ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.32–49

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.32–49

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ РІЗНОКОМПОНЕНТНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Микола БОКАЛО, Василь ДМИТРІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено коректність (існування, єдиність та неперервну залежність від вихідних даних розв'язку) задачі без початкових умов для систем диференціальних рівнянь, які складаються з квазілінійних параболічних та звичайних рівнянь з інтегральними запізненнями. Крім того, визначено апріорну оцінку розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: задача Фур'є, різнокомпонентна система, інтегральне запізнення.

У природі існує багато процесів, які описують різнокомпонентними системами рівнянь, тобто системами, до складу яких входять підсистеми рівнянь різних типів, наприклад, підсистеми рівнянь параболічного типу та звичайних диференціальних рівнянь. Гранично-початкові задачі для таких систем розглянуто в працях [1-4]. Зокрема, в [1,2] розглянуто такі задачі для еволюційних систем рівнянь із запізненням. У цій праці досліджено коректність задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для різнокомпонентних еволюційних систем рівнянь з інтегральними запізненнями. Зауважимо, що така задача для різнокомпонентних систем рівнянь дифузії з функціоналами вивчена в працях [5,6].

Введемо позначення і поняття, які використовуватимемо. Нехай D – область в просторі $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, де α – число з проміжку $[0;1]$, позначатимемо простори дійснозначних функцій, які разом з відповідними похідними є неперервними на $\overline{D}$, якщо $\alpha = 0$, і неперервними за Гельдером на $\overline{D}$ з показником α, якщо $\alpha > 0$ (див. означення [8], с.16), а норми в цих просторах – відповідно через $\|\cdot\|^{D}_{\alpha,\alpha/2}, \|\cdot\|^{D}_{\alpha,1+\alpha/2}, \|\cdot\|^{D}_{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{D})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{D}$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(\overline{D})$, якщо D – необмежена область, розумітимемо простори функцій, які визначені на $\overline{D}$ і їхні звуження на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D належать відповідно $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, де $\alpha \in [0;1]$. Домовимось, що $C(\overline{D}) \overset{def}{=} C^{0,0}(\overline{D})$, $C_{\text{loc}}(\overline{D}) \overset{def}{=} C^{0,0}_{\text{loc}}(\overline{D})$. Коли ж Q – об'єднання області D з частиною своєї межі, то через $C^{\alpha,\alpha/2}_{\text{loc}}(Q)$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(Q)$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(Q)$ позначатимемо простори функцій, звуження яких на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D такої, що $\overline{D'} \subset Q$, належать відповідно $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, де $\alpha \in [0;1]$.

Говоритимемо, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ належить до класу $C^{2+\alpha}$, якщо її можна покрити локально скінченною кількістю поверхонь, кожна з яких задається рівнянням вигляду $x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ для деякого $i \in \{1, ..., n\}$, де $h \in C^{2+\alpha}(\overline{K}), K$ – область у просторі відповідних змінних.

Якщо W– деяка множина, то через $[W]^m$, де $m \in \mathbb{N}$, позначимо декартів степінь W (декартів добуток самого на себе m разів). Запис $w \in [W]^m$ означатиме, що $w = \mathrm{col}\,(w_1, ..., w_m)$ – вектор-стовпчик з компонентами $w_i \in W$, $i \in \{1, ..., M\}$ (як виняток писатимемо $\mathbb{R}^m$ замість $[\mathbb{R}]^m$). Зауважимо, що коли W – лінійний простір, то $[W]^m$ – лінійний простір з відповідними лінійними операціями.

Введемо позначення $|w| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |w_i|$, де $w = \mathrm{col}\,(w_1, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$. Домовимось писати $u < v$ для $u, v \in \mathbb{R}^m$, якщо $u_i < v_i$, $i \in \{1, ..., m\}$, а нерівність $u \leqslant v$ означатиме, що $u_i \leqslant v_i$, $i \in \{1, ..., m\}$.

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T]$, де $0 < T < +\infty$ і Ω – область у просторі $\mathbb{R}^n_x$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь із запізненням

$$P_i w(x,t) \equiv \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} + \tag{1}$$

$$+ a_i(x,t)u_i(x,t) - f_i(x,t,w(x,t), J * w(x,t)) = \hat{f}_i(x,t),\ (x,t) \in Q,\ i \in \{1, ..., M\},$$

$$G_j w(x,t) \equiv \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + c_j(x,t)v_j(x,t) - g_j(x,t,w(x,t), J * w(x,t)) =$$

$$= \hat{g}_j(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}, \qquad j \in \{1, ..., L\}, \tag{2}$$

$$u_i(x,t) = h_i(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{3}$$

де M, L – довільні натуральні числа; $w(x,t) = \mathrm{col}(u(x,t), v(x,t))$, $u(x,t) = \mathrm{col}(u_1(x,t), ..., u_M(x,t))$, $v(x,t) = \mathrm{col}\,(v_1(x,t), ..., v_L(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$; $J * w(x,t) = \mathrm{col}(J_1 * u_1(x,t), ..., J_M * u_M(x,t), J_{M+1} * v_1(x,t), ..., J_{M+L} * v_L(x,t))$, де $J_k * \mathrm{w}(x,t) = \int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)\mathrm{w}(x,t-s)\,ds$, $k \in \{1, ..., M+L\}$, $\mathrm{w} \in C(\overline{Q})$, а $\tau_k \geqslant 0$, $k \in \{1, ..., M+L\}$; для кожних $i \in \{1, ..., M\}$, $j \in \{1, ..., L\}$ $f_i(x,t,\xi,\eta)$ та $g_j(x,t,\xi,\eta)$ – функції, які визначені відповідно для $(x,t) \in Q$ і $\overline{Q}$ та $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2(M+L)}$.

Далі цю задачу називатимемо задачею (1)-(3).

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(3) називають вектор-функцію* $w = col(u,v)$, *де* $u = col(u_1, ..., u_M) \in \left[C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(Q) \cap C_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^M$, $v = col(v_1, ..., v_L) \in \left[C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^L$, *яка задовольняє рівняння системи (1),(2) та граничну умову (3).*

На вихідні дані задачі накладатимемо такі умови:

(A1) функції $a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i$ – неперервні на Q, а функція c_j – на $\overline{Q}$, $i \in \{1, ..., M\}, j \in \{1, ..., L\}, \{k,l\} \subset \{1, ..., n\}$;

(A2) для кожного $i \in \{1, ..., M\}$ $a_{i,kl} \equiv a_{i,lk}$, $\{k,l\} \subset \{1, ..., n\}$ і в кожній точці $(x,t) \in Q$ для всіх $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geqslant \mu_i(t)\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2,$$

де μ_i – невід'ємна на $(-\infty, T]$ функція;

(A3) для кожних $i \in \{1,...,M\}$ та $j \in \{1,...,L\}$ функції $f_i(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, та $g_j(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$ – неперервні за сукупністю своїх аргументів, неспадні за змінними ξ, η і задовольняють умову Ліпшиця за цими ж змінними, а точніше, існують невід'ємні й обмежені на Q функції $K^f_{ik}(x,t)$, $L^f_{ik}(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $K^g_{jk}(x,t)$, $L^g_{jk}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$ такі, що для кожного $i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$

$$|f_i(x,t,\xi+\beta e_{(k)},\eta) - f_i(x,t,\xi,\eta)| \leqslant K^f_{ik}(x,t)|\beta|,$$

$$|f_i(x,t,\xi,\eta+\beta e_{(k)}) - f_i((x,t,\xi,\eta)| \leqslant L^f_{ik}(x,t)|\beta|,$$

$$|g_j(x,t,\xi+\beta e_{(k)},\eta) - g_j(x,t,\xi,\eta)| \leqslant K^g_{jk}(x,t)|\beta|,$$

$$|g_j(x,t,\xi,\eta+\beta e_{(k)}) - g_j(x,t,\xi,\eta)| \leqslant L^g_{jk}(x,t)|\beta|$$

для довільних $\{\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^{2(M+L)}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \{1,...,M+L\}$ (тут $e_{(k)} = \mathrm{col}(0;...;0;1;0;...;0)$ – вектор-стовпчик, всі компоненти якого, крім k-ї, дорівнюють нулю, а k-та компонента – одиниці, $k \in \{1,...,M+L\}$);

