ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.50–59

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.50–59

УДК 624.07:534.1

АНАЛОГ ЗАДАЧІ ЛАГРАНЖА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ СТІЙКОСТІ РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА ДВОМА МІРАМИ

Петро ДОМАНСЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано формулювання та методику розв'язування задачі оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості за двома мірами. Для дослідження стійкості використано аналог прямого методу Ляпунова для систем із розподіленими параметрами. Задачу оптимізації розв'язано методами варіаційного числення. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладі стержнів змінного поперечного перерізу, на які діють осьові стискні сили.

Ключові слова: оптимізація форми, стійкість за двома мірами.

Загальні питання формулювання та розв'язування задач оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості систематизовано в багатьох монографіях, наприклад [1–4]. У всіх цих працях вихідним є критерій Ейлера дослідження стійкості рівноваги пружних тіл. У публікаціях [5–7] розглядали питання дослідження стійкості руху пружних тіл за двома вибраними інтегральними мірами. У цій праці пропонуємо формулювання та методику дослідження задач оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості за цими двома мірами. Для розв'язування задач оптимізації використано методи варіаційного числення. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладі стержнів змінного поперечного перерізу, на які діють осьові стисні сили.

Формулювання задачі. Розглянемо лінеаризоване рівняння стійкості руху ізотропних пружних тіл [8]

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

де $\hat{P}_0^\bullet = \hat{P}_0^\bullet \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \right)$ – конвективна похідна тензора напружень Піоли-Кірхгофа; $\vec{u}_0$ – вектор переміщення з відлікової конфігурації в базову конфігурацію; $\vec{u}$ – збурення вектора переміщення в базовій конфігурації; $\vec{\nabla}_0$ – набла-оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; "$\cdot$" – операція скалярного (внутрішнього) множення; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) множення, ρ_0 – густина розподілу маси стосовно відлікової конфігурації.

На межі ∂X_0 відлікової конфігурації розглядаємо такі граничні умови:

$$\vec{u}\big|_{\partial X_1} = \vec{0}, \quad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet \Big|_{\partial X_2} = \vec{0}, \quad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet \Big|_{\partial X_3} = \vec{0}. \tag{2}$$

Тут $\vec{n}_0$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні ∂X_0, $\partial X_1 \cup \partial X_2 \cup \partial X_3 = \partial X_0$.

Задача (1), (2) має розв'язок $\vec{u} \equiv \vec{0}$. Для дослідження стійкості цього розв'язку за міри відхилення базового розв'язку від збуреного приймаємо функціонали

$$d_0\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{3}$$

$$d\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 dV_0, \tag{4}$$

означені на розв'язках $\vec{u}$ задачі (1), (2).

Означення. Розв'язок $\vec{u} \equiv \vec{0}$ називаємо стійким за мірами (3), (4), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \vec{u})\,(\forall \tau \geqslant \tau_0)\left[d_0\left[\vec{u}(\cdot,\tau_0)\right] < \delta \Rightarrow d\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] < \varepsilon\right].$$

На підставі розгляду властивостей функціонала

$$V\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right] dV_0,$$

який відіграє ту саму роль, що і функції Ляпунова для систем із зосередженими параметрами, у працях [5–7] показано, що достатньою умовою стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv \vec{0}$ задачі (1), (2) за мірами (3), (4) за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, є виконання нерівності

$$W\left[\vec{u}\right] = \int\limits_{X_0} \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 dV_0 \geqslant 0 \tag{5}$$

на збуреннях, які справджують умови (2).

Приймаємо, що у відліковій конфігурації досліджуване тіло є стержнем змінного поперечного перерізу $D(\xi^3)$, два характерних розміри якого значно менші за висоту. Положення точок осі тіла характеризуємо радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, де ξ^3 – осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant l)$, $\vec{\ni}_3^{\,0}$ – базовий орт у напрямку цієї осі. Положення довільної точки визначаємо радіусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}$, $\vec{R}_0 = \vec{R}_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^{\,0}$, $\alpha = 1, 2$, $\left(\xi^1, \xi^2\right) \in D(\xi^3)$. Подамо збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0, \tau\right)$ у вигляді розвинення

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_0^{\,i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}\left(\vec{r}_{30}, \tau\right), \tag{6}$$

де індекс (i) зазначає ранг тензорної функції, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{R}_0^{\,n}$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе, $\vec{R}_0^{\,0} \equiv 1$.

