Psi(\bar{r}, z); \\ \sigma_{rz}(\bar{r}, z) &= -\beta A_{33} A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} (d \nabla^2 + e \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Psi(\bar{r}, z).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Функція $\Psi(\bar{r}, z)$ у випадку стаціонарного температурного поля і при відсутності в тілі джерел тепла визначається з рівняння

$$(\mu_1^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) (\mu_2^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) (\mu_3^2 \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Psi(\bar{r}, z) = 0, \tag{1.2}$$

де

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.3)$$

В (1.1) та (1.2) використані позначення праці [5] .

2. Розглянемо безмежний плоскопаралельний трансверсально-ізотропний шар скінченної товщини $2h$, граничні площини якого вільні від навантаження.

Вважаємо, що площини ізотропії пружного шару паралельні граничним площинам.

Помістимо початок циліндричної системи координат r, φ, z в осерединній площині шару, а вісь z направимо перпендикулярно до площин ізотропії (рис. 1).

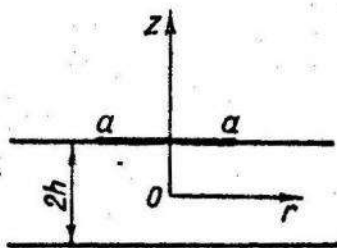


Рис. 1.

Розглянемо таку задачу осесиметричної теорії термопружності при однорідних умовах для температури на границі шару.

На крузі радіуса $r = a$ площини $z = h$ задана температура $T(r, z) = T_0$, а поза кругом - $T(r, z) = 0$; на нижній границі шару, тобто при $z = -h$

$T(r, z) = 0$. Потрібно визначити температурне поле і температурні напруження в шарі.

Будемо розв'язувати задачу в двох стадіях.

В першій стадії розглянемо температурне поле, симетричне відносно площини $z = 0$, в другій - антисиметричне [5] .

У випадку симетричного температурного поля граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} T^{(s)}(r, \pm h) &= \begin{cases} \frac{1}{2} T_0 & 0 < r < a; \\ 0 & r > a; \end{cases} \\ \sigma_{zz}^{(s)}(r, \pm h) &= 0, & r \geq 0; \\ \sigma_{rz}^{(s)}(r, \pm h) &= 0, & r \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Застосовуючи до формул (1.1) інтегральне перетворення Ханкеля [7] і [8], знайдемо інтегральні вирази для температури і температурних напружень через трансформанту Ханкеля, яка визначається із рівняння (1.2),

$$\bar{\varphi}(\alpha, z) = \sum_{j=1,3,5} C_j \operatorname{ch} \mu_j \alpha z + D_j \operatorname{sh} \mu_j \alpha z. \quad (2.2)$$

Вимагаючи виконання граничних умов (2.1), визначимо коефіцієнти C_j , D_j .

При обчисленні інтегралів, через які визначається температура і напруження, ми користуємось методом лишків [4], враховуючи при цьому деякі властивості функцій Бесселя [2] (див. також працю [10]).

Пропускаючи проміжні викладки, наведемо остаточні результати:

$$T^{(s)}(z, z) = \frac{T_0 \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \right\}}{2} \frac{T_0 a}{\mu_s h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(\mu_s z \rho_{n,1}) \left\{ \begin{array}{l} I_0(z \rho_{n,1}) K_1(a \rho_{n,1}) \\ I_1(a \rho_{n,1}) K_0(z \rho_{n,1}) \end{array} \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad |z| \leq h;$

$$G_{zz}^{(s)}(z, z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_s) a}{B} \left\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1,3,5} \cos(\mu_j z \rho_{n,m}) \frac{\delta_j^{(s)}(\rho_{n,m})}{S_m(\rho_{n,m})} \left\{ \begin{array}{l} I_0(z \rho_{n,m}) K_1(a \rho_{n,m}) \\ I_1(a \rho_{n,m}) K_0(z \rho_{n,m}) \end{array} \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad |z| \leq h; \quad (2.3)$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(s)}(z, z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_s) a}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1,3,5} \sin(\mu_j z \rho_{n,m}) \frac{\delta_j^{(s)}(\rho_{n,m})}{S_m(\rho_{n,m})} \left\{ \begin{array}{l} I_1(z \rho_{n,m}) K_1(a \rho_{n,m}) \\ I_1(a \rho_{n,m}) K_1(z \rho_{n,m}) \end{array} \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad |z| \leq h.$

Тут введені позначення:

$$f(\mu_j) = \epsilon \mu_j^2 - d, \quad B = (\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2), \quad \rho_{n,1} = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\mu_5 h};$$

$\rho_{n,2}$ - корені трансцендентного рівняння

$$\mu_3 \cos \mu_1 h \rho_{n,2} \sin \mu_5 h \rho_{n,2} - \mu_1 \cos \mu_3 h \rho_{n,2} \sin \mu_5 h \rho_{n,2} = 0,$$

які є дійсними [3];

$$\delta_j^{(s)}(\alpha) = \mu_\kappa \cos \mu_\ell h \alpha \sin \mu_\kappa h \alpha - \mu_\ell \cos \mu_\kappa h \alpha \sin \mu_\ell h \alpha, \quad (2.4)$$

причому $j=1, \ell=3, \kappa=5; j=3, \ell=5, \kappa=1; j=5, \ell=1, \kappa=3;$

$$S_1(\rho_{n,1}) = (-1)^{n+1} \mu_5 h \delta_5^{(s)}(\rho_{n,1}),$$

$$S_2(\rho_{n,2}) = (\mu_1^2 - \mu_3^2) h \cos \mu_1 h \rho_{n,2} \cos \mu_3 h \rho_{n,2} \cos \mu_5 h \rho_{n,2};$$

$I_\nu(x), K_\nu(x)$ - модифіковані функції Бесселя.

Розглянемо антисиметричне температурне поле відносно площини $x = 0$. Граничні умови задачі мають вигляд

$$T^{(a)}(z, \pm h) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} T_0, & 0 \leq z < a, \\ 0, & z > a; \end{cases}$$

$$\sigma_{zz}^{(a)}(z, \pm h) = 0, \quad z \geq 0;$$

$$\sigma_{zx}^{(a)}(z, \pm h) = 0, \quad z \geq 0. \quad (2.5)$$

Провівши викладки, аналогічні симетричному випадку, одержимо

$$T^{(a)}(z, z) = \frac{T_0}{2} \left\{ \frac{z}{h} \right\} + \left\{ \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\} \frac{T_0 a}{\mu_5 h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\mu_5 z \alpha_{n,1}) \left\{ \begin{matrix} I_0(z \alpha_{n,1}) K_1(a \alpha_{n,1}) \\ I_1(a \alpha_{n,1}) K_0(z \alpha_{n,1}) \end{matrix} \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z < a \\ z > a \end{cases}, |z| \leq h;$

$$\sigma_{zz}^{(a)}(z, z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_5) a}{B} \left\{ \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1,3,5} \sin(\mu_j z \alpha_{n,m}) \frac{\delta_j^{(a)}(\alpha_{n,m})}{\Phi_m(\mu_{n,m})} \left\{ \begin{matrix} I_0(z \alpha_{n,m}) K_1(a \alpha_{n,m}) \\ I_1(a \alpha_{n,m}) K_0(z \alpha_{n,m}) \end{matrix} \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z < a \\ z > a \end{cases}, |z| \leq h; \quad (2.6)$

$$\sigma_{zz}^{(a)}(z, z) = \frac{\beta T_0 f(\mu_s) a}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1,3,5} \mu_j \cos(\mu_j z \alpha_{n,m}) \frac{\delta_j^{(a)}(\alpha_{n,m})}{\Phi_m(\alpha_{n,m})} \left\{ I_1(z \alpha_{n,m}) K_1(a \alpha_{n,m}) \right\},$$

для $\begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad |z| \leq h.$

Тут використані позначення

$$\delta_j^{(a)}(\alpha) = \mu_\kappa \cos \mu_\kappa h \alpha \sin \mu_\ell h \alpha - \mu_\ell \cos \mu_\ell h \alpha \sin \mu_\kappa h \alpha,$$

причому $j=1, \ell=3, \kappa=5; j=3, \ell=5, \kappa=1; j=5, \ell=1, \kappa=3;$

$$\alpha_{n,1} = \pi n \frac{1}{\mu_s h};$$

$\alpha_{n,2}$ - корені трансцендентного рівняння

$$\mu_3 \cos \mu_3 h \alpha_{n,2} \sin \mu_1 h \alpha_{n,2} - \mu_1 \cos \mu_1 h \alpha_{n,2} \sin \mu_3 h \alpha_{n,2} = 0;$$

$$\Phi_1(\alpha_{n,1}) = (-1)^n \mu_s h \delta_3^{(a)}(\alpha_{n,1}),$$

$$\Phi_2(\alpha_{n,2}) = (\mu_1^2 - \mu_3^2) h \sin \mu_1 h \alpha_{n,2} \sin \mu_3 h \alpha_{n,2} \sin \mu_s h \alpha_{n,2}.$$

Знаючи температурне поле і температурні напруження в симетричному і антисиметричному випадках, легко знайти температурне поле і температурні напруження нашої задачі:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(s)} + \sigma_{zz}^{(a)}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(s)} + \sigma_{zz}^{(a)}, \quad T = T^{(s)} + T^{(a)}.$$

Шляхом аналогічних міркувань легко отримати інші компоненти напруженого стану, а також переміщення, які ми тут не наводимо за браком місця.

На рис. 2-4 наводяться графіки температури і температурних напружен. в шарі.

Аналогічно можна розглянути осесиметричну задачу для випадку, коли задана температура на граничних площинах є довільною функцією координати z .

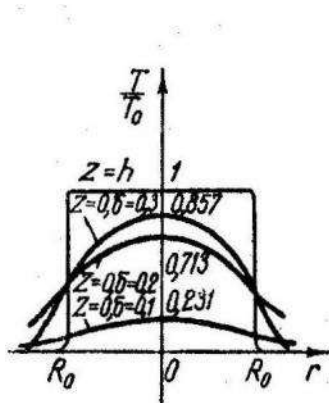


Рис. 2.

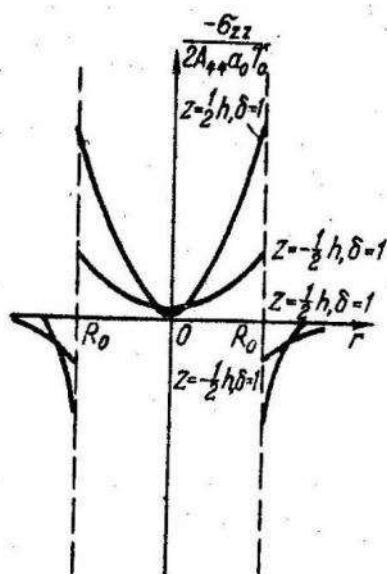


Рис. 3.