(A4)

$$\inf_{(x,t)\in Q}(a_i(x,t) - f^*_i(x,t)) \geqslant a_0 > 0, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$\inf_{(x,t)\in \overline{Q}}(c_j(x,t) - g^*_j(x,t)) \geqslant b_0 > 0, \quad j \in \{1,...,L\},$$

де a_0, b_0 – сталі,

$$f^*_i(x,t) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[K^f_{ik}(x,t) + L^f_{ik}(x,t)\right], \quad (x,t) \in Q, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$g^*_j(x,t) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[K^g_{jk}(x,t) + L^g_{jk}(x,t)\right], \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1,...,L\};$$

(A5) $J_k \in C(\overline{\Omega} \times [0,\tau_k])$, $J_k \geqslant 0$ і $\int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)\,ds \leqslant 1, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad k \in \{1,...,M+L\}$;

(A6) $\hat{f} = \mathrm{col}(\hat{f}_1,...,\hat{f}_M) \in [C_{\mathrm{loc}}(Q)]^M$, $\quad \hat{g} = \mathrm{col}(\hat{g}_1,...,\hat{g}_L) \in \left[C_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^L$, $h = \mathrm{col}(h_1,...,h_M) \in [C_{\mathrm{loc}}(\Sigma)]^M$.

Для зручності формулювання та доведення результатів роботи додатково, не зменшуючи загальності, припустимо, що

(A0) $f_i(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$, $i \in \{1,...,M\}$; $\quad g_j(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $j \in \{1,...,L\}$.

Якщо Ω – необмежена область, то додатково накладатимемо умову

(A7) існує стала $m^* > 0$ така, що $a_{i,kk}(x,t) \leqslant m^*(|x|^2+1)$, $|a_{i,k}(x,t)| \leqslant m^*(|x|+1)$, $(x,t) \in Q$, $i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$, $\{k,l\} \subset \{1,...,n\}$.

Далі всюди припускатимемо, що виконуються умови (**A0**)-(**A6**), а у випадку, коли Ω – необмежена область, – ще додатково умова (**A7**).

Основні результати роботи стосуються коректності задачі (1)-(3). Перед формулюванням введемо деякі поняття та позначення.

Нехай $Pw(x,t) \overset{def}{=} \operatorname{col}(P_1 w(x,t), ..., P_M w(x,t))$, $(x,t) \in Q$; $Gw(x,t) \overset{def}{=} \operatorname{col}(G_1 w(x,t), ..., G_L w(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Тоді задачу (1)-(3) можна компактно записати у вигляді

$$Pw(x,t) = \hat{f}(x,t),\ (x,t) \in Q, \quad Gw(x,t) = \hat{g}(x,t),\ (x,t) \in \overline{Q};$$
$$u(x,t) = h(x,t),\ (x,t) \in \Sigma,$$

де $w = \operatorname{col}(u,v) \in W_{\text{loc}}(Q) \overset{def}{=} [C^{2,1}_{\text{loc}}(Q) \cap C_{\text{loc}}(\overline{Q})]^M \times [C^{0,1}_{\text{loc}}(\overline{Q})]^L$. Приймемо, що $f_0 \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant M} \sup\limits_{(x,t)\in Q} \sum\limits_{k=1}^{M+L} L^f_{ik}(x,t)$, $g_0 \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant L} \sup\limits_{(x,t)\in \overline{Q}} \sum\limits_{k=1}^{M+L} L^g_{jk}(x,t)$, $\tau_* \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M+L} \tau_k$. Нехай $\nu_0 = \min\{\nu_1, \nu_2\}$, де відповідно ν_1 і ν_2 – розв'язки рівнянь

$$a_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)f_0 = 0 \quad \text{і} \quad b_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)g_0 = 0.$$

Ці рівняння мають по одному додатному розв'язку, оскільки функції

$$\varphi(\nu) = a_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)f_0 \quad \text{і} \quad \psi(\nu) = b_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)g_0$$

– неперервні та спадні за змінною ν, причому $\varphi(0) = a_0 > 0$, $\varphi(a_0) = -(e^{a_0\tau_*} - 1) \leqslant 0$, $\psi(0) = b_0$, $\psi(b_0) = -(e^{b_0\tau_*} - 1) \leqslant 0$.

Нехай H – одна з множин Q, $\overline{Q}$ або Σ; m – будь-яке натуральне число; ν – довільне дійсне число. Позначимо

$E_\nu(H;m) = \{q \in \left[C_{\text{loc}}(H)\right]^m$: існує стала $C = C(q) \geqslant 0$ така, що $|q(x,t)| \leqslant Ce^{-\nu t},\ (x,t) \in H\}$.

Теорема 1 (апріорна оцінка розв'язку). *Нехай для деякого $\nu < \nu_0$ $\hat{f} \in E_\nu(Q;M)$, $\hat{g} \in E_\nu(\overline{Q};L)$ і $h \in E_\nu(\Sigma;M)$. Тоді для розв'язку w задачі (1)-(3) з класу $E_\nu(\overline{Q}; M+L)$ справджується оцінка*

$$|w(x,t)| \leqslant \max\Big\{ \sup_{(y,s)\in\Sigma} |h(y,s)e^{\nu s}|,\ \sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}(y,s)e^{\nu s}|}{\varphi(\nu)},$$
$$\sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}(y,s)e^{\nu s}|}{\psi(\nu)}\Big\} \cdot e^{-\nu t} \equiv M_0 e^{-\nu t} \tag{4}$$

для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$.

Теорема 2 (єдиність розв'язку). *Розв'язок задачі (1)-(3) в класі $E_\nu(\overline{Q};M)$, де $\nu < \nu_0$, єдиний.*

Нехай $\alpha \in (0;1]$. Через $S^{(\alpha)}$ позначимо простір функцій $f(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, які задовольняють умову: для будь-якого компакту $B \subset \mathbb{R}^{2(M+L)}$ існує стала $K = K(B) \geqslant 0$ така, що нерівність

$$|f(x_1,t_1,\xi,\eta) - f(x_2,t_2,\xi,\eta)| \leqslant K\left[|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}\right]$$

виконується при будь-яких $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{Q}$ і $(\xi,\eta) \in B$.

Теорема 3 (існування розв'язку). *Припустимо, що при деяких* $\alpha \in (0;1]$ *і* $\nu < \nu_0$ *справджуються умови:*

*(***B1***)* $\{a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i, c_j\} \subset C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $\partial a_{i,kl}/\partial x_s \in C(\overline{Q})$, $\mu_i(t) \geqslant \mu_0 \equiv const > 0$, $t \in (-\infty, T]$, $i \in \{1,...,M\}, j \in \{1,...,L\}$, $\{k,l,s\} \subset \{1,...,n\}$;

*(***B2***)* $\{f_i(x,t,\xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t},\ g_j(x,t,\xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t} \ :\ i \in \{1,...,M\},\ j \in \{1,...,L\}\} \subset S^{(\alpha)}$;

*(***B3***)* $J_k(\cdot,t) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \{1,...,M+L\}$;

*(***B4***)* $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$;

*(***B5***)* $col\,(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}) \in \left[C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})\right]^{M+L}$, $e^{\nu t}h \in \left[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma})\right]^{M}$, $\hat{f} \in E_\nu(Q;M)$, $\hat{g} \in E_\nu(\overline{Q};L)$, $h \in E_\nu(\Sigma;M)$.

Тоді існує розв'язок $w = col\,(u,v)$ *задачі (1)-(3) з простору* $\left(\left[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^M \times \left[C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^L\right) \cap E_\nu(\overline{Q}; M+L)$.

Нехай Π_ν – простір вектор-функцій col $(\hat{f}, \hat{g}, h)$ таких, що col $(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}, e^{\nu t}h) \in [C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})]^{M+L} \times [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M$ для довільного $\nu < \nu_0$. Припустимо, що справджуються умови (**B1**)-(**B4**). Тоді для будь-яких вектор-функцій col $(\hat{f}, \hat{g}, h) \in \Pi_\nu$, де $\nu < \nu_0$, існує єдиний розв'язок w задачі (1)-(3) з класу $E_\nu(\overline{Q}; M+L)$. Коротко це записуватимемо у вигляді $w = RS_\nu(\hat{f}, \hat{g}, h)$.

