ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.13–22

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.13–22

УДК 517.947

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДЕЯКИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Любов БАБ'ЯК, Омелян ГОРБАЧУК
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. Стрийська, 3, м.Дрогобич, Львівська обл., Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено необхідні та достатні умови розв'язності однієї оберненої задачі для еволюційного рівняння в банаховому просторі.

Ключові слова: еволюційні рівняння в банаховому просторі, обернені задачі.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathcal{B}$ для диференціального рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [0, \infty) \tag{1}$$

таку задачу:

$$y(0) = y_0, \quad y(t_k) = y_k, \quad k \in \overline{1,n}, \qquad (C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty, \tag{2}$$

де A – лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у просторі $\mathcal{B}$, $f(t)$ – функція, задана на проміжку $[0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$, $t_k, k \in \overline{1,n}$ – задані різні точки проміжку $(0,\infty)$, $y_k, k \in \overline{0,n}$, – відомі елементи з області визначення $D(A)$ оператора A, y_∞ – заданий елемент банахового простору $\mathcal{B}$, $(C,1) \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ – границя за Чезаро на нескінченності.

Нагадаємо, що границю за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності визначають так (див. [1], с. 519):

$$(C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) \stackrel{def}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t y(\xi)d\xi.$$

Класичним розв'язком рівняння (1) називається сильно неперервно диференційовна при $t \in [0,\infty)$ функція $y(t)$ у банаховому просторі $\mathcal{B}$ така, що $y(t) \in D(A)$ для $t \in [0,\infty)$ і $y(t)$ задовольняє при всіх $t \in [0,\infty)$ рівняння (1), де $f(t)$ – задана сильно неперервна функція у просторі $\mathcal{B}$ при $t \in [0,\infty)$ (див. [2]).

Крім того, дамо означення слабкого розв'язку рівняння (1). Розглядаємо клас функцій $\varphi(t)$, що неперервно диференційовні на $[0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$ і $\varphi(0) = 0, \varphi(\infty) = 0, \varphi(t) \in D(A^*)$ для всіх $t \in [0,\infty)$, де A^* – спряжений оператор до A, $A^*(\varphi(t))$ – неперервна функція у просторі $\mathcal{B}$ при $t \in [0,\infty)$. Неперервна функція $y(t), t \in [0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$ називається слабким розв'язком рівняння (1), якщо виконується умова (див. [2])

$$\int_0^\infty y(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^\infty y(t)A^*(\varphi(t))dt - \int_0^\infty f(t)\varphi(t)dt.$$

Варто зауважити, що класичний розв'язок завжди є слабким.

Нехай у рівнянні (1) функція $f(t)$ є кусково неперервною, тобто неперервною скрізь при $t \in [0,\infty)$, за винятком скінченної кількості точок, і має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} a_0, 0 \leqslant t < t_1; \\ a_k, t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k \in \overline{1, n-1}, \\ a_n, t_n \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

де $a_k \in \mathcal{B}, k \in \overline{0,n}, t_k, k \in \overline{1,n}$, – задані точки з інтервалу $(0,\infty)$.

Задача (1),(2) за умови (3) полягає у тому, що потрібно знайти функцію $y(t)$ і невідомі параметри $a_k \in \mathcal{B}, k \in \overline{0,n}$ такі, щоб функція $y(t)$ задовольняла рівняння (1) з правою частиною (3), а у заданих різних точках 0 і $t_k, k \in \overline{1,n}$ інтервалу $(0,\infty)$ набувала відповідно відомих значень $y_k \in D(A), k \in \overline{0,n}$ і мала границю за Чезаро першого порядку на нескінченності, що дорівнює заданому елементові $y_\infty \in \mathcal{B}$.