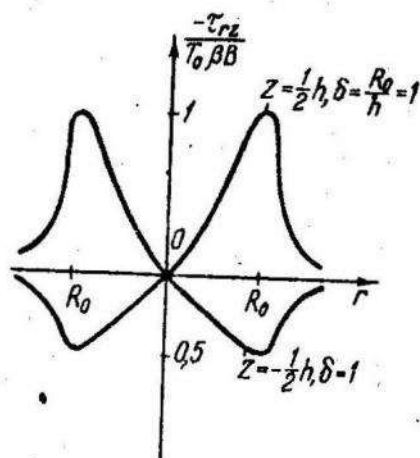


Рис. 4.

3. Тепер розглянемо осесиметричну задачу термопружності для трансверсально-ізотропного шару при змішаних умовах для температури на границі шару, а саме: на верхній границі шару в крузі радіуса $\gamma = a$ підтримується стала температура T_0 , зовнішність круга - теплоізолювана; нижня площина шару підтримується при нульовій температурі.

Як і в попередній задачі, визначимо температурне поле і температурні напруження в шарі при вільних від зовнішнього навантаження границях.

Для зручності товщину шару тепер приймемо рівною h , початок системи координат помістимо на верхній площині шару в центрі круга радіуса $\gamma = a$, а вісь z направимо вертикально вниз.

Граничні умови задачі набирають вигляду

$$\begin{aligned}
T(z, z) &= T_0, & z=0, & 0 \leq z \leq a, \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= 0, & z=0, & z > a, \\
T(z, z) &= 0, & z=h, & 0 \leq z \leq \infty, \\
\sigma_{zz}(z, z) &= 0, & z=0, z=h, & 0 \leq z \leq \infty, \\
\sigma_{zx}(z, z) &= 0, & z=0, z=h, & 0 \leq z \leq \infty.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

При розв'язуванні цієї задачі знову-таки користуємося інтегральним перетворенням Ханкеля, а при обчисленні інтегралів – методом лишків з використанням властивостей функцій Бесселя [2], [1], [9].

Після ряду обчислень і перетворень одержуємо такі результати:

$$\begin{aligned}
T(z, z) &= \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{X_n(a, z)}{X_n(z, z)} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \frac{8T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{z}{a}j_k\right)}{j_k J_1(j_k)} \left[\frac{P^*(j_k) \operatorname{sh} \mu_5(h-z) \frac{j_k}{a} N_0(j_k)}{2j_k \operatorname{ch} \frac{\mu_5 h}{a} j_k} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ap_{n,1})^2 X_n(a, z)}{[j_k^2 + (ap_{n,1})^2]} \right], \quad \text{для } \begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad 0 \leq z \leq h, \\
\sigma_{zz}(z, z) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{Z_n(a, z)}{Z_n(z, z)} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{z}{a}j_k\right)}{j_k J_1(j_k)} \left[\frac{\pi P^*(j_k) \Delta_1\left(\frac{j_k}{a}\right) N_0(j_k)}{2 j_k \operatorname{ch} \frac{\mu_5 h}{a} j_k \Delta\left(\frac{j_k}{a}\right)} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \frac{(ap_{n,m})^2 Z_n(a, z)}{[j_k^2 + (ap_{n,m})^2]} \right], \quad \text{для } \begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad 0 \leq z \leq h, \tag{3.2} \\
\sigma_{zx}(z, z) &= \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \left\{ \frac{\frac{z}{a} R_n(a, z)}{R_n(z, z)} \right\} + \mu_1 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{z}{a}j_k\right)}{j_k J_1(j_k)} \left[\frac{\pi P^*(j_k) \Delta_1\left(\frac{j_k}{a}\right) j'_1(j_k)}{2 j_k \operatorname{ch} \frac{\mu_5 h}{a} j_k \Delta\left(\frac{j_k}{a}\right)} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^3 \frac{(ap_{n,m})^2 R_n(a, z)}{[j_k^2 + (ap_{n,m})^2]} \right], \quad \text{для } \begin{cases} 0 \leq z \leq a \\ z > a \end{cases}, \quad 0 \leq z \leq h.
\end{aligned}$$

Тут використані позначення:

$$X_n(z, z) = (-1)^n \frac{P(ap_{n,1}) \sin(h-z) \mu_5 p_{n,1} K_0(\mu_5 p_{n,1})}{a^2 p_{n,1}^3 \mu_5 h}$$

$$Z_n(z, z) = (-1)^n \frac{\rho(a p_{n,m}) Q(z) K_0(z p_{n,m})}{\Delta_m(p_{n,m})};$$

$$R_n(z, z) = (-1)^n \frac{\rho(a p_{n,m}) F(z) K_1(z p_{n,m})}{\Delta_m(p_{n,m})};$$

$$\rho(a\alpha) = H_2\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)(a\alpha)^2 \operatorname{sh} a\alpha - H_2\left(\frac{a}{\mu_s h}\right)(\operatorname{sh} a\alpha - a\alpha \operatorname{ch} a\alpha);$$

$$\Delta_1(\alpha) = a\alpha^3 \mu_s h \left[(\mu_1 - \mu_2)^2 \sin \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} h\alpha - (\mu_1 + \mu_2)^2 \sin^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} h\alpha \right];$$

$$\Delta_2(\alpha) = a^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) (\mu_1 - \mu_2) a^2 \alpha^5 \cos \mu_s h\alpha \sin \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} h\alpha;$$

$$\Delta_3(\alpha) = a^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2) (\mu_1 + \mu_2) a^2 \alpha^3 \cos \mu_s h\alpha \sin \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} h\alpha;$$

(3.3)

$$\rho(ix) = -i \rho^*(x), \quad \Delta_n(ix) = -i Q(x), \quad \Delta_n^*(ix) = -F(x);$$

$$\Delta(x) = -\frac{\Delta_1(ix)}{a^2 \mu_s h (ix)^3};$$

$$H_1\left(\frac{a}{\mu_s h}\right) = 1 + \frac{2S_1}{\pi} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right) + \frac{4S_1^2}{\pi^2} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^2 + \frac{24S_1^3 - 2\pi S_2}{3\pi^2} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^3 +$$

$$+ \frac{16S_1^4 - 2\pi^2 S_1 S_2}{\pi^4} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^4;$$

$$H_2\left(\frac{a}{\mu_s h}\right) = \frac{S_2}{\pi} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^3 + 2 \frac{S_1 S_2}{\pi} \left(\frac{a}{\mu_s h}\right)^4, \quad S_m = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^m};$$

$$\mathcal{L} = \frac{4\beta T_0 f(\mu_s)}{\mu_s \pi B};$$

$$j_k > 0 - \text{корені рівняння } \mathcal{J}_0(z) = 0;$$

$$j_k > 0 - \text{корені рівняння } \mathcal{J}_1(z) = 0.$$

Функції $Q(x)$ та $F(x)$ знаходимо із співвідношення

$$Q(x) = \bar{\Theta}_1 [\bar{\Theta}_2 \Gamma_2^{1,1}(x) + \bar{\Theta}_3 \Gamma_4^{1,1}(x)] - \frac{\Delta_1(p_{n,m})}{a^2 p_{n,m}^3 \mu_s h} \left\{ \Gamma_1^{(0)}(x) + \mu_1 \sin[\mu_s(h-x)p_{n,m}] \right\};$$

(3.4)

$$F(x) = \bar{\Theta}_1 [\bar{\Theta}_2 \Gamma_4^{3,3}(x) + \bar{\Theta}_3 \Gamma_2^{3,3}(x)] - \frac{\Delta_1(p_{n,m})}{a^2 p_{n,m}^3 \mu_s h} \left\{ \Gamma_3^{(0)}(x) + \mu_2 \cos[\mu_s(h-x)p_{n,m}] \right\};$$

де

$$\begin{aligned} & \bar{\theta}_1\{\Gamma_1^{(1)}(h), \Gamma_1^{(5)}(h)\}, \bar{\theta}_2\{\Gamma_2^{(3)}(h), \Gamma_2^{(4)}(h)\}, \bar{\theta}_3\{\Gamma_3^{(2)}(h), -\Gamma_3^{(4)}(h)\}; \\ & \Gamma_1^{(1)}(z) = \mu_5 \cos \mu_5 h \rho_{n,m} \sin \mu_1 z \rho_{n,m} - \mu_1 \sin \mu_5 h \rho_{n,m} \cos \mu_1 z \rho_{n,m} + \omega_1; \\ & \Gamma_2^{(3)}(z) = \omega_2 \sin \mu_3 z \rho_{n,m} - \omega_4 \sin \mu_1 z \rho_{n,m}; \\ & \Gamma_3^{(2)}(z) = \mu_5 \cos \mu_5 h \rho_{n,m} \cos \mu_1 z \rho_{n,m} + \mu_1 \sin \mu_5 h \rho_{n,m} \sin \mu_1 z \rho_{n,m} - \omega_1; \\ & \Gamma_4^{(4)}(z) = \omega_1 \cos \mu_3 z \rho_{n,m} - \omega_2 \cos \mu_1 z \rho_{n,m}; \\ & \omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \mu_1, \quad \omega_2 = \mu_3, \quad \omega_3 = \mu_5; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\rho_{n,1} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\mu_5 h}, \quad \rho_{n,2} = \frac{2\pi n}{\mu_1 - \mu_3}, \quad \rho_{n,3} = \frac{2\pi n}{\mu_1 + \mu_3}.$$

При обчисленні інтегралів була використана апроксимація

$$\begin{aligned} & (\mu_1 - \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} h \alpha - (\mu_1 + \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} h \alpha \approx \alpha \epsilon_1 (\mu_1 + \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} h \alpha, \\ & (\mu_1 - \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} h \alpha + (\mu_1 + \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 - \mu_3}{2} h \alpha \approx \alpha \epsilon_2 (\mu_1 - \mu_3) \operatorname{sh} \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} h \alpha, \end{aligned} \quad (3.6)$$

для магнію $\alpha \epsilon_1 = 0,2$, $\alpha \epsilon_2 = 1,99$.

Зауважимо, що наведені вище формули мають місце, коли

$$\frac{\mu_5 h}{a} > 0,4415.$$

За допомогою аналогічних міркувань можна знайти формули для інших компонент напруженого стану.