Приймемо, що у формулі (2) ∂X_1 – нижня основа стержня $(\xi^3 = 0)$, ∂X_2 – його верхня основа $(\xi^3 = l)$, ∂X_3 – бічна поверхня. Оскільки на нижній і верхній основах вектор $\vec{n}_0$ колінеарний до базового орта $\vec{\ni}_3^{\,0}$, то граничним умовам (2) відповідають такі умови на коефіцієнти $\hat{u}^{(i)}$ розвинення збурення вектора переміщення

$$\left.\hat{u}^{(i)}\right|_{\xi^3=0} = \hat{0}, \quad \left.\hat{P}_3^{(i)}\right|_{\xi^3=l} = \hat{0}, \quad (i = \overline{1, N}). \tag{7}$$

Тут $\hat{P}_3^{(i)}$ – коефіцієнти розвинення вектора $\vec{\ni}_3^0 \cdot \hat{P}_0^\bullet$ за базою $\left\{\vec{R}_0^i\right\}$. Підставимо (6) в (5). Одержимо

$$W[\vec{u}] = W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = \int_0^l F\left(\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}, \left\{\frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \xi^3}\right\}\right) d\xi^3 \geqslant 0, \tag{8}$$

де F - квадратична форма стосовно коефіцієнтів $\hat{u}^{(i)}$ розвинення (6) і їхніх похідних за ξ^3.

Отже, для виявлення умов стійкості стержня потрібно знайти ті значення параметрів навантаження, при яких виконується нерівність (8) для будь-яких наборів тензорних функцій $\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}$, що справджують граничні умови (7).

Нехай стержень зі стандартного матеріалу другого порядку перебуває під дією рівномірно розподіленого по граничних поперечних перерізах осьового стискного навантаження інтенсивності N_0. Бічну поверхню вважаємо вільною від силових навантажень. Впливом масових сил нехтуємо. Нехай область $D(\xi^3)$ має площу $S(\xi^3)$, а її моменти першого порядку і центробіжний момент дорівнюють нулеві.

Обмежимося у формулі (6) двома доданками, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_0^k$. У працях [5, 6] показано, що для стержнів зі стандартного матеріалу другого порядку при нехтуванні деформацією базової конфігурації для випадку, що розглядаємо, нерівність (8) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} W_1 = \int_0^l S(\xi^3) \Bigg\{ &\lambda\left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + \left(2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2\mu\left(u_{11}^2 + u_{22}^2\right) + \\ &+ \mu\left(u_{12} + u_{21}\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^2 \left[\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right. \\ &\left. + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] + \frac{\mu}{S} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\right)^2 \Bigg\} d\xi^3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Тут $J^{\alpha\alpha} = \int\limits_{D(\xi^3)} (\xi^\alpha)^2 \, d\xi^1 d\xi^2$ –моменти інерції області $D(\xi^3)$; λ, μ – сталі Ляме. Якщо $2\mu - N_0/S \geqslant 0$, то функціонал (9) можна оцінити знизу

$$\begin{aligned} W_1 \geqslant W_2 = \int_0^l S(\xi^3) \sum_{\alpha=1}^2 &\left[\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right. \\ &\left. + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\alpha = 1, 2$ з нерівності (10) одержуємо

$$W_3 = \int_0^l S(\xi^3) \left[\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S} u_{\alpha 3}^2 + \right.$$

$$+ \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\Bigg] d\xi^3 \geqslant 0. \tag{11}$$

З нерівності (11) знаходимо оцінку параметра силового навантаження

$$N_0 \leqslant \frac{\int\limits_0^l \left[\mu S(\xi^3)\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3}{\int\limits_0^l \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3}. \tag{12}$$

З (7) випливають такі граничні умови на функції u_α, $u_{\alpha 3}$:

$$u_\alpha|_{\xi^3=0} = 0, \quad u_{\alpha 3}|_{\xi^3=0} = 0, \quad \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)\Bigg|_{\xi^3=l} = 0, \quad \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\Bigg|_{\xi^3=l} = 0. \tag{13}$$

Зрозуміло, що критичне значення параметра навантаження $N_0^{\text{кр}}$ при відомій площі поперечного перерізу знаходимо як мінімум функціонала, який стоїть у правій частині (12), за граничних умов (13).