Задачі, аналогічні до (1),(2), вивчав Ю. С. Ейдельман [3-5]. У працях розглядали у банаховому просторі E двоточкову задачу

$$\frac{dv}{dt} = Av + f(t) + p, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{4}$$

$$v(0) = v_0, \quad v(t_1) = v_1, \tag{5}$$

де A – лінійний необмежений оператор, $f(t)$ – неперервна на відрізку $[0, t_1]$ функція зі значеннями в просторі E, p – невідомий параметр з E. Задача полягала у відшуканні пари $(v(t), p)$, що задовольняє диференціальне рівняння (4) і крайові умови (5).

Ю. С. Ейдельман при дослідженні двоточкової задачі (4), (5) отримав необхідні та достатні умови однозначної її розв'язності, а також з'ясував зв'язок між єдиністю розв'язку задачі (4), (5) та розміщенням точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A за умови, що A є генератором півгрупи $T(t)$ класу (C_0). За умови аналітичності півгрупи $T(t)$ виявили, що для однозначної розв'язності задачі (4), (5) при довільних допустимих даних v_0 і v_1, $f(t)$ суттєву роль відіграє умова: спектр оператора A не містить точок вигляду $\frac{2\pi i k}{t_1}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Неоднорідна частина рівняння (4) функція $f(t)$ для доведення одержаних результатів ролі не відіграє.

До задач цього типу зводяться обернені задачі про визначення невідомого доданка у правій частині диференціального рівняння у частинних похідних за заданою у скінченний момент часу додатковою умовою. Наприклад, у деяких задачах диференціальних рівнянь неоднорідною частиною $f(t)$ рівняння (4) є сила, яку потрібно знайти таку, щоб траєкторія руху (розв'язок) деякого тіла у задані моменти часу $t_k, k \in \overline{1,n}$, проходила через наперед відомі (задані) точки простору.

Дослідження різноманітних задач для диференціальних рівнянь мають безпосередній вихід на багато прикладних задач, зокрема тих, що стосуються процесів управління та оптимізації. За рахунок вибору конкретного оператора в еволюційному рівнянні та певних початкових крайових умов отримують рівняння, що описують різні еволюційні процеси.

У праці [6] розглядали задачу у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + p, \quad t \in [0.\infty), \tag{6}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in D(A), \quad (C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty, \, y_\infty \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

де A – твірний оператор (генератор) обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) у просторі $\mathcal{B}$, p – невідомий параметр, що не залежить від t, з простору $\mathcal{B}$. У ній було визначено необхідну і достатню умови існування й єдиності розв'язку $(y(t),p)$ задачі (6), (7), а саме: ця задача має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $y_\infty \in D(A)$ і $Py_0 = Py_\infty$, де P – проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$ (ядро оператора A) у розкладенні банахового простору $\mathcal{B}$ на пряму суму ядра $\operatorname{Ker} A$ та замикання образу $\overline{R(A)}$ оператора A. Крім того, виявлено, що $p = -Ay_\infty, y(t) = U(t)(y_0 - y_\infty) + y_\infty$, тобто визначено невідомий параметр p та розв'язок $y(t)$.

Відомо (див. [1], т.18.6.2) таке: якщо оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$, то простір $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus \overline{R(A)}$.

Нехай банаховий простір $\mathcal{B}$ є рефлексивним.

Теорема 1. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0). Слабкий розв'язок задачі (1),(2), де функція $f(t)$ має вигляд (3), існує тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*
(a) $A(y_{k+1} - y_k) \in R(U(t_{k+1} - t_k) - I)$, $k \in \overline{0, n-1}$;
(b) $y_\infty \in D(A)$;
(c) $Py_n = Py_\infty$, (8)
де $R(\cdot)$ – образ оператора $(\cdot)$, I – одиничний оператор, P – проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$.

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови (8). Розв'язок $y(t)$ задачі (1),(2), де функція $f(t)$ має вигляд (3), будуватимемо на проміжках $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \overline{0,n}\, (t_0 = 0, t_{n+1} = \infty)$, за відомою формулою (див. [7], с.158-159)

$$y(t) = U(t - t_k)y_k + \int_{t_k}^{t} U(t-s)a_k ds. \tag{9}$$

На проміжках $[t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0,n}$ цей розв'язок буде класичним.