Л і т е р а т у р а

1. Г. Бейтмен, А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. М., "Наука", 1966.
2. Г. Н. Ватсон. Теория Бесселевых функций. Госиздат, М., 1949.
3. Г. Карслоу, Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М., "Наука", 1964.
4. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, М., 1958.
5. В. Новацкий. Вопросы термоупругости. АН СССР, М., 1962.
6. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1952.
7. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.
8. Я. С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. "Наука", Ленинград. отд., Л., 1967.
9. Е. Янке, Ф. Эдме, Ф. Леш. Специальные функции. М., 1968.
10. F. Dymek. Osłowo-symetryczne zadanie brzegowe przestrzennej teorii sprężystości i jego zastosowanie do zagadnień mechaniki górotwory. Archiwum Górnictwa, t. XIII, N 3, 1968.

—0—

УДК 539.311

Е.І.ЛУНЬ, А.О.СЯСЬКИЙ

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПІДКРІПЛЕННЯ ОТВОРУ В ПРУЖНІЙ ОБОЛОНЦІ

Питання еквівалентного підкріплення отворів в пластинах і оболонках на основі класичної теорії розглядались в працях [1,4,5,6,7,8]. В роботі [9] при дослідженні питання про усунення концентрації напружень біля отворів в пластинах використовувались рівняння уточненої тео-

рії [10], яка дає можливість задовольнити всі три граничні умови на контурі створів.

У цій роботі задача про еквівалентне підкріплення отвору в пружній оболонці розглядається на основі рівнянь теорії типу Тимошенка [11], яка в певній мірі враховує деформації поперечних зсувів і дає можливість задовольнити п'ять граничних умов на контурі отвору.

1. Ключову систему рівнянь для оболонок нульової гаусової кривини, пологих і деяких інших оболонок можна взяти у вигляді [2]

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta w + \Delta_{\kappa} (1 - \varepsilon \Delta) \varphi &= (1 - \varepsilon \Delta) q_n, \\ \Delta \Delta \varphi - 2 E h \Delta_{\kappa} w &= 0, \\ \Delta \Psi - \frac{2}{(1 - \nu) E} \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $w(\alpha, \beta)$ - нормальний прогин оболонки; $\varphi(\alpha, \beta)$ - функція напружень; $\Psi(\alpha, \beta)$ - функція, через яку виражаються кути повороту нормалі; $D = \frac{2 E h^3}{3(1 - \nu^2)}$; $\varepsilon = \frac{h^2}{3 \kappa (1 - \nu^2)} \frac{E}{G_n}$; $2h$ - товщина оболонки; E, ν - модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в середній та еквівалентних площинах; G_n - модуль зсуву в площинах, нормальних до середньої поверхні;

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right];$$

$$\Delta_{\kappa} = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right].$$

Компоненти пружно-деформованого стану оболонки виражаються через рівняння системи (1) за формулами, наведеними в [11].

Умови еквівалентності [6] записуються у вигляді

$$u(\alpha, \beta) = u_0(\alpha, \beta), \quad v(\alpha, \beta) = v_0(\alpha, \beta), \quad w(\alpha, \beta) = w_0(\alpha, \beta), \quad (2)$$

$$\delta_{\alpha}(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha}^0(\alpha, \beta), \quad \delta_{\beta}(\alpha, \beta) = \delta_{\beta}^0(\alpha, \beta),$$

де величини справа - компоненти переміщення і кути повороту нормалі в

оболонці без отвору, а величини зліва - компоненти переміщення і кути повороту в оболонці з підкріпленням отвором під тим же навантаженням.

Приймаючи, що кільце тонке, умови спаю між оболонкою і еквівалентним кільцем запишемо у вигляді

$$\rho_n(s) = T_n(s), \quad \rho_s(s) = S_{ns}(s), \quad \rho(s) = N_n(s), \quad (3)$$

$$m(s) = M_n(s), \quad h(s) = H_{ns}(s);$$

$$u_1 = u_n, \quad u_2 = u_s, \quad w_p = w, \quad \gamma_1 = \gamma_n, \quad \gamma_2 = \gamma_s. \quad (4)$$

Тут $\rho_n(s), \rho(s), \rho_s(s), m(s), h(s)$ - поперечні та поздовжня сили, згинальний та скручувальний моменти, які діють на кільце зі сторони оболонки; $u_1, u_2, w_p, \gamma_1, \gamma_2$ - компоненти переміщення, кут кручення та кут згину кільця; $T_n, S_{ns}, N_n, M_n, H_{ns}$ - нормальна, дотична та перерізуюча сили, згинальний та крутний моменти в оболонці на контурі отвору; $u_n, u_s, w, \gamma_n, \gamma_s$ - компоненти переміщення (по головній нормалі, дотичній та бінормалі до контура отвору), кути повороту нормалі навколо дотичної $\vec{S}$ та головної нормалі $\vec{n}$ до контура отвору; S - дуга на контурі отвору.

Праві частини умов (3) та (4) можна вважати відомими, якщо відомий розв'язок задачі для оболонки без отвору. Таким чином, задача про еквівалентне підкріплення отвору в оболонці звелась до визначення жорсткостей кільця при відомих деформаціях кільця (4) та навантаженні (3), що діє на нього.

Вважаємо, що в підкріплюючому кільці, як і в оболонці, зсуви можуть бути відмінними від нуля, і залежності між внутрішніми зусиллями в кільці і параметрами деформації приймаємо у вигляді

$$L_n = A(s) \delta \omega_n, \quad L_\theta = B(s) \delta \omega_\theta, \quad L_s = C(s) \delta \omega_s, \quad (5)$$

$$v_\theta = B^*(s) e_\theta, \quad v_s = E_s F(s) \varepsilon_s.$$

Тут L_n, L_θ, L_s - згинаючі та крутний моменти в кільці; v_θ, v_s - поперечна та поздовжня сили; $A(s), B(s), C(s)$ - шукані жорсткості кільця на згин та кручення; $B^*(s)$ - приведена жорсткість кільця на зсув; $\delta\omega_n, \delta\omega_\theta, \delta\omega_s$ - прирости кривин та кручення кільця, e_θ - зсув в спрямляючій площині кільця; ϵ_o - відносний розтяг осі кільця; E_t - модуль Юнга для матеріалу кільця; $F(s)$ - площа поперечного перерізу кільця.

Величини $L_n, L_\theta, L_s, v_\theta$ і v_s визначаються при інтегруванні рівнянь статки для частини кільця, що знаходиться під дією заданого навантаження.

Враховуючи співвідношення Клебша [3] та прийняті допущення, зможемо записати такі співвідношення для підкріплюючого плоского кільця:

$$\begin{aligned}\delta\omega_n &= \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial s} + q \tilde{r}_1, & \delta\omega_\theta &= \frac{\partial \tilde{r}_\theta}{\partial s}, \\ \delta\omega_s &= \frac{\partial \tilde{r}_s}{\partial s} - q \tilde{r}_s, & e_\theta &= \frac{\partial w_\theta}{\partial s} + \tilde{r}_s,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\epsilon_o = -\frac{\partial u_s}{\partial s} - q u_s,$$

де $\tilde{r}_\theta$ - кут згину кільця в площині $(\vec{n}, \vec{s})$;

$q(s)$ - кривина осі кільця в площині $(\vec{n}, \vec{s})$.

Враховуючи умови спаян (4) та співвідношення (6), одержуємо із (5) такі формули для шуканих жорсткостей кільця:

$$\begin{aligned}A(s) &= \frac{L_n}{\frac{\partial \tilde{r}_s}{\partial s} + q \tilde{r}_n}, & B(s) &= \frac{L_\theta}{\frac{\partial \tilde{r}_\theta}{\partial s}}, \\ C(s) &= \frac{L_s}{\frac{\partial \tilde{r}_n}{\partial s} - q \tilde{r}_s}, & B^*(s) &= \frac{v_\theta}{\frac{\partial w}{\partial s} + \tilde{r}_s}, \\ E_t F(s) &= -\frac{v_s}{\frac{\partial u_s}{\partial s} + q u_n}.\end{aligned}\quad (7)$$

В кожному конкретному випадку розв'язки (7) повинні бути досліджені, оскільки жорсткості повинні приймати лише невід'ємні та скінченні значення.

Якщо допустити, що зсув e_z відсутній, і врахувати, що тоді

$$\gamma_s = \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \gamma_n = -\frac{\partial w}{\partial n}, \quad (8)$$

то формули (7) набувають вигляду

$$A(s) = -\frac{L_n}{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + q \frac{\partial w}{\partial n}}, \quad B(s) = \frac{L_s}{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}}, \quad (9)$$

$$C(s) = -\frac{L_s}{\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial n} - q w \right)}, \quad E, F(s) = -\frac{v_s}{\frac{\partial u_s}{\partial s} + q u_n}.$$

Це є розв'язок задачі в рамках класичної теорії.

2. Для прикладу розглядається задача про підбір еквівалентного кільця, що підкріплює круговий отвір в циліндричній оболонці, яка перебуває під дією рівномірного внутрішнього тиску.

Основний напружений стан в суцільній оболонці задається зусиллями

$$\begin{aligned} T_r &= h(p+q) + h(p-q) \cos 2\lambda; \\ T_\lambda &= h(p+q) - h(p-q) \cos 2\lambda; \\ S_{r\lambda} &= -h(p-q) \sin 2\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Середня поверхня оболонки віднесена до полярної напівгеодезичної системи координат (ρ, λ) , з початком в центрі отвору.

В даному випадку формули (7) набувають вигляду

$$A(\rho, \lambda) = \frac{L_r}{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial \lambda} + r_r \right)}, \quad C(\rho, \lambda) = \frac{L_\lambda}{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \lambda} - r_\lambda \right)}, \quad (11)$$

$$B(\rho, \lambda) = \frac{L_\rho}{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u_\lambda - \frac{\partial u_\rho}{\partial \lambda})}, \quad B^*(\rho, \lambda) = \frac{L_\rho}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + r_\lambda},$$

$$E, F(\rho, \lambda) = -\frac{v_\lambda}{\frac{1}{\rho} (u_\rho + \frac{\partial u_\rho}{\partial \lambda})}.$$

Щоб знайти величини L_ρ , L_λ , L_ϵ , U_λ , U_ϵ , потрібно розв'язати систему диференціальних рівнянь згину кільця [3], що перебуває під навантаженням (10). Розв'язавши цю систему, одержимо, що

$$U_\lambda = \rho h [(\rho + q) - (\rho - q) \cos 2\lambda], \quad L_\epsilon = \frac{1}{2} \rho^2 h (\rho - q) \cos 2\lambda, \quad (12)$$

$$L_\rho = L_\lambda = U_\epsilon = 0.$$

Згідно з розв'язком задачі про напружено-деформований стан в циліндричній оболонці при дії внутрішнього тиску з використанням системи (I) маємо

$$\delta_\rho = \delta_\lambda = 0, \quad w = w_0 = \text{const},$$

$$\frac{1}{\rho} (u_\rho + \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}) = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)(\rho+q)h - (1+\nu)(\rho-q)h \cos 2\lambda], \quad (13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda} (u_\lambda - \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}) = \frac{1}{2Eh} [2(1+\nu)(\rho-q)h \cos 2\lambda].$$

Підставляючи (12) і (13) в (II), одержуємо

$$E, F(\rho, \lambda) = 2E\rho h \frac{(\rho+q) - (\rho+q)\cos 2\lambda}{(1-\nu)(\rho+q) - (1+\nu)(\rho-q)\cos 2\lambda}, \quad (14)$$

$$B(\rho, \lambda) = \frac{E\rho^3 h}{2(1+\nu)};$$

$A(\rho, \lambda)$, $C(\rho, \lambda)$, $B^*(\rho, \lambda)$ - довільні.