Теорема 4 (неперервна залежність розв'язку від вихідних даних). *Нехай виконуються умови (***B1***)-(***B4***) теореми 3. Тоді для довільного значення* $\varepsilon > 0$ *існує значення* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких* $\{col\,(\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1),\ col\,(\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2)\} \subset \Pi_\nu$,

$$\sup_{(x,t)\in Q} |\hat{f}^1(x,t) - \hat{f}^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta, \quad \sup_{(x,t)\in \overline{Q}} |\hat{g}^1(x,t) - \hat{g}^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta,$$

$$\sup_{(x,t)\in \Sigma} |h^1(x,t) - h^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta,$$

виконується нерівність

$$\sup_{(x,t)\in Q} |w^1(x,t) - w^2(x,t)|e^{\nu t} < \varepsilon,$$

де $w^i = RS_\nu(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i)$, $\quad i \in \{1,2\}$.

2. Допоміжні твердження.

Зауваження 1. Нехай $\xi^l = \mathrm{col}\,(\xi^l_1, ..., \xi^l_{M+L}) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\eta^l = \mathrm{col}\,(\eta^l_1, ..., \eta^l_{M+L}) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $l \in \{1,2\}$. Приймемо $\xi^{1,2}_{(k)} = \mathrm{col}(\xi^2_1, ..., \xi^2_k, \xi^1_{k+1}, ..., \xi^1_{M+L})$, $\eta^{1,2}_{(k)} = \mathrm{col}(\eta^2_1, ..., \eta^2_k, \eta^1_{k+1}, ..., \eta^1_{M+L})$, $k \in \{1, ..., M+L-1\}$, $\xi^{1,2}_{(0)} = \xi^1$, $\xi^{1,2}_{(M+L)} = \xi^2$, $\eta^{1,2}_{(0)} = \eta^1$, $\eta^{1,2}_{(M+L)} = \eta^2$. Легко бачити, що для кожного $i \in \{1, ..., M\}$

$$f_i(x,t,\xi^1,\eta^1) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^2) = f_i(x,t,\xi^1,\eta^1) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^1) + f_i(x,t,\xi^2,\eta^1) -$$

$$-f_i(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} [(f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)) + (f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) -$$

$$-f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k)})] = \sum_{k=1}^{M+L} [\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1)(\xi^1_k - \xi^2_k) + \Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)(\eta^1_k - \eta^2_k)],$$

де

$$\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)}{\xi^1_k - \xi^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \xi^1_k \neq \xi^2_k,$$

$\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \xi^1_k = \xi^2_k, \quad$ і

$$\Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \frac{f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k)})}{\eta^1_k - \eta^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \eta^1_k \neq \eta^2_k,$$

$\Psi_{ik}(x,t,\xi^1,\eta^1,\eta^2) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \eta^1_k = \eta^2_k,\ k \in \{1,...,M+L\}$.

Аналогічно для кожного $j \in \{1,...,L\}$ отримуємо

$$g_j(x,t,\xi^1,\eta^1) - g_j(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} [S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1)(\xi^1_k - \xi^2_k) + \\ + \Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)(\eta^1_k - \eta^2_k)],$$

де

$$S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_j(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - g_j(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)}{\xi^1_k - \xi^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \xi^1_k \neq \xi^2_k,$$

$S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \xi^1_k = \xi^2_k, \quad$ і

$$\Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \frac{g_j(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) - g_j(x,t,\xi^1,\eta^{1,2}_{(k)})}{\eta^1_k - \eta^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \eta^1_k \neq \eta^2_k,$$

$\Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, якщо $\eta^1_k = \eta^2_k,\ \ k \in \{1,...,M+L\}$.

Зауваження 2. З означення функцій f_i^* і g_j^* та умови (**A3**) випливає, що для довільних $\{\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2\} \subset \mathbb{R}^{M+L}$

$$\sum_{k=1}^{M+L} [\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) + \Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)] \leqslant f_i^*(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$\sum_{k=1}^{M+L} [S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) + \Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)] \leqslant g_j^*(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1,...,L\}.$$

Нехай t_0 – довільне число з проміжку $(-\infty,T)$, $Q^0 = \Omega \times (t_0,T]$, $\Omega^0 = \Omega \times \{t_0\} \equiv Q \cap \{t = t_0\}$, $\Sigma^0 = \partial\Omega \times (t_0,T]$. Приймемо для кожного $k \in \{1,...,M+L\}$ $D^0_k = \overline{\Omega} \times (t_0 - \tau_k, T]$, $G^0_k = \overline{\Omega} \times (t_0 - \tau_k, t_0]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G^0_k = \overline{\Omega_0}$, якщо $\tau_k = 0$. Простір функцій $w = \mathrm{col}(u,v) \in \left[C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(Q^0) \cap C(\overline{Q^0})\right]^M \times \left[C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q^0} \cap C(\overline{Q^0})\right]^L \cap \left[C_{\mathrm{loc}}(D^0_1) \times C_{\mathrm{loc}}(D^0_2) \times ... \times C_{\mathrm{loc}}(D^0_{M+L})\right]$ коротко позначатимемо через W^0.

Визначимо деякі властивості функцій з простору W^0.

Лема 1. *Нехай Ω – обмежена область і для пари вектор-функцій $\{\tilde{w} = col\,(\tilde{u}, \tilde{v}),\ \hat{w} = col\,(\hat{u}, \hat{v})\} \subset W^0$ виконуються нерівності*

$$P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0, \quad G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}, \qquad (5)$$

$$\tilde{u}(x,t) < \hat{u}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^0, \qquad (6)$$

$$\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i(x,t), \quad (x,t) \in G_i^0, \quad i \in \{1, ..., M\},$$

$$\tilde{v}_j(x,t) < \hat{v}_j(x,t), \quad (x,t) \in G_{M+j}^0, \quad j \in \{1, ..., L\}. \qquad (7)$$

Тоді $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}$.

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді в силу (7) існують $t^* \in (t_0, T]$ та $x^* \in \overline{\Omega}$ такі, що $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}(x,t)$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q^0} \cap \{(x,t) : t_0 \leqslant t < t^*\}$, і $\tilde{u}_\mu(x^*,t^*) = \hat{u}_\mu(x^*,t^*)$ при певному $\mu \in \{1, ..., M\}$ або $\tilde{v}_s(x^*,t^*) = \hat{v}_s(x^*,t^*)$ при певному $s \in \{1, ..., L\}$.

Якщо $\tilde{u}_\mu(x^*,t^*) = \hat{u}_\mu(x^*,t^*)$, то $(x^*,t^*) \notin \Sigma^0 \cup \overline{\Omega^0}$, бо виконуються нерівності (6) і (7). Різниця $\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu$ в $\overline{Q^0} \cap \{(x,t) : t_0 \leqslant t \leqslant t^*\}$ набуває найбільшого значення в точці (x^*,t^*) і це значення дорівнює нулеві. Тому, враховуючи умову (**A2**), маємо

$$\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial t\big|_{(x^*,t^*)} \geqslant 0, \quad \partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial x_m\big|_{(x^*,t^*)} = 0, \quad m \in \{1, ..., n\},$$
$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{\mu,kl}(x^*,t^*)\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial x_k \partial x_l\big|_{(x^*,t^*)} \leqslant 0.$$

Отже, використовуючи умови (**A3**) та (**A5**), отримаємо

$$\begin{aligned}
P_\mu\tilde{w}(x^*,t^*) - P_\mu\hat{w}(x^*,t^*) = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\big|_{(x^*,t^*)} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{\mu,kl}(x^*,t^*)\frac{\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k \partial x_l}\big|_{(x^*,t^*)} + \\
+ \sum_{k=1}^{n} a_{\mu,k}(x^*,t^*)\frac{\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k}\big|_{(x^*,t^*)} + a_\mu(x^*,t^*)(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\big|_{(x^*,t^*)} - \\
- (f_\mu(x^*,t^*,\tilde{w}(x^*,t^*), J*\tilde{w}(x^*,t^*)) - f_\mu(x^*,t^*,\hat{w}(x^*,t^*), J*w(x^*,t^*))) \geqslant \\
\geqslant f_\mu(x^*,t^*,\hat{w}(x^*,t^*), J*\hat{w}(x^*,t^*)) - f_\mu(x^*,t^*,\tilde{w}(x^*,t^*), J*\tilde{w}(x^*,t^*)) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