Очевидно, що при $u_{\alpha 3} \equiv 0$ нерівність (11) виконується для будь-яких значень параметра N_0. Тому надалі приймаємо, що $u_{\alpha 3} \neq 0$. Права частина нерівності (12) є інваріантною щодо замін вигляду $u_\alpha = k u'_\alpha$, $u_{\alpha 3} = k u'_{\alpha 3}$, де k – довільна стала; u'_α, $u'_{\alpha 3}$ – нові функції. Приймемо, що

$$\int\limits_0^l \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3 = 1. \tag{14}$$

Надалі форму поперечного перерізу тіла вважатимемо вибраною, а також приймемо, що момент інерції $J^{\alpha\alpha}$ і площа поперечного перерізу S пов'язані степеневою залежністю [1–4]

$$J^{\alpha\alpha} = a_k S^k. \tag{15}$$

У формулі (15) підсумовування за індексом k немає, a_k – стала при кожному $k = 1, 2, 3$.

Сформулюємо задачу оптимізації в такій формі: серед неперервно диференційовних функцій $u_\alpha = u_\alpha(\xi^3, \tau)$, $u_{\alpha 3} = u_{\alpha 3}(\xi^3, \tau)$ і неперервних функцій $S = S(\xi^3)$, які справджують умови (13) і співвідношення (14), (15), а також обмеження

$$\int\limits_0^l S(\xi^3) d\xi^3 = V^*, \tag{16}$$

знайти такі, які надають $\max\limits_S \min\limits_{u_\alpha, u_{\alpha 3}} \Pi[u_\alpha, u_{\alpha 3}, S]$, де

$$\Pi[u_\alpha, u_{\alpha 3}, S] = \int\limits_0^l \left[\mu S\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3, \tag{17}$$

V^* – заданий об'єм стержня.

Розв'язування задачі оптимізації. Задачу оптимізації розв'язуватимемо послідовно, тобто, спочатку дослідимо функціонал (17) на мінімум за змінними u_α, $u_{\alpha 3}$ при відповідних в'язях, а потім знаходимо максимум за змінною S.

Складемо функціонал Лагранжа

$$\Pi^* = \int\limits_0^l \left\{ \mu S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 - \right.$$
$$\left. - \lambda_1 \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] + \lambda_2 S \right\} d\xi^3, \tag{18}$$

де λ_1, λ_2 – множники Лагранжа. З необхідної умови мінімуму функціонала (18) одержуємо

$$\mu S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[a_k \left(\lambda_1 S^{k-1} - (\lambda + 2\mu) S^k \right) \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right] - \lambda_1 u_{\alpha 3} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) \right] = 0. \tag{19}$$

З першого рівняння (19) і третьої умови (13) одержуємо $u_{\alpha 3} = -\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}$. Якщо підставити цей вираз у друге рівняння (19) і результат проінтегрувати, то отримаємо

$$a_k S^{k-1} \left[(\lambda + 2\mu) S - \lambda_1 \right] \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda_1 u_\alpha = C_1, \tag{20}$$

де C_1 – стала інтегрування.

Введемо нові функції $y(\xi^3, \tau)$ і $f(\xi^3)$, які зв'язані з функціями $u_\alpha(\xi^3, \tau)$ і $S(\xi^3)$ співвідношеннями

$$u_\alpha = y + \frac{C_1}{\lambda_1}, \quad S = \frac{\lambda_1 (f + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)}. \tag{21}$$

Підставимо (21) в (20). В результаті отримаємо

$$B_{1k} f (f + a_k)^{k-1} y'' + y = 0, \quad B_{1k} = \left[\frac{\lambda_1}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right]^{k-1}. \tag{22}$$

(Для скорочення записів штрихами позначають похідні за ξ^3). Якщо врахувати (14), (15), (21), (22), а також зв'язок між функціями $u_{\alpha 3}$ і u_α, то функціонал Π^* можна записати у вигляді

$$\Pi^* = \lambda_1 \int\limits_0^l \left[\frac{y^2}{B_{1k} f (f + a_k)^{k-1}} - (y')^2 + \frac{\lambda_2 (f + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right] d\xi^3. \tag{23}$$

З необхідної умови екстремуму функціонала (23) за змінною f одержимо

$$y^2 = B_{2k} \frac{f^2 (f + a_k)^k}{a_k + kf}, \quad B_{2k} = \frac{\lambda_2 B_{1k}}{a_k (\lambda + 2\mu)}. \tag{24}$$