Враховуючи, що

$$F(\rho, \lambda) = 2E_1 h_1, \quad C(\rho, \lambda) = \frac{2}{3} E_1 b^3 h_1, \quad \rho = 0,5q, \quad (15)$$

одержимо аналітичні вирази для геометричних характеристик кільця товщини $h_1(\lambda)$ і ширини $b(\lambda)$.

$$\frac{b(\lambda)}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1+\nu}} \sqrt{\frac{3(1-\nu) + (1+\nu)\cos 2\lambda}{3 + \cos 2\lambda}},$$

$$\frac{h_1(\lambda)}{h} = \frac{2\sqrt{1+\nu}}{\sqrt{3}} \frac{E}{E_1} \sqrt{\left(\frac{3 + \cos 2\lambda}{3(1-\nu) + (1+\nu)\cos 2\lambda} \right)^3}. \quad (16)$$

В таблиці наведені величини вказаних характеристик кільця в залежності від величини кута λ при $\nu = 0,3$; $\frac{E}{E_1} = 0,5$.

λ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{\delta(\lambda)}{\rho}$	0,701	0,692	0,669	0,638	0,578	0,524	0,479
$\frac{2h_1(\lambda)}{h}$	1,69	1,74	1,89	2,26	2,99	4,02	4,90

Л і т е р а т у р а

1. А. Н. К в а ш а. Вопросы снижения концентрации напряжений в ослабленных пластинах и оболочках. Автореферат канд. диссертации. Институт механики АН УССР, К., 1960.
2. Е. И. Л у н ь. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, Вісник ЛДУ, серія мех.-мат., вип. 3, 1967.
3. А. И. Л у р ь е. О малых деформациях криволинейных стержней, Труды Ленинградского политехнического института № 3, 1941.
4. В. І. М о с с а к о в с ь к и й, А. Н. К в а ш а. Конструкція та розрахунок дуків, які не викликають концентрації напружень в сферичних оболонках, "Прикладна механіка", т. 5, вип. 4, 1959.
5. Г. Н. С а в и н, Н. П. Ф л е й ш м а н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. "Наукова думка", К., 1964.
6. Н. П. Ф л е й ш м а н. Об эквивалентном подкреплении отверстий в пластинах. Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 4, ч. II, 1953.
7. Н. П. Ф л е й ш м а н. Про підкріплення краю криволінійних отворів тонких плит. ДАН УРСР, № 4, 1954.
8. Н. П. Ф л е й ш м а н. Некоторые обратные задачи для плит с отверстиями, края которых подкреплены тонкими ребрами. Изв. вузов, "Машиностроение", № 7, 1961.
9. Н. П. Ф л е й ш м а н, Б. Л. П е л е х. К вопросу о полном устранении концентрации напряжений около отверстий в плитах. Сборник концентрации напряжений, вып. I, К., 1965.
10. М. П. М е р е м е т ь е в, Б. Л. П е л е х. К построению уточненной теории пластин. Инженерный журнал, № 3, 1964.
11. М. П. М е р е м е т ь е в, Е. И. Л у н ь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1962.

—о—

Х.В.СТАРОВОЙТЕНКО

ПЛАСТИНКА З ПІДКРІПЛЕНОЮ КРУГОВОЮ ГРАНИЦЕЮ
ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І МОМЕНТІВ ¹⁾

Розглядається узагальнений плоский напружений стан ізотропної пластинки сталої товщини, круговий край якої підкріплено тонким пружним ребром з постійними жорсткостями на розтяг та згин. Розв'язок задачі дається для круглого диска радіуса R . Аналогічно, без суттєвих змін, розв'язується і задача про дію зосереджених сил і моментів на безмежну пластинку з підкріпленням круговим отвором.

Нехай в точках $x_j = R\zeta_j$ та $x_k = R\zeta_k$ диска прикладено відповідно зосереджені сили $P_j^*(X_j^*, Y_j^*)$ і моменти M_k^* ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$). На ребро діє довільне навантаження. Аналогічно роботі [4], в якій розглядається менш загальний випадок навантаження, та використовуючи відоме зображення комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ (див. [3], формули (3), (5), стор. 198) і граничні умови (1), (2) роботи [4], зводимо задачу до системи диференціальних рівнянь на комплексній площині:

$$\begin{aligned} & \delta_2 \zeta^2 \varphi_{20}''(\zeta) + (\delta_1 + \delta_2) \zeta \varphi_{20}'(\zeta) + (1 - \delta_1 - \delta_2) \varphi_{20}(\zeta) - \delta_2 \alpha \zeta \varphi_{10}''(\zeta) + \\ & + \alpha (\delta_1 + \delta_2) \varphi_{10}'(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \varphi_{10}(\zeta) = f_{11}(\zeta); \\ & \delta_1 \zeta^2 \varphi_{20}''(\zeta) + \zeta \varphi_{20}'(\zeta) - \varphi_{20}(\zeta) + \delta_1 \alpha \zeta \varphi_{10}''(\zeta) + \varphi_{10}'(\zeta) = f_{21}(\zeta), \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Робота виконана під керівництвом проф. Н.П.Фейшмана.

$$\begin{aligned}
\text{де } f_{21}(\zeta) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f_2(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} + \sum_{j=1}^n \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\alpha)} \left[\bar{\zeta}_j + \frac{\alpha \bar{\zeta}_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\delta_1 \alpha \zeta \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\alpha)} \left[\alpha(1+\delta_1)\zeta + \alpha \zeta_j + \frac{\zeta_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j + \delta_1 \alpha}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \cdot \zeta + \right. \\
& \left. + \frac{2\delta_1(1 - \zeta_j \bar{\zeta}_j)}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^3} \cdot \zeta \right] + \sum_{k=1}^m \frac{iM_k}{2\pi} \left[\frac{2 - \zeta \bar{\zeta}_k}{1 - \zeta \bar{\zeta}_k} + \frac{\zeta \bar{\zeta}_k}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^2} - \frac{2\delta_1 \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^3} \right]; \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}(\zeta) = & b_0 \left[-2 + (\delta_1 + \delta_2)(1 - \alpha) \right] + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta} - \\
& - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \sum_{j=1}^n (X_j + iY_j) \left\{ (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{\zeta}_j - \frac{\alpha + 1}{\zeta} \ln \frac{\sigma_j - \zeta}{\sigma_j} + \frac{\alpha \ln(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)}{\zeta} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_j}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\delta_2 \alpha \zeta \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} \right\} - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \sum_{j=1}^n (X_j - iY_j) \left\{ \left[(\alpha + 1) \ln(\sigma_j - \zeta) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \ln(1 - \zeta \bar{\zeta}_j) + (\alpha + 1)C_2 + \alpha(\delta_1 + 2\delta_2) \right] \cdot \zeta + (\alpha + 1)\sigma_j + \alpha(\delta_1 + \delta_2 - 1)\zeta_j + \right. \\
& \left. + \frac{(1 - \delta_1 - \delta_2)(\zeta_j - \zeta)}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} - \frac{\alpha(\delta_1 + \delta_2)\zeta}{1 - \zeta \bar{\zeta}_j} + \left[(\delta_1 + \delta_2)(1 - \zeta \bar{\zeta}_j) - \alpha\delta_2 \right] \frac{\zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{2\delta_2(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)\zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_j)^3} \right\} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^m M_k \left[1 - \delta_1 - \delta_2 - \frac{1 - \delta_1 - \delta_2}{1 - \zeta \bar{\zeta}_k} + \frac{(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^2} - \frac{2\delta_2 \bar{\zeta}_k \zeta}{(1 - \zeta \bar{\zeta}_k)^3} \right]; \\
b_0 = & \frac{1}{2[2 + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2)]} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_1(\sigma) d\sigma}{\sigma} - \frac{1}{2\pi(1+\alpha)} \left[\sum_{j=1}^n (X_j + iY_j) \left[(1 - \alpha) \bar{\zeta}_j + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha + 1}{\zeta_j} + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2) \bar{\zeta}_j \right] + \sum_{j=1}^n (X_j - iY_j) \left[(\alpha + 1)\sigma_j + (1 - \alpha)\zeta_j + (\alpha - 1)(\delta_1 + \delta_2)\zeta_j \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Тут C_2 - довільна комплексна стала; σ_1 - довільна точка одиничного кола γ площини $\zeta = z/R$; $X_j = X_j^*/h$, $Y_j = Y_j^*/h$, $M_k = M_k^*/h$; інші позначення ті ж, що й в роботі [4].

Розв'язок системи (1), тобто функції $\varphi_0(\zeta)$ і $\varphi_{20}(\zeta)$, виражається в квадратурах за формулами (23) роботи [4], в яких праві частини $f_0(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ визначаються формулами (2).