що суперечить (5). Якщо $\tilde{v}_s(x^*,t^*) = \hat{v}_s(x^*,t^*)$, то аналогічно доводимо, що $G_s\tilde{w}(x^*,t^*) \geqslant G_s\hat{w}(x^*,t^*)$, що теж суперечить (5). □

Лема 2. *Припустимо, що виконуються всі умови леми 1, але нерівності (5)-(7) нестрогі. Тоді $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t)$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q^0}$.*

Доведення. Розглянемо допоміжну вектор-функцію $\hat{w}^\lambda(x,t) = \hat{w}(x,t) + \lambda e^t\theta$, де $\theta = \mathrm{col}\,(1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\lambda > 0$. Використовуючи зауваження 1 і 2 та умови **(A3)**,**(A5)**, для кожного $i \in \{1, ..., M\}$ отримаємо

$$P_i\hat{w}^\lambda(x,t) = P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t) - [f_i(x,t,\hat{w}^\lambda(x,t), J * \hat{w}^\lambda(x,t)) - \\ - f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J * \hat{w}(x,t))] = P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t) - \\ - \sum_{k=1}^{M+L} \big[\Phi_{ik}(x,t,\hat{w}^\lambda(x,t), \hat{w}(x,t), J{*}\hat{w}^\lambda(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t), J{*}\hat{w}^\lambda(x,t), J{*}\hat{w}(x,t)) \times \\ \times \int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)e^{-s}\,ds\big]\lambda e^t \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t) - \\ - \sum_{k=1}^{M+L} \big[\Phi_{ik}x,t,\hat{w}^\lambda(x,t), \hat{w}(x,t), J{*}\hat{w}^\lambda(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t), J{*}\hat{w}^\lambda(x,t), J{*}\hat{w}(x,t))\big] \times \\ \times \lambda e^t \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)) > P_i\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0.$$

Аналогічно доводимо, що $G\hat{w}^\lambda(x,t) > G\hat{w}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q^0}$. Оскільки $P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}(x,t)$, а $P\hat{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, то $P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in Q^0$. З аналогічних міркувань одержимо, що $G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q^0}$. Враховуючи це, а також те, що $\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma^0$, $\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in G_i^0$, $i \in \{1, ..., M\}$, $\tilde{v}_j(x,t) < \hat{v}_j^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in G_{M+j}^0$, $j \in \{1, ..., L\}$, з леми 1 матимемо, що $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}^\lambda(x,t)$, коли $(x,t) \in \overline{Q^0}, \lambda > 0$. Оскільки $\lim\limits_{\lambda \to +0} \hat{w}^\lambda(x,t) = \hat{w}(x,t)$, то $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t), (x,t) \in \overline{Q^0}$. □

Лема 3. *Нехай Ω – необмежена область і для вектор-функцій $\{\tilde{w} = col\,(\tilde{u}, \tilde{v})$, $\hat{w} = col\,(\hat{u}, \hat{v})\} \subset W^0$ виконуються нерівності*

$$P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0, \quad G\tilde{w}(x,t) \leqslant G\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}, \tag{8}$$

$$\tilde{u}(x,t) \leqslant \hat{u}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^0, \tag{9}$$

$$\tilde{u}_i(x,t) \leqslant \hat{u}_i(x,t), \quad (x,t) \in G_i^0, \quad i \in \{1, ..., M\},$$

$$\tilde{v}_j(x,t) \leqslant \hat{v}_j(x,t), \quad (x,t) \in G_{M+j}^0, \quad j \in \{1, ..., L\}. \tag{10}$$

Тоді $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t)$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q^0}$.

Доведення. Нехай K – стала така, що $|\tilde{w}(x,t)| \leqslant K$, і $|\hat{w}(x,t)| \leqslant K$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Позначимо $\Omega_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $Q_R^0 = \Omega_R \times (t_0, T]$, $\Sigma_R^0 = \partial\Omega_R \times (t_0, T]$, $G_{k,R}^0 = \overline{\Omega_R} \times (t_0 - \tau_k, t_0]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G_{k,R}^0 = \overline{\Omega_R} \times \{t_0\}$, якщо $\tau_k = 0$, $k \in \{1, ..., M + L\}$. Розглянемо допоміжну вектор-функцію $\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) \equiv \mathrm{col}\,(\hat{u}^{R,\lambda}(x,t), \hat{v}^{R,\lambda}(x,t)) = \hat{w}(x,t) + q^{R,\lambda}(x,t)$ де $\hat{u}^{R,\lambda}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{u}_1^{R,\lambda}(x,t), ..., \hat{u}_M^{R,\lambda}(x,t))$, $\hat{v}^{R,\lambda}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{v}_1^{R,\lambda}(x,t), ..., \hat{v}_L^{R,\lambda}(x,t))$, $q^{R,\lambda}(x,t) = \dfrac{2K}{R^2}(|x|^2 + 1)e^{\lambda(t-t_0)}\theta$, $\theta = \mathrm{col}\,(1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $R > 1$, $\lambda > 8m^*n$. Використовуючи зауваження 1 і 2 та умови (**A0**), (**A3**), (**A4**), (**A7**) отримаємо

$$P_i\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) = P_i\hat{w}(x,t) + \frac{2K}{R^2}e^{\lambda(t-t_0)}\Big[\lambda(|x|^2+1) - 2\sum_{k=1}^{n} a_{i,kk}(x,t) + $$
$$+ 2\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)x_k\Big] + a_i(x,t)\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)} -$$
$$- \big[f_i(x,t,(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t), J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t)) -$$
$$- f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}(x,t))\big] \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \frac{2K}{R^2}(\lambda - 8m^*n)e^{\lambda(t-t_0)}(|x|^2+1) + \Big(a_i(x,t) -$$
$$- \sum_{k=1}^{M+L}\big[\Phi_{ik}(x,t,(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t), \hat{w}(x,t), J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t),$$
$$J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t)), J*\hat{w}(x,t))\int_0^{\tau_k} J_k(x,s)e^{-\lambda s}\,ds\big]\Big)\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)} \geqslant P_i\hat{w}(x,t) +$$
$$+ \frac{2K}{R^2}(\lambda - 8m^*n)e^{\lambda(t-t_0)}(|x|^2+1) + (a_i(x,t) - f_i^*(x,t))\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)} \geqslant$$
$$\geqslant P_i\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q_R^0, \quad i \in \{1,...,M\}.$$

Аналогічно доводимо, що $G\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) \geqslant G\hat{w}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q_R^0}$. Отже, $P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in Q_R^0$ і $G\tilde{w}(x,t) \leqslant G\hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q_R^0}$. Оскільки $|\tilde{w}(x,t)| \leqslant K$ і $|\hat{w}(x,t)| \leqslant K$, $(x,t) \in \overline{Q_R^0}$, то $\tilde{u}(x,t) \leqslant \hat{u}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma_R^0$. Очевидно, що $\tilde{u}_i(x,t) \leqslant \hat{u}_i^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in G_{i,R}^0$, $i \in \{1,...,M\}$, і $\tilde{v}_j(x,t) \leqslant \hat{v}_j^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in G_{M+j,R}^0$, $j \in \{1,...,L\}$. Використовуючи лему 2, одержимо $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t) \in Q_R^0$, для всіх $R > 1$. Зафіксуємо довільно вибрану точку $(x,t) \in Q^0$ і перейдемо до границі при $R \to +\infty$. В результаті отримаємо потрібну нерівність. □

Лема 4. *Для довільної функції* $w = col\,(u,v) \in W^0$ *справджується оцінка*

$$|w(x,t)| \leqslant \max\Big\{\sup_{(y,s)\in\Sigma^0}|u(y,s)|, \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^0}|u_i(y,s)|,$$
$$\max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^0}|v_j(y,s)|, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Pw(y,s)|}{a_0}, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Gw(y,s)|}{b_0}\Big\}, \quad (x,t) \in \overline{Q^0}. \tag{11}$$