Підставимо y, знайдене з формули (24), в рівняння (22). В результаті одержимо диференціальне рівняння для визначення функції f

$$B_{1k}(f+a_k)^{k-1}\left\{\frac{(a_k+f)^{\frac{k}{2}-1}\left[a_k^2+a_k(k+1)f+\frac{k}{2}(k+1)f^2\right]}{a_k+kf}f''+\right. \tag{25}$$

$$\left.+\frac{k(k-1)f(a_k+f)^{\frac{k}{2}-2}\left[6a_k^2+4(k+1)a_kf+k(k+1)f^2\right]}{4(a_k+kf)^2}(f')^2\right\}+(a_k+f)^{\frac{k}{2}}=0.$$

Змінна ξ^3 в рівняння (25) явно не входить. Це дає змогу проінтегрувати це нелінійне диференціальне рівняння при будь-якому $k=1,2,3$. Зокрема, при $k=1$ рівняння (25) має вигляд

$$f''+1=0. \tag{26}$$

Якщо врахувати перші формули з (21) і (24) та розв'язати рівння (26), то одержимо

$$f(\xi^3)=-\frac{(\xi^3)^2}{2}+C_2\xi^3+C_3,\ u_\alpha=\sqrt{\frac{\lambda_2}{a_1(\lambda+2\mu)}}\left(-\frac{(\xi^3)^2}{2}+C_2\xi^3+C_3\right)+\frac{C_1}{\lambda_1}, \tag{27}$$

де C_2, C_3 – сталі інтегрування. З (13), перших формул із (21), (22) і зв'язку між функціями u_α і $u_{\alpha 3}$ одержуємо такі граничні умови:

$$u_\alpha|_{\xi^3=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3=0}=0,\quad u_\alpha|_{\xi^3=l}=\frac{C_1}{\lambda_1}. \tag{28}$$

Якщо знайти сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, врахувати другу формулу (21), справдити інтегральні обмеження (14), (16), то в результаті отримаємо шукані функції S і u_α

$$S=\frac{3V^*(-(\xi^3)^2+l^2+2a_1)}{2(l^3+3a_1l)},\quad u_\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{l^3+3a_1l}}(\xi^3)^2. \tag{29}$$

Оптимальне значення $N_0^{\text{опт}}$ критичного навантаження знайдемо з функціонала (17), якщо підставимо функції (29) і проінтегруємо. Одержимо

$$N_0^{\text{опт}}=\frac{3a_1(\lambda+2\mu)V^*}{l^3+3a_1l}.$$

Критичне значення параметра навантаження $N_0^{\text{кр}}$ при сталій площі поперечного перерізу циліндричного тіла знайдено в праці [7] і воно дорівнює

$$N_0^{\text{кр}}=\frac{(\lambda+2\mu)J^{\alpha\alpha}\pi^2}{4l^2\left(1+\frac{\pi^2J^{\alpha\alpha}}{4l^2S}\right)}=\frac{(\lambda+2\mu)a_1\pi^2V^*}{4l^3\left(1+\frac{\pi^2a_1}{4l^2}\right)}. \tag{30}$$

Не важко переконатися, що

$$\frac{N_0^{\text{опт}}}{N_0^{\text{кр}}}=\frac{12\left(1+\frac{\pi^2a_1}{4l^2}\right)}{\pi^2\left(1+\frac{3a_1}{l^2}\right)}\approx 1,216.$$

Отже, за рахунок оптимального вибору форми поперечного перерізу можна на $21,6\%$ підвищити критичне значення параметра навантаження порівняно з циліндричним тілом сталого поперечного перерізу такого самого об'єму та висоти.

Якщо в рівнянні (29) прийняти $k = 2$, то одержимо

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)f'' + 3f(a_2 + f)(f')^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \qquad (31)$$

Перейдемо до нової невідомої функції $v(f) = f'$. Тоді $f'' = \dfrac{dv}{df} f' = v'v$ і рівняння (31) набуде вигляду

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)vv' + 3f(a_2 + f)v^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \qquad (32)$$

Нехай тепер $v^2 = z(f)$. Звідси маємо $2vv' = z'$. В результаті рівняння (32) можна переписати в такій формі:

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)z' + 6f(a_2 + f)z + \frac{2(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0.$$

Розв'язком цього лінійного неоднорідного рівняння є функція

$$z = \frac{(a_2 + 2f)^2}{(3f^2 + 3a_2 f + a_2^2)^2} \left[\frac{-12f^2 + (8C_1 B_{12} - 6a_2)f + 4C_1 B_{12} a_2 + a_2^2}{4B_{12}} \right],$$

де C_1 – стала інтегрування.