У частковому випадку, коли до диска прикладено лише дві зосереджені сили: $(-P_1, 0)$ в центрі диска та $(P_1, 0)$ в точці $z_0 = R\zeta_0$ на дійсній осі, маємо:

$$\begin{aligned} f_0(\zeta) = & -\frac{\rho}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \left(\frac{\kappa}{\zeta} - \zeta \right) \ln(1 - \zeta\zeta_0) + [1 - 2\delta_1 + \kappa(\delta_1 + 2\delta_2)] \zeta + \right. \\ & + \frac{(\zeta_0 - \zeta)[(\delta_1 + \delta_2)(\kappa - 1) + 1]}{1 - \zeta\zeta_0} + \frac{(\delta_1 + \delta_2)(1 - \zeta_0^2)\zeta - \kappa\delta_2(1 + \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^2} - \frac{2\delta_2(1 - \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^3} \Big\}; \\ f_2(\zeta) = & \frac{\rho}{2\pi(1+\kappa)} \left[(2\delta_1 - \delta_1\kappa - 1)\zeta - (\kappa - 1)\zeta_0 + \frac{(\kappa - 1)\zeta_0}{1 - \zeta\zeta_0} + \right. \\ & + \frac{1 - \zeta_0^2 + \delta_1\kappa - \kappa\delta_1\zeta_0^2}{(1 - \zeta\zeta_0)^2} \zeta - \frac{2\delta_1(1 - \zeta_0^2)\zeta}{(1 - \zeta\zeta_0)^3} \Big]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$b_0 = \frac{\rho(\kappa - 1)(1 - \delta_1 - \delta_2)\zeta_0}{2\pi(1+\kappa)[2 + (\kappa - 1)(\delta_1 + \delta_2)]}, \quad \rho = P_1/h.$$

При $\zeta_0 = 1$ матимемо

$$\begin{aligned} z_3(\zeta) = & \frac{\rho}{4\pi\kappa\delta_1\delta_2(1+\kappa)} \left[A_1 + B_1\zeta + \frac{\delta_1\kappa}{\zeta} \ln(1 - \zeta) - \delta_1\zeta \ln(1 - \zeta) - \right. \\ & - \frac{2\delta_1\delta_2\kappa\zeta}{(1 - \zeta)^2} + \frac{(\kappa - 1)\delta_2}{1 - \zeta} \Big]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} z_4(\zeta) = & -\frac{\rho}{4\pi\delta_1\delta_2(1+\kappa)} \left[A_2 + B_2\zeta + \frac{\delta_1\kappa}{\zeta} \ln(1 - \zeta) - \delta_1\zeta \ln(1 - \zeta) - \right. \\ & - \frac{2\delta_1\delta_2\kappa\zeta}{(1 - \zeta)^2} - \frac{(\kappa - 1)\delta_2}{1 - \zeta} \Big], \end{aligned}$$

$$\text{де } A_1 = \delta_1 + \delta_2(1-\alpha) + \delta_1(\alpha-1)(\delta_1 + \delta_2);$$

$$B_1 = \delta_1(1-2\delta_1 + \alpha\delta_1 + \alpha\delta_2) + \delta_2(2\delta_1-1);$$

$$A_2 = \delta_1 - \delta_2(1-\alpha) + \delta_1(\alpha-1)(\delta_1 + \delta_2);$$

$$B_2 = \delta_1(1-2\delta_1 + \alpha\delta_1 + 3\alpha\delta_2) - \delta_2(2\delta_1-1).$$

Для визначення функцій $\varphi_{10}(\zeta)$ і $\varphi_{20}(\zeta)$ ще потрібно обчислити інтеграли типу

$$\zeta^{\rho_j+1} \int_0^{\zeta} \frac{z_k(t) dt}{t^{\rho_j+1}}, \quad \zeta^{\rho_j+1} \int_0^{\zeta} \frac{z_k(t) dt}{t^{\rho_j+1}}. \quad (5)$$

Якщо підставити функції (4) в формули (5), одержимо вирази типу

$$J_{\kappa}^j = \zeta^{\Delta} \int_0^{\zeta} \frac{t^{-\Delta} dt}{1-t}, \quad (6)$$

які не обчислюються в кінцевій формі. Тут Δ приймає значення ρ_j+1 або ρ_j-1 .

Для обчислення інтегралів (6) можна скористатися розкладом [2]

$$J_{\kappa}^j = J_{\kappa 1}^j + i J_{\kappa 2}^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n-\Delta}, \quad (7)$$

де

$$J_{\kappa 1}^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n (n-\Delta_{j\kappa})}{(n-\Delta_{j\kappa})^2 + \ell_j^2}; \quad J_{\kappa 2}^j = \ell_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(n-\Delta_{j\kappa})^2 + \ell_j^2}; \quad (8)$$

$$\rho_j = \kappa_j + i\ell_j; \quad \Delta_{j\kappa} = \kappa_j + \kappa - 1; \quad (\kappa=0,2); \quad J_m \zeta = 0.$$

Нижче наводяться кінцеві формули для нормальних напружень в точках дійсної осі Ox при $\alpha = 2$. (Дотичні напруження X_y в цих точках дорівнюють нулеві).

$$\frac{X_x + Y_y}{\rho} = \frac{2}{3\pi} \left\{ \frac{1}{x(1-x)} + \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M'_{j1}(x) - b_{yj} M'_{j2}(x) \right] \right\}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_y - X_x}{\rho} = & \frac{1}{3\pi} \left\{ -\frac{3}{x(1-x)} + (x - \frac{1}{x}) \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M''_{j1}(x) - b_{yj} M''_{j2}(x) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{2}{x^3} \sum_{j=1}^4 \left[a_{yj} M_{j1}(x) - b_{yj} M_{j2}(x) \right] + \frac{1}{x^2} \sum_{j=1}^4 \left[(a_{2j} + a_{yj}) M'_{j1}(x) - (b_{2j} + b_{yj}) M'_{j2}(x) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Тыт

$$\begin{aligned} M_{j1}(x) = & \frac{1}{2\delta_1\delta_2} \left\{ \left[A_1 \left(\frac{D_{y1}^i}{2} d'_1 - \frac{D_{y1}^z}{2} d'_3 \right) + A_2 (D_{y1}^z d'_1 - D_{y1}^i d'_3) \right] x + \right. \\ & + \left[B_1 \left(\frac{D_{y1}^i}{2} d'_2 + \frac{D_{y1}^z}{2} d'_4 \right) - B_2 (D_{y1}^z d'_1 + D_{y1}^i d'_2) \right] x^2 - \\ & - \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) R_j(x) + \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) N_j(x) + T_j J'_{21} + L_j J'_{22} \left. \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_{j2}(x) = & \frac{1}{2\delta_1\delta_2} \left\{ \left[A_1 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} d'_1 + \frac{D_{y1}^i}{2} d'_3 \right) - A_2 (D_{y1}^z d'_1 + D_{y1}^i d'_3) \right] x + \right. \\ & + \left[B_1 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} d'_2 - \frac{D_{y1}^i}{2} d'_4 \right) + B_2 (D_{y1}^i d'_1 - D_{y1}^z d'_2) \right] x^2 - \\ & - \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) N_j(x) - \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) R_j(x) + T_j J'_{22} - L_j J'_{21} \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$d'_1 = \frac{\ell_j}{\kappa_j^2 + \ell_j^2}, \quad d'_2 = \frac{\ell_j}{(1-\kappa_j)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_3 = \frac{\kappa_j}{\kappa_j^2 + \ell_j^2},$$

$$d'_4 = \frac{1-\kappa_j}{(1-\kappa_j)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_5 = \frac{\ell_j}{(\kappa_j+1)^2 + \ell_j^2}, \quad d'_6 = \frac{\kappa_j+1}{(\kappa_j+1)^2 + \ell_j^2};$$

$$\begin{aligned} T_j = & \left(\frac{D_{y1}^z}{2} + D_{y1}^z \right) \delta_2 - 2 \left(\frac{D_{y1}^z}{2} - D_{y1}^z \right) (\delta_1 d'_6 + 2\delta_1\delta_2\kappa_j) + \\ & + 2\delta_1 \left(D_{y1}^i - \frac{D_{y1}^i}{2} \right) (2\delta_2\ell_j - d'_5); \end{aligned}$$

$$L_j = \left(D_{ij}^i + \frac{D_{ij}^i}{2}\right) \delta_2 + 2\delta_1 \left(D_{ij}^i - \frac{D_{ij}^i}{2}\right) \left(d_6^j + 2\delta_2 \kappa_j\right) + \\ + 2\delta_1 \left(\frac{D_{ij}^z}{2} - D_{ij}^z\right) \left(2\delta_2 \ell_j - d_5^j\right);$$

$$N_j(x) = \delta_1 \left\{ \left(x^2 d_2^j - 2d_5^j\right) \ln(1-x) + x^2 \left[d_2^j J_{01}^j + d_4^j J_{02}^j\right] \right\};$$

$$R_j(x) = \delta_1 \left\{ \left(2d_6^j + x^2 d_4^j\right) \ln(1-x) + \frac{4\delta_2 x}{1-x} + x^2 \left[d_4^j J_{01}^j - d_2^j J_{02}^j\right] \right\};$$

$$c_{ij} = a_{ij} + i b_{ij}, \quad D_{sj} = D_{sj}^z + i D_{sj}^i = \frac{D_{sj}^*}{D^*}, \quad (s=3,4).$$

Для обчислення напружень в точках $x > 0,5$, і зокрема при $x = 1$, необхідно виділити особливості у виразах (8).

$$J_{\kappa 2}^j = \ell_j \cdot B_{ij}^{\kappa}, \quad J_{\kappa 1}^j = \alpha_{j\kappa} \cdot B_{ij}^{\kappa} - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2) B_{2j}^{\kappa} - \ln(1-x);$$

$$B_{ij}^{\kappa} = (1 + 2\alpha_{j\kappa}) [A_{2j}^{\kappa} + D(x)] - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2) A_{ij}^{\kappa} + 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x),$$

$$B_{2j}^{\kappa} = A_{3j}^{\kappa} + D(x); \quad D(x) = \frac{3}{4x} - \frac{1}{6} - \frac{(1-x)^2}{2x^3} \ln(1-x) - \frac{1}{2x^2}; \quad (11)$$

$$A_{ij}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]},$$

$$A_{2j}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n [6 + n(5 + 2\alpha_{j\kappa}) - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2)]}{(n+1)(n+2)(n+3)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]},$$

$$A_{3j}^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \{6 + 2n^2(3 + \alpha_{j\kappa}) + n[11 - (\alpha_{j\kappa}^2 + \ell_j^2)]\}}{n(n+1)(n+2)(n+3)[(n-\alpha_{j\kappa})^2 + \ell_j^2]}.$$

Це дає можливість визначити напружений стан в точці $x = 1$ підкріпленого краю диска, де прикладена зосереджена сила. В цій точці воі напруження кінцеві при $\delta_1 \neq 0$ та $\delta_2 \neq 0$.

За допомогою ЕОМ "Мінськ-22" визначено напруження в точках дійсної осі для варіантів значень відносних жорсткостей ребра на розтяг (δ_1) та згин ($\delta_2 = \lambda \delta_1$), які наведені нижче.

Варі- ант	δ_1	λ	Варі- ант	δ_1	λ	Варі- ант	δ_1	λ
1	0,1	0,001	6	5	0,004	10	5	0,1
2	0,1	0,004	7	10	0,001	11	5	0,01
3	1	0,001	8	10	0,004	12	10	0,1
4	1	0,004	9	1	0,1	13	10	0,01
5	5	0,001						

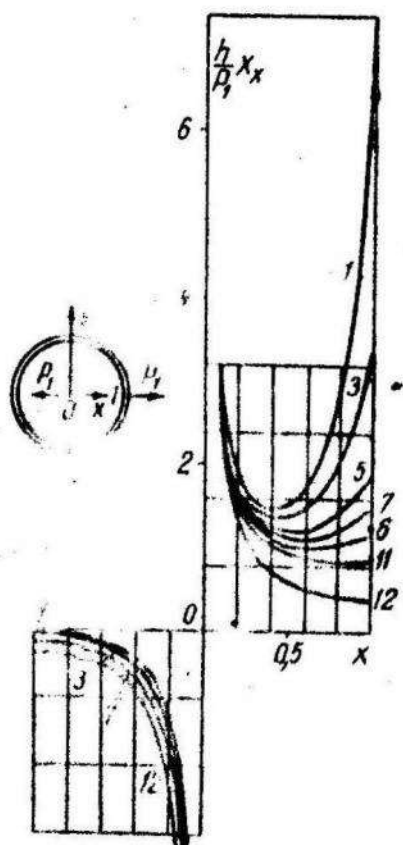


Рис. 1.