Якщо $t \in [0, t_1)$, то

$$y(t) = U(t-0)y_0 + \int_0^t U(t-s)a_0 ds$$

$$y(0) = U(0)y_0 = y_0.$$

Знайдемо параметри $a_k, k \in \overline{0,n}$ рівняння (1) за умови (3) такі, щоб виконувались умови (2). Отримаємо

$$y(t_{k+1}) = U(t_{k+1} - t_k)y_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds = y_{k+1},\ k \in \overline{0, n-1},$$

а звідси

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds = y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k,\ k \in \overline{0, n-1}.$$

Застосуємо до обох частин оператор A

$$A\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds\right) = A\left(\int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} U(\eta)a_k d\eta\right) =$$
$$= A\left[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k\right], \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

З іншого боку, за теоремою 2.4 (див. [8], с. 4) маємо

$$A\left(\int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} U(\eta)a_k d\eta\right) = \int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} AU(\eta)a_k d\eta = \int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} (U(\eta))' a_k d\eta =$$
$$= (U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k, \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

Прирівнявши їх, одержимо

$$(U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k = A\left[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k\right] =$$
$$= A[y_{k+1} - (U(t_{k+1} - t_k) - I)y_k - y_k] =$$
$$= A(y_{k+1} - y_k) - A(U(t_{k+1} - t_k) - I)y_k,\ k \in \overline{0, n-1}. \tag{10}$$

Враховуючи те, що $y_k \in D(A), k \in \overline{0,n}$ і оператор A та півгрупа $U(t)$ комутують (див. [8], с.5), з (10) визначають параметри $a_k, k \in \overline{0, n-1}$, оскільки $A(y_{k+1} - y_k) \in R(U(t_{k+1} - t_k) - I), k \in \overline{0, n-1}$.

Параметр a_n знайдемо з того, що $(C,1) \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y_\infty$. Оскільки при $t \in [t_n, \infty)$ функція $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = U(t - t_n)y_n + \int\limits_{t_n}^{t} U(t - s)a_n ds = U(t - t_n)y_n + \int\limits_{0}^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta,$$

то границя за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності

$$(C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = (C,1) \lim_{t\to\infty} U(t - t_n)y_n + (C,1) \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta.$$

Оскільки $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty} U(t-t_n)y_n = Py_n$ і відомо (див. [6], с. 1264, лема 2), що $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta$ існує тоді і тільки тоді, коли $a_n = Az$, де $z \in D(A)$, то одержимо таке:

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = Py_n + (C,1)\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^{t-t_n} U(\eta)Azd\eta =$$
$$= Py_n + (C,1)\lim_{t\to\infty}[U(t-t_n)z - z] =$$
$$= Py_n + Pz - z = Py_n - (I-P)z = Py_n - Qz = y_\infty,$$

де $Q := I - P, Q$ – проектор на підпростір $\overline{R(A)}$ у розкладенні $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dot{+} \overline{R(A)}$.

Звідси маємо, що $z = -y_\infty + q$, де $q \in \operatorname{Ker} A$. Через те, що $y_\infty \in D(A)$, параметр $a_n = Az = -Ay_\infty$. Оскільки за умовою $Py_n = Py_\infty$, то

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = Py_n - Qz = Py_n + (I-P)y_\infty = Py_n - Py_\infty + y_\infty = y_\infty.$$

Отже, якщо виконуються умови (8), то визначають функцію $y(t)$ з (9) і невідомі параметри $a_k, k \in \overline{0,n-1}$, з (10), $a_n = -Ay_\infty$ такі, що $y(t)$ задовольняє рівняння (1) з неоднорідною частиною вигляду (3) і виконуються умови (2).

Функція $y(t)$ на проміжку $[0,\infty)$ буде неперервною, але в точках $t_k, k \in \overline{1,n}$ її похідна в класичному розумінні не існує. Враховуючи те, що функція $y(t)$ обмежена і неперервна скрізь на $[0,\infty)$, диференційовна всюди за винятком скінченної кількості точок (а саме $t_k, t \in \overline{1,n}$), простими обчисленнями можна переконатися, що функція $y(t)$ є слабким розв'язком на $[0,\infty)$ задачі (1), (2) з умовою (3).