Якщо повернутися до функції f, то для її визначення отримаємо диференціальні рівняння

$$\pm \frac{\sqrt{3B_{12}} \left[\left(f + \frac{a_2}{2} \right)^2 + \frac{a_2^2}{12} \right] df}{\left(f + \frac{a_2}{2} \right) \sqrt{-4\left(f + \frac{a_2}{2} \right)^2 + 8C\left(f + \frac{a_2}{2} \right) + \frac{a_2^2}{3}}} = d\xi^3, \qquad (33)$$

де $4C = a_2 + 4C_1 B_{12}/3$. Після інтегрування рівнянь (33) одержимо дві сім'ї розв'язків

$$\begin{aligned} &\mp \left[\sqrt{-3(2f + a_2)^2 + 12C(2f + a_2) + a_2^2} + 2C\sqrt{3} \arccos \frac{\sqrt{3}(2f + a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \\ &\left. + a_2 \ln \left| \frac{a_2^2 + 6C(2f + a_2) + a_2\sqrt{-3(2f + a_2)^2 + 12C(2f + a_2) + a_2^2}}{2f + a_2} \right| \right] = \\ &= \frac{4\xi^3}{\sqrt{B_{12}}} + C_\mp, \end{aligned} \qquad (34)$$

які визначають f як неявно задану функцію від ξ^3 на відрізку $[0, l]$. Через $C_\mp$ позначено сталі інтегрування, які відповідають різним сім'ям. З формули (33) видно, що одна з цих сімей визначає f як монотонно зростаючу функцію (знак "$-$" у формулі (34)), а друга – як монотонно спадну функцію (знак "$+$" у формулі (34))на відрізку $[0, l]$. З перших формул (21) і (24) та другої і третьої умов (28) випливають такі граничні умови для функції f:

$$f'(0) = 0, \quad f(l) = 0. \qquad (35)$$

Зрозуміло, що для того щоб справдити такі граничні умови, треба вибрати f монотонно спадною функцією , тобто вибрати знак "+" у формулі (34).

Перейдемо до визначення рівнянь, з яких можна визначити сталі інтегрування C, C_+ та множники Лагранжа λ_1, λ_2.

Приймемо в (34) $\xi^3 = l$ і врахуємо другу умову з (35). В результаті отримаємо

$$\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} +$$
$$+a_2\ln\left|a_2 + 6C + \sqrt{12a_2C - 2a_2^2}\right| = \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}} + C_+. \tag{36}$$

З першої умови (35) і (33) знаходимо

$$2f(0) + a_2 = 2C + \sqrt{4C^2 + a_2^2/3}. \tag{37}$$

Якщо в (34) прийняти $\xi^3 = 0$ і врахувати (37), то одержимо

$$C_+ = a_2\ln\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}. \tag{38}$$

Підставимо (38) в (36). В результаті отримаємо перше з шуканих рівнянь

$$\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} +$$
$$+a_2\ln\left|\frac{a_2 + 6C + \sqrt{12a_2C - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}}\right| = \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}}. \tag{39}$$

Проведемо параметризацію функції f на відрізку $[0, l]$. Приймемо

$$f = C - \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{12C^2 + a_2^2}}{2\sqrt{3}}\cos t. \tag{40}$$

Тоді з (34) отримаємо

$$\xi^3 = \frac{\sqrt{B_{12}}}{4}\Bigg[- C_+ + \sqrt{12C^2 + a_2^2}\sin t + 2C\sqrt{3}t +$$
$$+ a_2\ln\left|\frac{3\sqrt{12C^2 + a_2^2}\left(2C\sin t - \frac{a_2}{\sqrt{3}}\cos t\right)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}\sin t - a_2}\right|\Bigg]. \tag{41}$$

З формул (40) і (37) випливає, що при $x = 0$ і $t = 0$. З умови $f(l) = 0$ і формули (40) знаходимо, що при $x = l$ $t = \arccos\dfrac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} = t_1$. Отже, формули (40), (41) задають параметрично задану функцію f від ξ^3. Параметр t змінюється на відрізку $[0, t_1]$. Використовуючи формули (21), (24), (40), легко записати параметричне задання функцій S та u_α

$$S = B_{12}\left(C + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{12C^2 + a_2^2}}{2\sqrt{3}}\right)\cos t, \quad t \in [0, t_1], \tag{42}$$