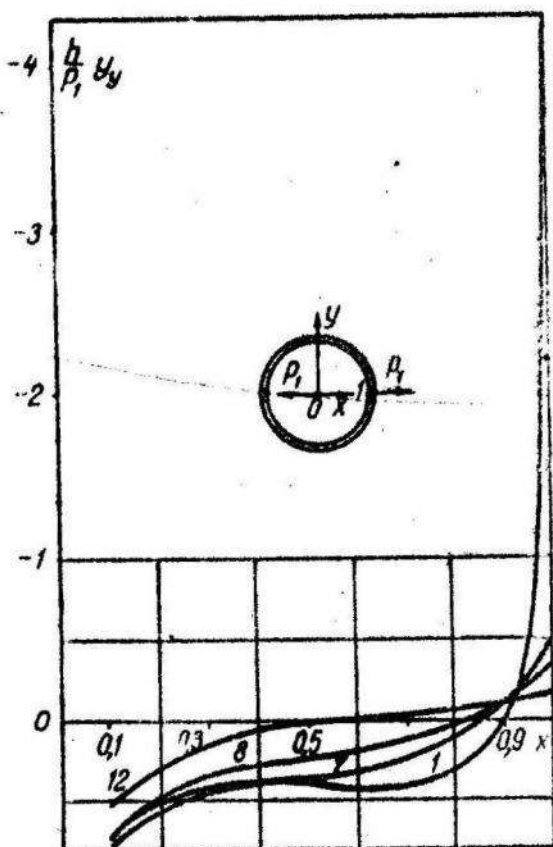


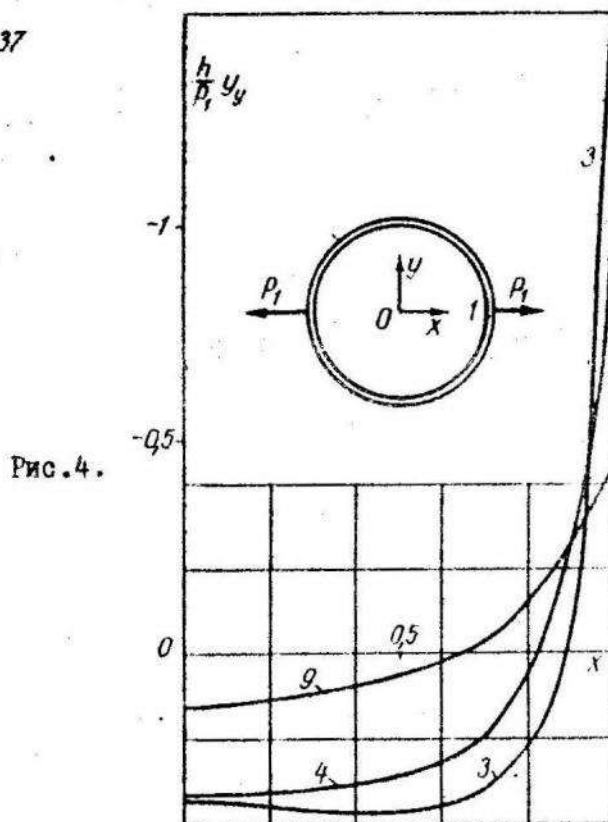
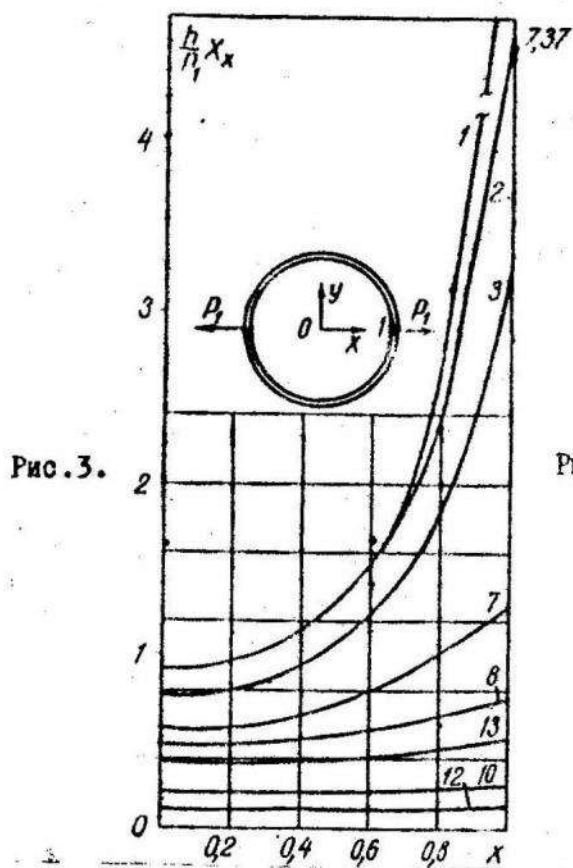
Рис. 2.

На рис. 1 і 2 побудовано графіки розподілу нормальних напружень вздовж дійсної осі диска в залежності від значень жорсткостей підкріплюючого ребра. (Номери кривих на рисунках відповідають варіантам). Порівняння цих результатів з прикладом статті [5], з якому не враховувалась жорсткість підкріплюючого ребра на згин, показує, що вплив величин δ_2 значний, тобто у розглядуваному випадку зосередженого навантаження на ребро не можна нехтувати його жорсткістю на згин.

Для невідкріпленого диска ($\delta_1 = \delta_2 = 0$) задача розв'язана в роботі [3]. У випадку $\zeta_0 = 1$ в роботі [1] розв'язана задача для диска, край якого підкріплений широким пружним кільцем.

Методом накладання одержано розв'язок задачі про дію двох зосереджених сил, прикладених по краях диска з підкріпленим краєм. Результати обчислення напружень для такого диска зображені на рис. 3, 4.

Графіки на рис. 1-4 неочинно ілюструють вплив відповідних жорсткостей ребра на розподіл напружень в диску.



Л і т е р а т у р а

1. Д. В. В а й н б е р г. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1952.
2. Д'а н д е р с, К. Ф у к у и, Т. Ф у к у и. Действие сосредоточенной силы вблизи гладкого кругового включения. Прикладная механика. Труды Американского общества инженеров-механиков, том 33, серия E, № 4, 1966.
3. Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
4. Н. П. Ф л е й ш м а н, Н. В. С т а р о в о й т е н к о. Пружна рівновага пластинки з підкріпленою круговою границею. Вісник Львів. ун-ту, сер. фіз., хім. і мех.-мат., 1968.
5. Н. П. Ф л е й ш м а н, Н. В. С т а р о в о й т е н к о. Обобщенная граничная задача для пластинки с подкрепленным краем. Прикладная механика, т. 3, вып. 12, 1967.

—0—

удк 683.3

І.О.МІЩЕНКО, Т.Л.МАРТИНОВИЧ

ЗГИН КУСОЧНО-ОДНОРІДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО КІЛЬЦЯ

Розглянемо тонку ізотропну плиту, середина площина якої займає область S , обмежену двома співфокусними еліпсами L_1 та L_2 . Ця область співфокусним еліпсом L_0 розділяється на дві підобласті S_1, S_2 , що відповідають двом різним матеріалам. Надалі всі величини, які відносяться до області S_1 , будемо відмічати індексом "1", а величини, що відносяться до S_2 - індексом "2". На зовнішньому контурі L_1 діють рівномірно розподілені згинальні моменти інтенсивності M , а внутрішній контур плити L_2 або вільний від дії зовнішніх зусиль, або жорстко закріплений.

Зробимо конформне відображення області S' на концентричне кільце з радіусами $\rho_2 = 1$, $\rho_1 > 1$ (еліпсу L_0 відповідає коло радіуса ρ_0) за допомогою функції

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad (1)$$

де

$$R = \frac{a_2 + b_2}{2}; \quad m = \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2}; \quad \rho_2 = 1;$$

$$\rho_1 = \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}; \quad \rho_0 = \frac{a_2 + b_2}{a_2 + b_2};$$

a_j, b_j - півосі співфокусних еліпсів L_j .

Головний вектор і головний момент зовнішніх зусиль на кожному з контурів дорівнюють нулю, а тому функції напружень голоморфні у відповідних підобластях, і інтегральні співвідношення для визначення функцій $\Phi_k(\zeta)$, $\Psi_k(\zeta)$ в перетвореній області, згідно з [1], мають вигляд

$$\sum_{k=1}^2 D_k (1 - \nu_k) \left\{ n_k \int_{\Gamma_k} \overline{F(\sigma)} \Phi_k(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \alpha_k \int_{\Gamma_0} \overline{F(\sigma)} \Phi_k(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma - \right. \quad (2)$$

$$\left. - \int_{\Gamma_k + \Gamma_0} \overline{\Phi_k(\sigma)} \omega(\sigma) d\overline{F(\sigma)} \right\} = (M + iN_1) \int_{\Gamma_1} \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\sum_{k=1}^2 \left[n_k \int_{\Gamma_k} \overline{F(\sigma)} \Phi_k(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \int_{\Gamma_0} \overline{F(\sigma)} \Phi_k(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma - \right. \quad (3)$$

$$\left. - \int_{\Gamma_k + \Gamma_0} \overline{\Phi_k(\sigma)} \omega(\sigma) d\overline{F(\sigma)} \right] = \frac{M + iN_1}{D_1(1 - \nu_1)} \int_{\Gamma_1} \overline{F(\sigma)} \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\int_{\Gamma_\kappa + \Gamma_0} F(\sigma) \overline{\Psi_\kappa(\sigma)} \overline{\omega'(\sigma)} d\sigma = - (n_\kappa - \alpha_\kappa) \int_{\Gamma_\kappa} F(\sigma) \Phi_\kappa(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma +$$

$$+ \int_{\Gamma_\kappa + \Gamma_0} \overline{\Phi_\kappa(\sigma)} \omega(\sigma) dF(\sigma) + \delta_{\kappa N} \frac{M + iN_1}{D_1(1 - \nu_1)} \int_{\Gamma_1} F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \quad (4)$$

$$+ \frac{(-N)^{\kappa-1}}{N-1} \int_{\Gamma_0^-} F(\sigma) \left[(1 - \alpha_1) \Phi_1(\sigma) - (1 - \alpha_2) \Phi_2(\sigma) \right] \omega'(\sigma) d\sigma;$$

$$\delta_{\kappa N} = \begin{cases} 1 & (\kappa = N) \\ 0 & (\kappa \neq N) \end{cases}.$$

Тут Γ_j - коло з радіусом ρ_j ; σ - афікс точки контура перетвореної області; N_1 - дійсна постійна, яку треба ще визначити;

$N = D_1(1 - \nu_1) / D_2(1 - \nu_2)$, Значення $n_j = \alpha_j = -(3 + \nu_j) / (1 - \nu_j)$ відповідає вільному внутрішньому контуру, а при жорсткому закріпленні контура треба взяти $n_2 = 1$.