Достатність доведено.

Необхідність твердження. Нехай існує функція $y(t)$ вигляду (9), яка є розв'язком рівняння (1) з неоднорідною частиною вигляду (3) і задовольняє умови (2). Тоді з (10) отримуємо, що $A(y_{k+1} - y_k)$ повинні належати $R(y(t_{k+1} - t_k) - I), k \in \overline{0,n-1}$. Оскільки $a_n = -Ay_\infty$, то y_∞ повинен належати $D(A)$. Границя за Чезаро першого порядку функції $y(t)$ на нескінченності дорівнює y_∞, тому що $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = Py_n - Py_\infty + y_\infty$, одержуємо необхідність виконання умови $Py_n = Py_\infty$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Ми знайшли розв'язок задачі (1), (2) з умовою (3), який є слабким. Його можна замінити розв'язком довільного степеня гладкості, а саме: якщо є слабкий розв'язок задачі, то знайдено неоднорідну частину $f(t)$ рівняння (1), за якою визначають розв'язок

$$y(t) = U(t)y(0) + \int\limits_0^t U(t-s)f(s)ds.$$

Можна знайти функції $f_n(t)$, обмежені і неперервні на $[0,\infty)$, довільного степеня гладкості на $[0,\infty)$, які рівномірно збігаються до функції $f(t)$ за винятком скінченної кількості інтервалів як завгодно малої довжини, які оточують точки $t_k, k \in \overline{1,n}$, у яких задана функція $f(t)$. Якщо візьмемо праву частину $f_n(t)$, то розв'язком рівняння (1) буде функція $U(t)y(0) + \int\limits_0^t U(t-s)f_n(s)ds$, яка рівномірно збігається за нормою до слабкого розв'язку $y(t)$.

Теорема 2. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) і нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. Цей розв'язок єдиний тоді і тільки тоді, коли*

$$1 \notin \sigma_p(U(t_{k+1} - t_k)),\ k \in \overline{0, n-1},$$

де $\sigma_p(\cdot)$ – точковий спектр оператора $(\cdot)$.

Доведення. Нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. У доведенні теореми 1 подано формули обчислення параметрів $a_k, k \in \overline{0, n}$

$$a_n = -Ay_\infty;$$

$$(U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k = A[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k],\ k \in \overline{0, n-1}.$$

Звідси легко бачити, що розв'язок задачі (1),(2) єдиний тоді і тільки тоді, коли 1 не належить точковому спектру операторів $U(t_{k+1} - t_k), k \in \overline{0, n-1}$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) і нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. Цей розв'язок є єдиним тоді і тільки тоді, коли серед власних значень оператора A немає точок вигляду*

$$\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_k - t_{k-1}},\ k \in \overline{1, n},\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0. \tag{11}$$

Доведення. Використавши теорему 2.4 (див. [8], с. 46), яка дає зв'язок точкового спектра $\sigma_p(U(t))$ півгрупи $U(t)$ і точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A, а саме:

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(U(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\},$$

застосовуючи теореми 1 і 2, обчисливши спектр, отримаємо умови теореми.

Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0). Якщо точки $\mu_k, k \in \overline{1, n}$ вигляду (11) належать резольвентній множині $\rho(A)$ оператора A, то слабкий розв'язок задачі (1),(2) за умови (3) існує і є єдиним.*

Доведення теореми 4 випливає з теореми 3 і формули (10) знаходження параметрів $a_k, k \in \overline{0, n-1}$, яку одержали у доведенні теореми 1.

Зауваження 2. Обмеженість півгрупи $U(t)$, яку генерує оператор A, є несуттєвою, оскільки у протилежному випадку можна перейти до півгрупи $e^{-\omega_0 t}U(t)$, де ω_0 – тип півгрупи $U(t)$.