Доведення. Нехай

$$C = \max\{\sup_{(y,s)\in\Sigma^0}|u(y,s)|, \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^0}|u_i(y,s)|, \max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^0}|v_j(y,s)|,$$
$$\sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Pw(y,s)|}{a_0}, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Gw(y,s)|}{b_0}\}.$$

Розглянемо вектор-функцію $\hat{w} = \mathrm{col}\,(\hat{u},\hat{v})$, де $\hat{u}(x,t) = \mathrm{col}\,(C,...,C) \in \mathbb{R}^M, \hat{v}(x,t) = \mathrm{col}\,(C,...,C) \in \mathbb{R}^L$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Використовуючи зауваження 1 і

2 та умови (**A0**), (**A3**), (**A4**), отримаємо

$$
\begin{aligned}
P_i\hat{w}(x,t) &= a_i(x,t)\cdot C - f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}(x,t)) = \\
&= C\cdot\left(a_i(x,t) - \frac{f_i(x,t,\hat{w}(x,t),J*\hat{w}(x,t)) - f_i(x,t,0,0)}{C}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
= C\cdot\left(a_i(x,t) - \sum_{k=1}^{M+L}\left[\Phi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t),0,J*\hat{w}(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,0,J*\hat{w}(x,t),0)\times\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\times\int_0^{\tau_k} J_k(x,s)\,ds\right]\right) \geqslant C(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)), \quad i\in\{1,...,M\}. \quad (12)
$$

З умови (**A4**), нерівності (12) та вибору C випливає, що

$$
P_i\hat{w}(x,t) \geqslant C\cdot a_0 \geqslant P_i w(x,t), \qquad (x,t)\in Q^0, \quad i\in\{1,...,M\}. \quad (13)
$$

Аналогічно можна довести, що

$$
G_j\hat{w}(x,t) \geqslant G_j w(x,t), \quad (x,t)\in\overline{Q^0}, \quad j\in\{1,...,L\}. \quad (14)
$$

З означення вектор-функції $\hat{w} = \mathrm{col}\,(\hat{u},\hat{v})$ маємо

$$
\hat{u}(x,t) \geqslant u(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma^0, \quad (15)
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_i(x,t) &\geqslant u_i(x,t), \quad (x,t)\in G_i^0, \quad i\in\{1,...,M\}, \\
\hat{v}_j(x,t) &\geqslant v_j(x,t), \quad (x,t)\in G_{M+j}^0, \quad j\in\{1,...,L\}. \quad (16)
\end{aligned}
$$

На підставі (13)-(16) з лем 2 і 3 одержимо

$$
\hat{w}(x,t) \geqslant w(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q^0}.
$$

Аналогічно можна довести, що

$$
w(x,t) \geqslant -\hat{w}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q^0}.
$$

З двох останніх нерівностей випливає оцінка (11). □

Зауваження 3. Якщо $Pw(x,t) = 0$ і $Gw(x,t) = 0$, то $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^0}}|w(x,t)|$ оцінюється через $\sup\limits_{(x,t)\in\Sigma^0}|u(x,t)|$, $\max\limits_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup\limits_{(x,t)\in G_i^0}|u_i(x,t)|$ та $\max\limits_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup\limits_{(x,t)\in G_{M+j}^0}|v_j(x,t)|$ і не залежить від a_0.

Лема 5. *Нехай вектор-функції* $\{w^1 = col\,(u^1,v^1),\ w^2 = col\,(u^2,v^2)\}\subset E_\nu(\overline{Q};M+L)\cap W_{\mathrm{loc}}(Q)$ *такі, що* $Pw^1 - Pw^2\in E_\nu(Q;M)$, $Gw^1 - Gw^2\in E_\nu(\overline{Q};L)$, $(u^1-u^2)\big|_\Sigma\in E_\nu(\Sigma;M)$ *для деякого* $\nu<\nu_0$. *Тоді*

$$
|w^1(x,t) - w^2(x,t)| \leqslant \max\left\{\sup_{(y,s)\in\Sigma}|u^1(y,s) - u^2(y,s)|e^{\nu s},\right.
$$

$$\sup_{(y,s)\in Q} \frac{|Pw^1(y,s)-Pw^2(y,s)|e^{\nu s}}{\varphi(\nu)}, \sup_{(y,s)\in \overline{Q}} \frac{|Gw^1(y,s)-Gw^2(y,s)|e^{\nu s}}{\psi(\nu)}\Big\} e^{-\nu t}, \quad (17)$$

де $(x,t)\in Q$.

Доведення. Позначимо $\hat{f}^k(x,t) \stackrel{def}{=} Pw^k(x,t)$, $(x,t)\in Q$, $\hat{g}^k(x,t) \stackrel{def}{=} Gw^k(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $h^k(x,t) \stackrel{def}{=} u^k(x,t)$, $(x,t)\in\Sigma$, $k\in\{1,2\}$. Прийнявши $u^{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} u^1-u^2$, $v^{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} v^1-v^2$, $w^{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} w^1-w^2$, із рівнянь (1),(2) та умови (3), записаних для w^1 і w^2, врахувавши зауваження 1, отримаємо

$$L_i w^{1,2}(x,t) - \tilde{f}_i(x,t,w^{1,2}(x,t), J*w^{1,2}(x,t)) = \hat{f}_i^{1,2}(x,t),\ \ (x,t)\in Q,\ \ i\in\{1,...,M\}, \quad (18)$$

$$F_j w^{1,2}(x,t) - \tilde{g}_j(x,t,w^{1,2}(x,t), J*w^{1,2}(x,t)) = \hat{g}_j^{1,2}(x,t),\ \ (x,t)\in \overline{Q},\ \ j\in\{1,...,L\}, \quad (19)$$

$$u_i^{1,2}(x,t) = h_i^{1,2}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \quad i\in\{1,...,M\}, \quad (20)$$

де $L_i w^{1,2}(x,t) \stackrel{def}{=} P_i w^{1,2}(x,t) + f_i(x,t,w^{1,2}(x,t), J*w^{1,2}(x,t))$, $(x,t)\in Q$, $i\in\{1,...,M\}$,
$F_j w^{1,2}(x,t) \stackrel{def}{=} G_j w^{1,2}(x,t) + g_j(x,t,w^{1,2}(x,t), J*w^{1,2}(x,t))$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $j\in\{1,...,L\}$;

$$\tilde{f}_i(x,t,\xi,\eta) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L}\big[\Phi_{ik}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J*w^1(x,t))\xi_k +$$
$$+\Psi_{ik}(x,t,w^2(x,t),J*w^1(x,t),J*w^2(x,t))\eta_k\big],\ \ (x,t,\xi,\eta)\in Q\times\mathbb{R}^{2(M+L)},$$
$$i\in\{1,...,M\},$$

$$\tilde{g}_j(x,t,\xi,\eta) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L}\Big[S_{jk}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J*w^2(x,t))\xi_k +$$
$$+\Lambda_{jk}(x,t,w^1(x,t),J*w^1(x,t),J*w^2(x,t))\eta_k\Big],\ \ (x,t,\xi,\eta)\in \overline{Q}\times\mathbb{R}^{2(M+L)},$$
$$j\in\{1,...,L\};$$