Функції $\Phi_j(\varsigma)$, $\Psi_j(\varsigma)$, $F(\varsigma)$, голоморфні в кругових кільцях, розкладаються в ряди Лорана

$$\Phi_1(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \varsigma^n; \quad \Phi_2(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \varsigma^n; \quad (5)$$

$$\Psi_1(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \varsigma^n; \quad \Psi_2(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \varsigma^n; \quad F(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \varsigma^n.$$

Коефіцієнти A_n , B_n , C_n , H_n , завдяки геометричній та силової симетрії задачі відносно обох осей координат, будуть всі дійсними, причому не рівними нулю лише з парними індексами.

Підставивши (5), (1) в співвідношення (2)-(4) і виконавши інтегрування вздовж відповідних контурів, вважаючи при цьому всі E_n , крім E_{2K+1} , рівними нулю, одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу функцій $\Phi_j(\zeta)$, $\Psi_j(\zeta)$:

$$D_1(1-\nu_1) \left[\alpha_1 (\rho_1^{4K+2} - \rho_0^{4K+2}) (A_{2K} - m A_{2K+2}) + (2K+1) \times \right. \quad (6)$$

$$\times (\rho_1^2 - \rho_0^2) (A_{-2K} - \frac{m}{\rho_0^2 \rho_1^2} A_{-2K-2}) \left. \right] + D_2(1-\nu_2) \left[(\alpha_2 \rho_0^{4K+2} - n_2) \times \right.$$

$$\times (B_{2K} - m B_{2K+2}) + (2K+1) (\rho_0^2 - 1) (B_{-2K} - \frac{m}{\rho_0^2} B_{-2K-2}) \left. \right] =$$

$$= (M + i N_1) (\rho_1^2 \delta_{K0} - \frac{m}{\rho_1^2} \delta_{-1K});$$

$$(\alpha_1 \rho_1^{4K+2} - \rho_0^{4K+2}) (A_{2K} - m A_{2K+2}) + (2K+1) (\rho_1^2 - \rho_0^2) \times$$

$$\times (A_{-2K} - \frac{m}{\rho_0^2 \rho_1^2} A_{-2K-2}) + (\rho_0^{4K+2} - n_2) (B_{2K} - m B_{2K+2}) + \quad (7)$$

$$+ (2K+1) (\rho_0^2 - 1) (B_{-2K} - \frac{m}{\rho_0^2} B_{-2K-2}) = \frac{M + i N_1}{D_1(1-\nu_1)} (\rho_1^2 \delta_{K0} - \frac{m}{\rho_1^2} \delta_{-1K});$$

$$(\rho_0^{4K+4} - \rho_1^{4K+4}) (C_{2K} - m C_{2K+2}) = (2K+1) [(\rho_1^{4K} - \rho_0^{4K}) m A_{2K} +$$

$$+ (\rho_1^{4K+4} - \rho_0^{4K+4}) A_{2K+2}] - \frac{1}{N-1} [(1-\alpha_1) (A_{-2K-2} - m A_{-2K}) - \quad (8)$$

$$- (1-\alpha_2) (B_{-2K-2} - m B_{-2K})] + \frac{M + i N_1}{D_1(1-\nu_1)} (\delta_{-1K} - m \delta_{0K});$$

$$\begin{aligned}
(1 - \rho_0^{4K+4})(H_{2K} - mH_{2K+2}) &= (2K+1)[(\rho_0^{4K} - 1)mB_{2K} + \\
&+ (\rho_0^{4K+4} - 1)B_{2K+2}] + (n_2 - \alpha_2)(B_{-2K-2} - mB_{-2K}) - \\
&- \frac{N}{N-1}[(1 - \alpha_1)(A_{-2K-2} - mA_{-2K}) - (1 - \alpha_2)(B_{-2K-2} - mB_{-2K})] \\
&(\quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).
\end{aligned} \tag{9}$$

Системи (6), (7) служать для визначення коефіцієнтів A_n і B_n . Коефіцієнти розкладу функції $\Psi_j(\zeta)$ знаходяться з системи рекурентних залежностей (8) і (9).

З умови однозначності прогину

$$\int_{\delta_1} \omega(\zeta) \Psi_1(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta = \int_m (C_{-2} - m^2 C_2) = 0. \tag{10}$$

випливає, що стала N_1 повинна дорівнювати нулеві.

Приклад. Плита складається із зовнішнього мідного кільця S_1 і внутрішнього сталюого кільця S_2 з пружними сталими

$$E_1 = 1,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad \nu_1 = 0,32; \quad E_2 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad \nu_2 = 0,26.$$

Внутрішній край сталюого кільця L_2 вільний від дії зовнішніх зусиль, тому $n_2 = -(3 + \nu_2)/(1 - \nu_2)$.

Обчислення проводиться для таких геометричних характеристик плити:

$$a_2 = 3b_2, \quad b_0 = \sqrt{3}b_2, \quad b_1 = 3b_2.$$

В цьому випадку, згідно з (1), $m = 0,5$; $\rho_2 = 1$; $\rho_0 = 1,262$; $\rho_1 = 1,781$.

Бралось по 11 коефіцієнтів A_n і B_n ($\max |n|=10$) і розв'язувалась укорочена система з 22 рівнянь на ЕОМ "Минск-22".

В таблиці наведені числові значення згинальних моментів M_θ в окремих точках зовнішнього і внутрішнього країв плити, а також значення моментів M_θ і M_φ на лінії спав L_o .

θ°	На спав L_o			На L_1	На L_2
	M_φ	$M_\theta^{(1)}$	$M_\theta^{(2)}$	$M_\theta^{(1)}$	$M_\theta^{(2)}$
0	0,607	3,036	5,582	2,184	8,206
10	0,677	2,832	5,170	2,127	7,155
20	0,818	2,364	4,226	1,973	5,155
30	0,916	1,900	3,307	1,769	3,844
40	0,917	1,594	2,721	1,565	3,269
50	0,857	1,416	2,403	1,390	2,828
60	0,787	1,298	2,201	1,253	2,549
70	0,722	1,226	2,087	1,153	2,501
80	0,668	1,205	2,066	1,090	2,422
90	0,645	1,206	2,075	1,068	2,340

Л і т е р а т у р а

1. Т. Л. М а р т и н о в и ч, И. А. Н и щ е н к о. Об изгибе тонких изотропных плит и плит с подкрепленным краем. Материалы VII Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. "Наука", М., 1969.

2. Г. Н. С а в и н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

3. М. П. Ш е р е м е т ь е в. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.

—0—

УДК 517.512

Об одном соотношении двух классов обобщенных почти периодических функций. К о в а н ь к о А. С. Вісник Львівського ордена Леніна державного університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 3. (укр.).

В статье доказывается совпадение двух классов обобщенных почти периодических функций, рассмотренных автором в его другой статье: "Взаимоотношение различных обобщений почти периодических функций". (Изв. НИИММ, Томск, т. 3, вып. 1, 1946 г.). Это классы: $\tilde{W}(S_p, \rho, c)$ и $\tilde{W}(W_p, \rho, c)$ (см. стр. 12 указанной статьи).

УДК 517.535.4

О неподвижных точках целых функций. Г о л ь д б е р г А. А., Ш е р е м е т а М. М. Про нерухомі точки цілих функцій. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 5 (укр.).

Указаны примеры целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$, которые имеют не более конечного числа отталкивающих и индифферентных точек. Это дополняет результаты Уайттингтона [1]. Библ. 2.

УДК 517.53

Уточнение формулы обращения для характеристической функции случайного вектора. К в і т І. Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 9 (укр.).

На основании понятий интервального, L -мерного и точечного ограничителей дается новое доказательство формулы обращения для характеристической функции случайного вектора в произвольных точках L -мерной функции распределения, теорема единственности и теорема о величине скачка в точке одномерной функции распределения. Библ. 2.

УДК 517.9:536.2

Задача Дирихле для плоскости со щелями. К о р д у б а Б. М., М а р т и н о в и ч Т. Л. Задача Діріхле для площини з щілинами. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 18 (укр.).

В плоскости с прямолинейными щелями, размещенными параллельно одной из координатных осей, рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа. Решение ищется методом прямых.

Приводится численный пример. Илл. 3. Табл. 1. Библ. 11.

УДК 517.534.4

О лакунарных степенных рядах аналитических в круге функций. Ш е р е м е т а М. М. Про лакунарні степеневі ряди аналітичних в крузі функцій. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 28 (укр.).

Теоремы Сонса о связи между порядком и нижним порядком аналитической в круге функции, представленной лакунарным степенным рядом, переносятся на случай обобщенных порядков и нижних порядков. Библ. 5.

УДК 517.53

Построение мажорант и диаграмм Ньютона рядов Дирихле. К о с т о в с ь к и й О. М., Ц е г е л и к Г. Г. Побудова мажорант та діаграм Ньютона рядів Діріхле. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 36 (укр.).

Рассматриваются ряды Дирихле функций одной комплексной переменной. Для этих рядов строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона. С помощью мажорант и диаграмм Ньютона рядов Дирихле устанавливаются достаточные условия существования полос, не содержащих нулей этих рядов. Библ. 2.

УДК 535.7

Влияние оптических иллюзий на точность черчения. Б у й м о л а Г.Л.,
Т л у с т я к І. М. Вплив оптичних ілюзій на точність креслення. Вісник
Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 40 (укр.).

Рассматриваются те оптические иллюзии, под влиянием которых могут
возникнуть ошибки в геометрических построениях. Обращается внимание на
необходимость учитывать влияние этих иллюзий при изготовлении чертежей,
где требуется большая точность. Илл. 2. Библ. 3.

УДК 511

Дуальность у эллиптических кривых над квазилокальным полем. В в е -
д е н с ь к и й О. М. Дуальність у еліптичних кривих над квазілокаль-
ним полем. Вісник Львівського університету, сер., мех.-мат., вип. 6,
1971, стор. 46 (укр.).