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} B_{12} \frac{C^2 - \frac{a_2^2}{4} + \frac{C\sqrt{12C^2+a_2^2}}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{12C^2+a_2^2}{12}\cos^2 t}{\left(2C + \frac{\sqrt{12C^2+a_2^2}}{\sqrt{3}}\cos t\right)^{1/2}}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{43}$$

Зрозуміло, що ξ^3 визначається формулою (41). Якщо використати параметричне задання функцій S та u_α за допомогою (42), (43), (41), то ізопереметричні умови (14), (16) після інтегрування і відповідних перетворень можна привести до вигляду

$$\frac{\lambda_2 B_{12}^{3/2}}{32\lambda_1}\left[\sqrt{3}(3a_2^2 + 8a_2C + 12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{44}$$

$$\left. +(7a_2 + 6C)\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 4(a_2^2 - 3a_2C)\ln\left|\frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}}\right|\right] = 1,$$

$$\frac{B_{12}^{3/2}}{16}\left[\sqrt{3}(a_2^2 + 4a_2C + 12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{45}$$

$$\left. +3(a_2 + 2C)\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 2a_2^2\ln\left|\frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}}\right|\right] = V^*,$$

а з функціонала (17) одержимо формулу для обчислення оптимального значення $N_0^{\text{опт}}$ критичного навантаження

$$N_0^{\text{опт}} = \frac{a_2(\lambda + 2\mu)B_{12}^{5/2}\lambda_2}{32\lambda_1}\left[\sqrt{3}(3a_2^2 + 8a_2C + 12C^2)\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{46}$$

$$\left. +(7a_2 + 6C)\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 4(a_2^2 - 3a_2C)\ln\left|\frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}}\right|\right].$$

Підставимо (44) в (46). Одержимо

$$N_0^{\text{опт}} = a_2(\lambda + 2\mu)B_{12}. \tag{47}$$

Рівняння (39), (45) варто розглядати як вихідні для визначення невідомих C та $\sqrt{B_{12}}$ при заданих геометричних характеристиках l та V^*. Зауважимо, що $a_2 = 1/4\pi$. Підставивши знайдені з цих рівнянь зазначені невідомі у формули (41), (42), одержимо параметричне задання оптимальної площі поперечного перерізу, а з (47) отримаємо числове значення $N_0^{\text{опт}}$.

Числові обчислення проводили на ПК для $l = 10, 20, ..., 100$, $V^* = \pi l$. Обчислювали такі величини: C, $\sqrt{B_{12}}$, λ_2/λ_1, $k = N_0^{\text{опт}}/N_0^{\text{кр}}$. Значення $N_0^{\text{кр}}$ знаходили з формули (30). Наведемо для прикладу деякі одержані дані

при $l = 20$ – $C = 25,8277$, $\sqrt{B_{12}} = 0,2846$, $k = 1,3370$;

при $l = 60$ – $C = 232,2376$, $\sqrt{B_{12}} = 0,09496$, $k = 1,3337$;

при $l = 100$ – $C = 645,0572$, $\sqrt{B_{12}} = 0,0569$, $k = 1,3335$.

Обчислення показали, що за рахунок вибору оптимальної форми можна більше ніж на 33% підвищити критичне значення параметра навантаження порівняно зі стержнем сталого поперечного перерізу такої самої висоти й об'єму.

1. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М., 1986.
2. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. – М., 1980.
3. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. – М., 1981.
4. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. – М., 1982.
5. *Доманський П.П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. – N 3. – С. 29–36.
6. *Доманський П.П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл з допомогою методів варіаційного числення // Доп. НАН України. – 2000. – N9. – С. 58–64.
7. *Бурак Я.И., Доманский П.П., Ардан Р.В.* Устойчивость по двум мерам сжатых осевыми силами упругих цилиндрических тел // Прикладная механика. – 2000. - Т. 36. – N8. – С. 79–86.
8. *Доманський П.П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. – 1997. – N6. – С. 53–59.

ANALOG OF LAGRANGIAN PROBLEM IN STUDING OF MOTION STABILITY OF ELASTIC BODIES IN TWO MEASURES

Petro Domans'kyj

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A problem definition and strategy of resolving the problem of optimization the elastic bodies forms under investigating their stability for two measures is proposed. The counterpart of the Lyapunov direct method for systems with distributed parameters is applying. The optimization problem is solved by the variational calculus methods.

The obtained results are illustrated on the examples of pivots with varying cross sections which are affected by axial contractive forces.

Key words: form optimization, stability in two measures.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2001
Прийнята до друку 20.06.2002