$\hat{f}^{1,2}(x,t) \stackrel{def}{=} \hat{f}^1(x,t)-\hat{f}^2(x,t)$, $(x,t)\in Q$; $\hat{g}^{1,2}(x,t) \stackrel{def}{=} \hat{g}^1(x,t)-\hat{g}^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$;

$$h^{1,2}(x,t) \stackrel{def}{=} h^1(x,t)-h^2(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\nu=0$, використаємо ідею з праці [7]. Нехай λ – поки що довільне число. Домножимо (18), (19) і (20) на $e^{\lambda t}$. Після простих перетворень одержимо

$$P_i^\lambda \tilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv L_i\tilde{w}^{1,2}(x,t) - \lambda\tilde{u}_i^{1,2}(x,t) - \quad (21)$$
$$-\tilde{f}_i^\lambda(x,t,\tilde{w}^{1,2}(x,t),\tilde{J}*\tilde{w}^{1,2}(x,t)) = \hat{f}_i^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in Q,\ i\in\{1,...,M\},$$

$$G_j^\lambda \tilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv F_j\tilde{w}^{1,2}(x,t) - \lambda\tilde{v}_j^{1,2}(x,t) - \quad (22)$$
$$-\tilde{g}_j^\lambda(x,t,\tilde{w}^{1,2}(x,t),\tilde{J}*\tilde{w}^{1,2}(x,t)) = \hat{g}_j^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in \overline{Q},\ j\in\{1,...,L\}.$$

$$\tilde{u}_i^{1,2}(x,t) = h_i^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in\Sigma,\quad i\in\{1,...,M\}. \quad (23)$$

Тут $\tilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv \mathrm{col}\,(\tilde{u}^{1,2}(x,t), \tilde{v}^{1,2}(x,t)) \stackrel{def}{=} \mathrm{col}\,(u^{1,2}(x,t)e^{\lambda t}, v^{1,2}(x,t)e^{\lambda t})$, $(x,t) \in \overline{Q}$,
$\tilde{J} * w(x,t) = \mathrm{col}(\tilde{J}_1 * u_1(x,t), ..., \tilde{J}_M * u_M(x,t), \tilde{J}_{M+1} * v_1(x,t), ..., \tilde{J}_{M+L} * v_L(x,t))$, де
$\tilde{J}_i * u_i(x,t) = \int\limits_0^{\tau_i} \tilde{J}_i(x,s)u_i(x,t-s)\,ds$, $i \in \{1,...,M\}$, $\tilde{J}_{M+j} * v_j(x,t) = \int\limits_0^{\tau_{M+j}} \tilde{J}_{M+j}(x,s)v_j(x,\ t-s)\,ds$, $j \in \{1,...,L\}$, а $\tilde{J}_k(x,s) = J_k(x,s)e^{\lambda(s-\tau_k)}$, $s \in [0,\tau_k]$, $k \in \{1,...,M+L\}$, і

$$\tilde{f}_i^\lambda(x,t,\xi,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[\tilde{K}_{ik}^f(x,t)\xi_k + \tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t)\eta_k\right], \qquad (x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^{2(M+L)};$$

$$\tilde{g}_j^\lambda(x,t,\xi,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[\tilde{K}_{jk}^g(x,t)\xi_k + \tilde{L}_{jk}^{g,\lambda}(x,t)\eta_k\right], \qquad (x,t,\xi,\eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)},$$

де

$$\tilde{K}_{ik}^f(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{ik}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J * w^1(x,t)),$$

$$\tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{ik}(x,t,w^2(x,t),J * w^1(x,t),J * w^2(x,t))e^{\lambda\tau_k},$$

$$\tilde{K}_{jk}^g(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} S_{jk}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J * w^1(x,t)),$$

$$\tilde{L}_{jk}^{g,\lambda}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{jk}(x,t,w^2(x,t),J * w^1(x,t),J * w^2(x,t))e^{\lambda\tau_k},$$

$i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$, $k \in \{1,...,M+L\}$.

Легко бачити, що коефіцієнти диференціальних операторів P_i^λ, $i \in \{1,...,M\}$, G_j^λ, $j \in \{1,...,L\}$, задовольняють умови, які аналогічні до умов (**A1**)-(**A3**) для коефіцієнтів операторів P_i, $i \in \{1,...,M\}$, G_j, $j \in \{1,...,L\}$. Перевіримо, що, коли $\lambda \in (0,\nu_0)$, то для коефіцієнтів P_i^λ, $i \in \{1,...,M\}$, G_j^λ, $j \in \{1,...,L\}$ виконується умова, аналогічна до умови (**A4**).

На підставі умови (**A3**) і означення ν_0 маємо

$$a_i(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[\tilde{K}_{ik}^f(x,t)+\tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t)\right] \geqslant a_i(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[K_{ik}^f(x,t)+L_{ik}^f(x,t)e^{\lambda\tau_k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{(x,t)\in Q}\big(a_i(x,t)-f^*(x,t)\big)-\lambda-\sup_{(x,t)\in Q}\sum_{k=1}^{M+L}(e^{\lambda\tau_k}-1)L_{ik}^f(x,t) \geqslant$$

$$\geqslant a_0-\lambda-(e^{\lambda\tau_*}-1)f_0=\varphi(\lambda)>0, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$c_j(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[\tilde{K}_{jk}^g(x,t)+\tilde{L}_{jk}^g(x,t)\right] \geqslant c_j(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[K_{jk}^g(x,t)+L_{jk}^g(x,t)e^{\lambda\tau_k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{(x,t)\in\overline{Q}}\big(c_j(x,t)-g^*(x,t)\big)-\lambda-\sup_{(x,t)\in Q}\sum_{k=1}^{M+L}(e^{\lambda\tau_k}-1)L_{jk}^g(x,t) \geqslant$$

$$\geqslant b_0 - \lambda - (e^{\lambda\tau_*} - 1)g_0 = \psi(\lambda) > 0, \quad j \in \{1, ..., L\}.$$

Звідси видно, що виконується умова аналогічна до умови (**A4**) з тією лише різницею, що замість $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ треба взяти відповідно $\varphi(\lambda) > 0$ і $\psi(\lambda) > 0$. Очевидно, що виконується умова аналогічна до умови (**A5**), оскільки

$$0 \leqslant \int\limits_0^{\tau_k} \tilde{J}_k(x,s)\,ds \leqslant \int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)\,ds \leqslant 1, \quad k \in \{1, ..., M+L\}.$$

Нехай t_* – довільне від'ємне число, $Q^* = \Omega\times(t_*,T)$, $\Sigma^* = \partial\Omega\times(t_*,T]$, $G_k^* = \overline{\Omega}\times(t_*-\tau_k, t_*]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G_k^* = \overline{\Omega}\times\{t_*\}$, якщо $\tau_k = 0$, $k \in \{1, ..., M+L\}$. Міркуючи аналогічно як при доведенні леми 4, та враховуючи вищесказане, отримаємо

$$\begin{aligned}|\tilde{w}^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{&e^{\lambda T}\cdot \sup_{(y,s)\in\Sigma^*}|u^{1,2}(y,s)|,\ e^{\lambda t_*}\cdot \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^*}|u_i^{1,2}(y,s)|,\\ &e^{\lambda t_*}\cdot \max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^*}|v_j^{1,2}(y,s)|,\ \frac{e^{\lambda T}}{\varphi(\lambda)}\cdot \sup_{(y,s)\in Q^*}|\hat{f}^{1,2}(y,s)|,\\ &\frac{e^{\lambda T}}{\psi(\lambda)}\cdot \sup_{(y,s)\in Q^*}|\hat{g}^{1,2}(y,s)|\},\quad (x,t)\in\overline{Q^*}.\end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки w^1, $w^2 \in E_0(\overline{Q}; M+L)$, то $|w^{1,2}(x,t)| \leqslant C_1$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$, де $C_1 \geqslant 0$ – стала. Отже, $e^{\lambda t_*}\cdot \max\limits_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup\limits_{(y,s)\in G_i^*}|u_i^{1,2}(y,s)| \to 0$ і $e^{\lambda t_*}\cdot \max\limits_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup\limits_{(y,s)\in G_{M+j}^*}|v_j^{1,2}(y,s)| \to 0$ при $t_* \to -\infty$. Враховуючи це, перейдемо в (24) до границі при $t_* \to -\infty$. В результаті прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned}|w^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{&e^{\lambda(T-t)}\cdot \sup_{(y,s)\in\Sigma}|u^{1,2}(y,s)|,\\ &\frac{e^{\lambda(T-t)}}{\varphi(\lambda)}\cdot \sup_{(y,s)\in Q}|\hat{f}^{1,2}(y,s)|,\ \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\psi(\lambda)}\cdot \sup_{(y,s)\in Q}|\hat{g}^{1,2}(y,s)|\},\quad (x,t)\in Q.\end{aligned} \tag{25}$$

Для кожної фіксованої точки $(x,t) \in Q$ перейдемо в (25) до границі при $\lambda \to +0$. В результаті отримаємо (17) для $\nu = 0$.