Строится теория двойственности для эллиптических кривых над квази-
локальным полем, аналогичная теории двойственности Тэйта в локальном слу-
чае. Библ. 11.

УДК 517.512

Построение одного класса почти периодических функций. М и ш к о - в е ц ь У. А. Побудова одного класу майже періодичних функцій. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 50 (укр.).

Дается построение пространства почти периодических функций, которое является гильбертовым. Библ. 4.

УДК 513.015.6

Некоторые теоремы о поверхностях Σ и Δ -поверхностях. Д е н и с к 'о С. В. Деякі теореми про поверхні Σ та Δ -поверхні. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 58 (укр.).

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы линейчатая поверхность конгруэнции была поверхностью Σ .

Рассматривается изотропная конгруэнция, изгибающаяся в изотропную конгруэнцию и содержащая в себе поверхности Σ .

Изучаются поверхности Δ векторного поля в трехмерном евклидовом пространстве. Библ. 5.

УДК 515.69

Об некоторых обобщениях построений аксонометрических проекций. К о п и с т я н с ь к и й А. О. Про деякі узагальнення побудов аксонометричних проєкцій. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 63 (укр.).

Дается описание построения аксонометрических проекций в полном соответствии с теоремой Польке-Шварца, т.е. с непосредственной связью прообраза и изображения.

Предполагаемое построение обладает рядом преимуществ: 1) дает возможность использовать на практике всевозможные аксонометрические системы без ограничений; 2) дает увеличение точности за счет непосредственной

связи построений и за счет графического преобразования коэффициентов искажения; 3) дает возможность практически использовать центральные аксиометрические проекции; 4) объединяет два метода построений в один. Илл. 5.

УДК 517.944:947

Некоторые краевые задачи для эллиптических систем. М а р т и н е н к о М. Д. Деякі крайові задачі для еліптичних систем. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 68 (укр.).

Рассматривается задача об определении решения эллиптической системы уравнений с частными производными второго порядка вариационного типа от положительно определенного функционала в трехмерном пространстве с разрезом вдоль незамкнутой поверхности типа Ляпунова по заданным на двух сторонах этой поверхности граничным условиям типа Дирихле или Неймана. Методом интегральных уравнений доказано при определенных предположениях относительно коэффициентов существование единственного решения этих задач. Библ. 3.

УДК 517.512.

Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. П р и т у л а Я. Г. Про Абсолютну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 72 (укр.).

Для равномерных почти периодических (п.-п.) функций, спектр которых имеет единственную точку сгущения $\lambda^* = 0$, и B^p п.-п. ($1 < p \leq 2$) функций с единственной точкой сгущения спектра $\lambda^* = \infty$, ряд Фурье которых записан в виде

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x},$$

$\lambda_j > 0$ при $j > 0$, $\lambda_{-j} = -\lambda_j$; $|A_j| + |A_{-j}| > 0$; $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — монотонная последовательность.

Доказаны достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^p |1/n|^q;$$

$$1/p + 1/q = 1, \quad 0 < p < q, \quad \delta > 0.$$

Условия даны, в случае если $\lambda^* = 0$, в терминах величины

$$\bar{\omega}_p(\delta, f) = \delta \left[M \left(\left| \int_0^\infty e^{-\delta t} f(x-t) dt \right|^p \right) \right]^{1/p}, \quad \delta > 0,$$

а в случае если $\lambda^* = \infty$, в терминах интегрального модуля непрерывности $\omega_p(\delta, f)$. Библ. 5.

УДК 517.946

О задаче Дирихле в бесконечных областях. І в а н ч о в М. І. Про задачу Діріхле в необмежених областях. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 80 (укр.).

Установлены условия разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка в бесконечных областях в случае, когда коэффициент при неизвестной функции в уравнении стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ с некоторой заданной скоростью. Библ. 2.

УДК 539.337

Вдавливание горячего кольцевого штампа в трансверсально-изотропное полупространство. Г р и л и ц ь к и й Д. В., Ш е л е с т о в с ь к и й Б. Г. Тиск гарячого кільцевого штампа в трансверсально-ізоотропний півпростір. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 83 (укр.).

Рассматривается задача о вдавливании горячего кольцевого штампа с плоским основанием в трансверсально-изотропное полупространство при смешанных граничных условиях для температуры.

Для двух случаев найдены формулы для нормальных контактных напряжений под штампом и соотношения между сжимающей штамп силой, температурой и смещением штампа. Илл. 2. Библ. 7.

УДК 539

Круговое эксцентрическое кольцо с подкрепленным внутренним краем. Мартинovich Т. Л., Вушко В. П. Кругове ексцентричне кільце з підсиленням внутрішнім краєм. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 94 (укр.).

Решена плоская задача о напряженном состоянии в изотропном круговом эксцентрическом кольце с подкрепленным внутренним краем. Подкрепляющее кольцо рассчитывается по теории тонких криволинейных стержней. Сопряжение пластинки с кольцом осуществляется по фактической поверхности их контакта. Метод решения задачи основан на представлении граничных условий в форме контурных интегралов, содержащих произвольную функцию, голоморфную в рассматриваемой области. Получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций. Приводится числовой пример. Табл. 1. Библ. 7.

УДК 517.3

Некоторые случаи осесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного слоя. Грилицький Д. В., Габрусев В. Г., Піддубняк О. П. Деякі випадки осесимметричної задачі термопружності для трансверсально-ізотропного шару. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 103 (укр.).

Рассматриваются некоторые случаи осесимметричной задачи термоупругости для неограниченного и плоскопараллельного трансверсально-изотропного слоя конечной толщины при однородных и смешанных граничных условиях для температуры и при отсутствии внешних граничных напряжений.

Определены температурное поле и температурные напряжения. Илл. 4. Библ. 10.

УДК 539.311

Об эквивалентном подкреплении отверстия в упругой оболочке. Дунь С. I., Яський А. О. Про еквівалентне підкріплення отвору в пруж-

ній оболонці. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 112 (укр.).

На основе уравнений уточненной теории оболочек типа Тимошенко, которые некоторым образом учитывают деформации поперечных сдвигов и дают возможность удовлетворить пяти граничным условиям на контуре отверстия, решается задача об эквивалентном подкреплении отверстия в упругой оболочке. Приводятся формулы для жесткостей подкрепляющего кольца.

Рассматривается пример об эквивалентном подкреплении кругового отверстия в цилиндрической оболочке, находящейся под действием равномерного внутреннего давления. Определены геометрические характеристики подкрепляющего кольца. Табл. 1. Библ. 11.

УДК 539.3

Пластика с подкрепленной круговой границей под действием сосредоточенных сил и моментов. С т а р о в о й т е н к о Ж. В. Пластика з підкріпленою круговою границею під дією зосереджених сил і моментів. Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат., вип. 6, 1971, стор. 119 (укр.).

Решена задача плоской теории упругости о напряженном состоянии диска с подкрепленной круговой границей под действием сосредоточенных сил и моментов, приложенных к внутренним точкам диска, и произвольной нагрузки на подкрепляющее ребро.

Для двух случаев действия сосредоточенных сил на диск с подкрепленным краем построены графики распределения напряжений в диске в зависимости от значений жесткостей подкрепляющего ребра.

Выявлено значительное влияние на распределение напряжений в диске как жесткости на растяжение, так и жесткости на изгиб. Илл. 4. Табл. 1. Библ. 5.

З М І С Т

Математика

Стор.

О. С. К о в а н ь к о. Про одне співвідношення двох класів узагальнених майже періодичних функцій	3
А. А. Г о л ь д б е р г, М. М. Ш е р е м е т а. Про нерухомі точки цілих функцій.	5
І. Д. К в і т. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора.....	9
Б. М. К о р д у б а, Т. Л. М а р т и н о в и ч. Задача Діріхле для площини з щільностями.....	18
М. М. Ш е р е м е т а. Про лакунарні степеневі ряди аналітичних в крузі функцій.....	28
О. М. К о с т о в о с ь к и й, Г. Г. Ц е г е л и к. Побудова мажорант та діаграм Ньютона рядів Діріхле.....	36
Г. Л. Б у й м о л а, І. М. Т л у с т я к. Вплив оптичних ілюзій на точність креслення.....	40
О. М. В в е д е н с ь к и й. Дуальність у еліптичних кривих над квазілокальним полем	46

У. А. М и ш к о в е ц ь. Побудова одного класу майже періодичних функцій.	50
С. В. Д е н и с к о. Деякі теореми про поверхні Σ та Δ - поверхні.	58
А. О. К о п и с т я н с ь к и й. Про деякі узагальнення побудов аксонометричних проєкцій.....	63
М. Д. М а р т и н е н к о. Деякі крайові задачі для еліптичних систем.....	68
Я. І. П р и т у л а. Про абсолютну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій.....	72
М. І. І в а н ч о в. Про задачу Діріхле в необмежених областях.....	80

Механіка

Д. В. Г р и л і ц ь к и й, Б. Г. Ш е л е с т о в с ь к и й. Тиск гарячого кільцевого штампа на трансверсально-ізотропний півпростір.....	83
Т. Л. М а р т и н о в и ч, В. П. В у ш к о. Кругове ексцентричне кільце з підсиленням внутрішнім краєм.....	94
Д. В. Г р и л і ц ь к и й, В. Г. Г а б р у с е в, О. П. П і д д у б н я к. Деякі випадки осесиметричної задачі термопружності для трансверсально-ізотропного шару.....	103
Е. І. Л у н ь, А. О. С я с ь к и й. Про еквівалентне підкріплення отвору в пружній оболонці.....	112
Ж. В. С т а р о в о й т е н к о. Пластинка з підкріпленою круговою границею під дією зосереджених сил і моментів.....	119
І. О. Н і щ е н к о, Т. Л. М а р т и н о в и ч. Згин кусочно-однорідного еліптичного кільця.....	127

Министерство высшего и среднего специального образования СССР
ВЕСТНИК ЛЬВОВСКОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА им. Ив. ФРАНКО

СЕРИЯ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

выпуск 8

/На украинском языке/

Объем 9 печ. л., 7,4 уч.-изд. л. Тираж 800. Цена 74 коп. Зак. 2789
Издательство Львовского университета. Львов, Университетская, 1.
Областная книжная типография, Львов, Стефаника, 11.

Редактор З. Є. Г н и л Коректор С. Я. М и х а й л е н к о
БГ 08349. Підписано до друку 17.V-1971 р. Формат 80х90 ¹/16.
Паперов. арк. 4,5. Друк. арк. 9. Обл.-вид. арк. 7,2. Тираж 800. Ціна 74 коп.
Зам. 2789

Видавництво Львівського університету. Львів, Університетська, 1.
Обласна книжкова друкарня. Львів, Стефаника, 11.

74 коп.