У книзі А. В. Балакрішнана [9] показано застосування теорії півгруп операторів у банаховому просторі на прикладах диференціальних рівнянь, відомих з математичної фізики, а саме хвильового рівняння, рівняння теплопровідності, рівняння Шредінгера (див. [9], с. 235-245).

Розглянемо у банаховому просторі $L_2(R^n)$ для лінійного рівняння у частинних похідних n - го порядку

$$\frac{\partial u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\sum_{k=1}^{n} i_k = s} a_{i_1 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^s u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^{i_1} \dots \partial {x_n}^{i_n}} + f(t, x_1, \dots, x_n), \quad (12)$$

$$t \in [0, \infty), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n,$$

таку задачу:

$$\begin{gathered} u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u(t_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{1, n}, \\ (C, 1) \lim_{t \to \infty} u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{gathered} \quad (13)$$

де

$$A := \sum_{\sum_{k=1}^{n} i_k = s} a_{i_1 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^s}{\partial {x_1}^{i_1} \dots \partial {x_n}^{i_n}} \quad (14)$$

– лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у просторі $L_2(R^n)$, $f(t, x_1, \dots, x_n)$ – функція, задана на множині $[0, \infty) \times R \times R \times \dots \times R$, зі значеннями у просторі $L_2(R^n)$, $t_k, k \in \overline{1, n}$, – задані різні точки інтервалу $(0, \infty)$, $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{0, n}$, – відомі елементи з області визначення $D(A)$ оператора A, $\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – заданий елемент простору $L_2(R^n)$.

Зауваження 3. У ролі банахового простору $\mathcal{B}$ ми взяли простір $L_2(R^n)$. Треба зазначити, що можна розглядати довільний банаховий простір, де функції задають у деякій області Ω. Якщо ця область обмежена, то треба подати на межі граничні умови.

Нехай у рівнянні (12) неоднорідна частина $f(t)$ є кусково неперервною, тобто неперервною скрізь при $t \in [0, \infty)$, за винятком скінченної кількості точок, і має вигляд

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \leqslant t < t_1, \\ \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), & t_k \leqslant t < t_{k+1}, k \in \overline{1, n-1}, \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), & t_n \leqslant t < \infty, \end{cases} \quad (15)$$

де $\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_2(R^n), k \in \overline{0, n}, t_k, k \in \overline{1, n}$ – задані точки з інтервалу $(0, \infty)$.

Задача (12), (13) за умови (15) полягає у тому, що потрібно знайти функцію $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ і невідомі параметри $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_2(R^n), k \in \overline{0, n}$ такі, щоб функція $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ задовольняла рівняння (12) з правою частиною (15) і умови (13).

Відомий такий факт: для того щоб задача Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

$$x(0) = x_0 \in D(A),$$

де A – замкнений оператор, була рівномірно коректною, необхідно і достатньо, щоб A був твірним оператором (генератором) півгрупи класу (C_0) (див. [7], т.2.8, с. 64).

Зазначимо, що загалом задача Коші з оператором A вигляду (14) є рівномірно коректною, а оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0).

Теорема 5. *Нехай згадана задача Коші для оператора A вигляду (14) є рівномірно коректною і виконується умова*

(*a*) $\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_{k+1}-t_k} \in \rho(A), k \in \overline{0, n-1}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$ (16)

Слабкий розв'язок задачі (12), (13) за умови (15) існує і є єдиним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

(*b*) $\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(A)$;

(*c*) $P(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n))$, (17)

де $\rho(A)$ – резольвентна множина оператора.

Доведення. Нехай виконуються умови (16), (17). Розв'язок $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ задачі (12), (13) з неоднорідною частиною вигляду (15), будуватимемо на проміжках $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0, n}$ $(t_0 = 0, t_{n+1} = \infty)$ за формулою

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= U(t - t_k)\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t - s)\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)ds, \tag{18}$$

де $U(t)$ – півгрупа, яку генерує оператор A. На цих проміжках $[t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0, n}$ розв'язок (18) буде класичним.