Нехай тепер ν – довільне, причому $\nu < \nu_0, \nu \neq 0$. Домножимо (18),(19) і (20) на $e^{\nu t}$. Після простих перетворень одержимо (див. (21)-(23))

$$P_i^{\nu}\hat{w}^{1,2}(x,t) = \hat{f}_i^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in Q, \quad i\in\{1,...,M\},$$

$$G_j^{\nu}\hat{w}^{1,2}(x,t) = \hat{g}_j^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in\overline{Q}, \quad j\in\{1,...,L\},$$

$$\tilde{u}_i^{1,2}(x,t) = h_i^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in\Sigma, \quad i\in\{1,...,M\},$$

де $\hat{w}^{1,2}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{u}^{1,2}(x,t), \hat{v}^{1,2}(x,t)) \stackrel{def}{=} \mathrm{col}\,(u^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, v^{1,2}(x,t)e^{\nu t})$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Як було показано вище, коефіцієнти диференціальних операторів P_i^{ν}, $i \in \{1, ..., M\}$, G_j^{ν}, $j \in \{1, ..., L\}$ задовольняють умови, які аналогічні до умов (**A1**)-(**A5**),(**A7**) для коефіцієнтів операторів P_i, $i \in \{1, ..., M\}$, G_j, $j \in \{1, ..., L\}$, з тією лише різницею, що замість $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ треба взяти відповідно $\varphi(\nu) > 0$ і $\psi(\nu) > 0$. Очевидно, що $\hat{w}^{1,2} \in E_0(\overline{Q}; M+L)$. З доведеного для $\nu = 0$ отримаємо

$$|\hat{w}^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{ \sup_{(y,s)\in\Sigma} |u^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|, \sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|}{\varphi(\nu)}, \sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|}{\psi(\nu)}\}, \quad (x,t) \in Q.$$

Звідси одержимо (17).

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай $\hat{w} = \mathrm{col}\ (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{M+L}$, а w – розв'язок задачі (1)-(3). Очевидно, що $P\hat{w} = 0$ і $G\hat{w} = 0$. Застосовуючи лему 5 до вектор-функцій w і $\hat{w}$, отримаємо потрібну оцінку. □

Доведення теореми 2. Припустимо, що існують два розв'язки $w^1 = \mathrm{col}\ (u^1, v^1)$ і $w^2 = \mathrm{col}\ (u^2, v^2)$ задачі (1)-(3). Тоді $u^1(x,t) = u^2(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma$; $Pw^1(x,t) = Pw^2(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $Gw^1(x,t) = Gw^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Звідси та з леми 5 випливає, що $w^1(x,t) = w^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. □

Доведення теореми 3. Розглянемо спочатку випадок, коли $\nu = 0$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ позначимо $Q^k = Q \cap \{(x,t) : t > -k\}$, $\Sigma^k = \Sigma \cap \{(x,t) : t > -k\}$, $G_l^k = \overline{\Omega} \times (-k - \tau_l, -k]$, якщо $\tau_l > 0$, $G_l^k = \overline{\Omega} \times \{-k\}$, якщо $\tau_l = 0$, $l \in \{1, ..., M+L\}$. Визначимо вектор-функцію $w^k = \mathrm{col}\ (u^k, v^k)$ як розв'язок задачі

$$P_i w^k(x,t) = \hat{f}_i^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q^k, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{26}$$

$$Gw^k(x,t) = \hat{g}^k(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q^k}, \qquad j \in \{1, ..., L\}, \tag{27}$$

$$u^k(x,t) = h^k(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^k, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{28}$$

$$u_i^k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_i^k, \quad i \in \{1, ..., M\},$$
$$v_j^k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_{M+j}^k, \quad j \in \{1, ..., L\}. \tag{29}$$

Тут $h^k(x,t) = \zeta(t+k)h(x,t)$ при $(x,t) \in \Sigma$, $\hat{f}^k(x,t) = \hat{f}(x,t)\zeta(t+k)$, $\hat{g}^k(x,t) = \hat{g}(x,t)\zeta(t+k)$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, де ζ – гладка і монотонна на $\mathbb{R}$ функція така, що $\zeta(t) = 0$ при $t \leqslant 1/2$, $\zeta(t) = 1$ при $t \geqslant 1$.

Із результатів праць [1,2] випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ задача (26) – (28) має єдиний розв'язок $w^k \in [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^M \times [C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^L$, причому (на підставі леми 4) $w^k(x,t) = 0$ для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-k, -k+1/2)$. Продовжимо кожну з вектор-функцій u^k і v^k нулем на $\overline{Q} \setminus \overline{Q^k}$ і залишимо за продовженнями ті самі позначення ($k \in \mathbb{N}$). Очевидно, що $w^k = \mathrm{col}\ (u^k, v^k) \in [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M \times [C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^L$, $w^k = RS_0(\hat{f}^k, \hat{g}^k, h^k)$ ($k \in \mathbb{N}$), згідно з теоремою 1

$$|w^k(x,t)| \leqslant M_0 \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^Q + \sum_{j=1}^{L} ||v_j^k||_{\alpha,1+\alpha/2}^Q \leqslant C_2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Перепишемо рівняння (26) у такому вигляді:

$$\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial t} - \sum_{m,l=1}^{n} a_{i,ml}(x,t)\frac{\partial^2 u_i^k(x,t)}{\partial x_m \partial x_l} + \sum_{m=1}^{n} a_{i,m}(x,t)\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial x_m} + a_i(x,t)u_i^k(x,t) =$$
$$= f_i(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t)) + \hat{f}_i^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q^k, \qquad i \in \{1,...,M\} \quad (32)$$

і протрактуємо праву частину як вільний член. З умов теореми, враховуючи (30), випливає, що права частина (32) є неперервною і обмеженою на $\overline{Q}$. Застосовуючи до системи (32) теорему 3.1 праці [8, с.665], отримаємо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||_{\alpha,\alpha/2}^{Q} \leqslant C_3, \qquad (33)$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить від n, M_0, $||a_{i,ml}||_{0,0}^Q$, $||a_{i,m}||_{0,0}^Q$, $||a_i||_{0,0}^Q$, $||\partial a_{i,ml}/\partial x_s||_{0,0}^Q$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,T]} \mu_i(t)$, $\sup\{f_i(x,t,\xi,\eta) : (x,t) \in Q, |\xi| \leqslant M_0, |\eta| \leqslant M_0\}$, $||\hat{f}_i||_{0,0}^Q, ||h_i||_{0,0}^\Sigma$, $i \in \{1,...,M\}$, $\{m,l,s\} \subset \{1,...,n\}$, але не залежить від k.

Розглянемо послідовність $\{v^k\}$. Для довільних (x_1,t_1), $(x_2,t_2) \in \overline{Q}$ маємо

$$|v_j^k(t_1,x_1) - v_j^k(t_2,x_2)| \leqslant |v_j^k(t_1,x_2) - v_j^k(t_2,x_2)| + |v_j^k(t_1,x_1) - v_j^k(t_1,x_2)|. \quad (34)$$

Від рівностей вигляду (27), записаних для $x = x_1$, віднімемо відповідно такі самі рівності, але записані для $x = x_2$. В результаті простих перетворень, використовуючи зауваження 1, отримаємо

$$\frac{\partial(v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t))}{\partial t} + c_j(x_2,t)(v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t)) -$$
$$- \sum_{m=M+1}^{M+L} S_{jm}(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t))(v_m^k(x_1,t) - v_m^k(x_2,t)) -$$
$$-\sum_{m=M+1}^{M+L} \Lambda_{jm}(x_2,t,w^k(x_2,t), J*w^k(x_1,t), J*w^k(x_2,t)) J_{M+m}*(v_m^k(x_1,\cdot) - v_m^k(x_2,\cdot)(t)) =$$
$$= [g_j(x_1,t,w^k(x_1,t), J * w^k(x_1,t)) - g_j(x_2,t,w^k(x_1,t), J * w^k(x_1,t))] +$$
$$+ \sum_{l=1}^{M} S_{jl}(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t))(u_l^k(x_1,t) - u_l^k(x_2,t)) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{M} \Lambda_{jl}(x_2,t,w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t), J * w^k(x_2,t)) J_l * (u_l^k(x_1,\cdot) - u_l^k(x_2,\cdot)(t)) +$$
$$+ (c_j(x_1,t) - c_j(x_2,t))v_j^k(x_1,t) + (\hat{g}_j(x_1,t) - \hat{g}_j(x_2,t)), \quad j \in \{1,...,L\}. \quad (35)$$

Міркуючи аналогічно, як при доведені леми 4 і використовуючи зауваження 2, умови (**B1**)-(**B3**), (**B5**) та оцінку (30), з (35) одержимо

$$|v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t)| \leqslant C_4|x_1 - x_2|^\alpha, \quad t \in (-\infty,T], \qquad (36)$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Запишемо рівняння (27) у такому вигляді:

$$\frac{\partial v_j^k(x,t)}{\partial t} = g_j(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t)) + \hat{g}_j^k(x,t) - \\ - c_j(x,t)v_j^k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1,...,L\}. \quad (37)$$

З умови (**B2**) і оцінки (30) випливає обмеженість правої частини (37) рівномірно за $k \in \mathbb{N}$, а звідси – рівномірна обмеженість (стосовно k) похідних $\partial v_j^k/\partial t$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,...,L\}$ на Q. Отже, використовуючи теорему Лагранжа про скінченний приріст, з (34), (36), (37) та (**B2**), (**B3**) маємо, що

$$\sum_{j=1}^{L} ||v_j^k||_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \leqslant C_5, \quad (38)$$

де $C_5 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k.

Нехай $\tilde{f}_i^k(x,t) \overset{def}{=} f_i(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $i \in \{1,...,M\}$, $k \in \mathbb{N}$. З (33), (38) та (**B2**),(**B3**) отримаємо, що $||\tilde{f}_i^k||_{\alpha,\alpha/2}^{Q} \leqslant C_6$, $i \in \{1,...,M\}$, де $C_6 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k. Враховуючи це, з (32) і теореми 10.1 праці [8, с.400] одержимо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \leqslant C_7, \quad (39)$$

де $C_7 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k.

З (38) і (39) випливає, що справджується оцінка (31). Отже, з послідовності w^k (використовуючи діагональний процес) можна вибрати підпослідовність (за якою залишимо те саме позначення) таку, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ $u_i^k \underset{k\to\infty}{\to} u_i$ в $C^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m})$ і $v_j^k \underset{k\to\infty}{\to} v_j$ в $C^{\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m})$, $i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$, де $0 < \gamma < \alpha$. Приймемо $w(x,t) = \mathrm{col}\ (u_1(x,t),...,u_M(x,t), v_1(x,t),...,v_L(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Легко бачити, що знайдена вектор-функція w буде розв'язком задачі (1)-(3). З (31) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i||_{2+\alpha,1+\alpha/2}^{Q} + \sum_{j=1}^{L} ||v_j||_{\alpha,1+\alpha/2}^{Q} \leqslant C_2. \quad (40)$$

Отож, ми довели теорему у випадку $\nu = 0$.

Розглянемо задачу (1)-(3) у випадку, коли ν – довільне, $\nu < \nu_0, \nu \neq 0$. Домножимо кожне рівняння задачі на $e^{\nu t}$. В результаті одержимо

$$L_i\tilde{w}(x,t) - \tilde{f}_i^{\nu}(x,t,\tilde{w}(x,t), J * \tilde{w}(x,t)) = \hat{f}_i(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t) \in Q, \quad i \in \{1,...,M\}, \quad (41)$$

$$F_j\tilde{w}(x,t) - \tilde{g}_j^{\nu}(x,t,\tilde{w}(x,t), J * \tilde{w}(x,t)) = \hat{g}_j(x,t)e^{\nu t}, \ (x,t) \in \overline{Q}, \ j \in \{1,...,L\}, \quad (42)$$

$$\tilde{u}_i(x,t) = h_i(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i \in \{1,...,M\}, \quad (43)$$

де L_i, $i \in \{1,...,M\}$, F_j, $j \in \{1,...,L\}$ такі, як в (18) і (19), $\tilde{w}(x,t) = w(x,t)e^{\nu t}$, а функції $\tilde{f}_i^{\nu}(x,t,\xi,\eta), i \in \{1,...,M\}$, і $\tilde{g}_j^{\nu}(x,t,\xi,\eta), j \in \{1,...,L\}$ такі, як в (21) і (22) з заміною лише λ на ν. Перевірка того, що функції $\tilde{f}_i^{\nu}, \tilde{g}_j^{\nu}$, $i \in \{1,...,M\}$, $j \in$

$\{1, ..., L\}$ задовольняють умову (**A3**) та умову (**A4**) із заміною $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ відповідно на $\varphi(\nu) > 0$ і $\psi(\nu) > 0$, робиться аналогічно як у випадку для функцій з рівнянь (21) і (22). Очевидно, що функції $\hat{f}(x,t)e^{\nu t}$, $h(x,t)e^{\nu t}, \hat{g}(x,t)e^{\nu t}$ належать відповідно просторам $E_0(Q; M)$, $E_0(\Sigma; M)$ та $E_0(\overline{Q}; L)$. З вище доведеного (для $\nu = 0$) випливає, що існує розв'язок $\tilde{w}$ задачі (41)-(43) з класу $E_0(\overline{Q}; M+L)$. Отже, вектор-функція $w(x,t) = \tilde{w}(x,t)e^{-\nu t}$, $(x,t) \in Q$ належить класу $E_\nu(\overline{Q}; M+L)$ і є шуканим розв'язком задачі (1)-(3).

Доведення теореми 4. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число, а вектор-функції $\{\text{col }(\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1), \text{col }(\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2)\} \subset \Pi_\nu$ такі, що $\sup\limits_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}^1(y,s)-\hat{f}^2(y,s)|e^{\nu s}}{\varphi(\nu)} < \varepsilon$, $\sup\limits_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}^1(y,s)-\hat{g}^2(y,s)|e^{\nu s}}{\psi(\nu)} < \varepsilon$, $\sup\limits_{(y,s)\in\Sigma} |h^1(y,s) - h^2(y,s)|e^{\nu s} < \varepsilon$, а $w^i = RS_\nu(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i)$, $i \in \{1,2\}$. Використовуючи лему 5, отримаємо потрібне твердження.

---

1. *Pao C.V.* Coupled nonlinear parabolic systems with time delays // Journal of mathematical analysis and applications – 1995. – Vol.196. – P.237-265.
2. *Pao C.V.* Parabolic systems in unbounded domains. II. Equations with time delays // Journal of mathematical analysis and applications – 1998. – Vol.225. – P.557-586.
3. *Babak P.P.* The first boundary value problem for coupled diffusion systems with functional arguments // Математичні студії. – 1997. – Т.7. – N.2. – P.179-186.
4. *Babak P.P.* Coupled diffusion systems with functional arguments in unbounded domains // Математичні студії. – 1999. – Т.12. – N.1. – P.85-89.
5. *Бокало М.М., Дмитрів В.М.* Задача Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь дифузії з функціоналами // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53. – N 11. – С.1468-1481.
6. *Бокало М.М., Дмитрів В.М.* Задача Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь з функціоналами в необмежених областях // Вісник національного університету "Львівська Політехніка". Серія "Прикладна математика". – 2000. – N 411. – С.37-44.
7. *Шмулев И.И.*Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений// Матем. сборник. – 1965. – Т.66(108). – N 3.– С.398-410.
8. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

ON A FOURIER PROBLEM FOR COUPLED EVOLUTION SYSTEM OF EQUATIONS WITH INTEGRAL TIME DELAYS

Mykola Bokalo, Vasyl' Dmytriv

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Correctness (i.e. existence, uniqueness and continuous dependence on data-in of solution) of problem without initial conditions for coupled systems of parabolic-ordinary equations with integral time delays is established. Besides, apriori estimate of solution of this problem is established.

Key words: Fourier Problem, coupled system, integral time delay.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2001

Прийнята до друку 20.06.2002