Бачимо, що при $t \in [0, t_1)$

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t - 0)\varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t - s)\varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)ds$$

і $u(0, x_1, \dots, x_n) = \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Невідомі функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{0, n}$ рівняння (12) за умови (15) знаходимо такі, щоб виконувались умови (13). Отримаємо

$$u(t_{k+1}, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t_{k+1} - t_k)\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$

$$+ \int_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)ds = \varphi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

Міркуваннями, аналогічними до проведених у доведенні теореми 1, одержимо

$$(U(t_{k+1} - t_k) - I)\,\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\,(\varphi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) - \tag{19}$$
$$- \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)) - A\,(U(t_{k+1} - t_k) - I)\,\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k \in \overline{0, n-1},$$

де I – одиничний оператор.

Оскільки за умовою теореми точки $\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_{k+1}-t_k}, k \in \overline{0, n-1}$, $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, належать резольвентній множині $\rho(A)$ оператора A, то, використавши теорему 2.4 (див. [8], с.46), яка стверджує, що $e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(U(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}$ і дає зв'язок точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A і точкового спектра півгрупи $U(t)$, отримаємо, що тоді з (19) однозначно визначають шукані функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Невідому функцію $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знайдемо з того, що $(C, 1) \lim_{t\to\infty} u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ повинна дорівнювати $\Psi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Враховуючи те, що за умовою теореми $\Psi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(A)$ і $P(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n))$, провівши аналогічні міркування до поведених у доведенні теореми 1 і врахувавши результати праці [6], отримаємо, що

$$\Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = -A(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Отже, якщо виконуються умови (16),(17), то однозначно визначаються невідомі функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k \in \overline{0, n}$, існує слабкий розв'язок (18) задачі (12),(13) за умови (15).

Достатність доведена.

Необхідність твердження легко довести, провівши описані міркування у зворотному порядку.

Теорема доведена.

Знайдений розв'язок $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ вигляду (18) є слабким. Якщо ми маємо слабкий розв'язок задачі, то за знайденою неоднорідною частиною $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ рівняння (12) визначається розв'язок

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t)u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t-s)f(s, x_1, x_2, \dots, x_n)ds,$$

де $U(t)$ – півгрупа, яку генерує оператор A. Можна знайти функції $f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, обмежені і неперервні на $[0, \infty)$ (довільного степеня гладкості на $[0, \infty)$, які рівномірно за t збігаються до функції $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ за винятком скінченної кількості інтервалів як завгодно малої довжини, що оточують точки $t_k, k \in \overline{1, n}$. Якщо праву частину візьмемо $f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то розв'язком рівняння (12) буде функція $U(t)u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t-s)f_n(s, x_1, x_2, \dots, x_n)ds$, яка, як бачимо, рівномірно збігається за нормою до слабкого розв'язку $y(t)$.

---

1. *Хиллэ Э. Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М., 1962.
2. *Lions J. L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites. – Berlin, 1961.
3. *Ейдельман Ю. С.* Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – N 4.– С.16-19.
4, *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т.23. – N 9. – С.1647-1649.
5. *Ейдельман Ю. С.* Умови розв'язності обернених задач для еволюційних рівнянь// Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз-мат. та тех. науки. – 1990. – N 7. – С.27-31.
6. *Горбачук Е. Л.* Решение одной обратной задачи для эволюционного уравнения в банаховом пространстве// Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 9. – С.1262-1265.

7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М., 1967.

8. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New - York, 1983.

9. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М., 1980.

THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR AN EVOLUTIONARY EQUATION IN BANACH SPACE

Lyubov Babyak, Omelyan Horbachuk

Drogobych State Pedagogic University
3 Stryis'ka Str. Drogobych, Ukraine
Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

We establish necessary and sufficient conditions of solvability of some inverse problems for an evolutionary equation in a Banach space.

Key words: evolutionary equations in Banach space, inverse problems.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.2000
Прийнята до друку 20.06.2002