ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.60–66

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.60–66

УДК 517.927:519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО СТАРШИХ ПОХІДНИХ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано умови однозначної розв'язності двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь $x'' = f(t, x, x', x'')$ з неперервною функцією f і лінійними крайовими умовами. Досліджено асимптотичну поведінку при $t \to \infty$ адитивних функціоналів від стохастичних еволюцій, побудованих на траєкторії напівмарківського процесу зі скінченною множиною станів за допомогою розв'язків крайових задач для систем вигляду $x'' = f(t, x, x', x'')$ та задач Коші для систем вигляду $x' = f(t, x, x')$.

Ключові слова: випадкова еволюція, адитивний функціонал, напівмарківський процес, асимптотична поведінка, звичайні диференціальні рівняння.

Відомо, що загальна ергодична теорія описує умови, за яких майже напевне часові середні випадкової еволюції збігаються при $t \to \infty$ до середніх просторових. Ергодичну теорему для процесів з дискретним втручанням випадку довів А.В.Скороход [1, с.362]. В.М.Шуренков довів ергодичну теорему для процесів з марківським втручанням випадку при мінімальних обмеженнях на випадковий процес [2, с.230]. Застосування цих ергодичних теорем для дослідження конкретних класів випадкових процесів вимагає перевірки, чи вони є процесами з дискретним втручанням випадку, чи іноді є марківськими процесами, чи виконуються для них умови, за яких часові середні мають вироджений граничний розподіл. Дослідженню саме таких питань для випадкових еволюцій, що описуються розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, присвячена ця праця.

У багатьох випадках на явища, які описують звичайними диференціальними рівняннями, впливає велика кількість зовнішніх випадкових факторів, які змінюють сам вигляд рівняння. Пояснимо цю тезу на конкретних прикладах.

Розглянемо роботу технічного пристрою, який може працювати в різних режимах, причому перемикання з одного режиму на інший відбувається у випадкові моменти часу. Якщо під час роботи в різних режимах задіяні різні вузли пристрою або після перемикання значно змінюються основні параметри, що характеризують його роботу, то очевидно, що диниміка цих параметрів у різних режимах описуватиметься системами звичайних диференціальних рівнянь (найчастіше першого або другого порядку) з різними правими частинами.

Зазначимо, що існуючі математичні моделі природних процесів здебільшого спрощено відображають дійсність, не враховуючи дію випадкових факторів, тому придатні для опису реальних процесів лише протягом обмеженого часу. Наприклад, процеси розмноження або вимирання популяцій в умовах існування різних видів тварин у ситуації "хижак–жертва" [3, с.25-26], зокрема, якщо розглядають кілька співіснуючих видів великих і малих риб, причому малі риби є кормом для великих, описують системою диференціальних рівнянь вигляду $x'(t) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$. Праві частини цієї системи $f_i(x_1, \dots, x_n)$ одержані на підставі певних гіпотез щодо залежності народжуваності та смертності представників цього виду тварин від чисельності $x_1(t), \dots, x_n(t)$ всіх видів і можуть адекватно відображати реальні процеси лише за певних обмежень на значення x_i $(a \leqslant x_i \leqslant b)$ (див., наприклад, [4, с.13, 90]). В результаті міграції певних видів риб або їх активного промислового вилову у деякі випадкові моменти часу може значно змінюватись чисельність окремих видів і навіть можуть виникати нові види риб, що, очевидно, може призвести не лише до зміни вигляду функцій $f_i(x_1, \dots, x_n)$, а й до зміни кількості шуканих функцій $x_i(t)$.

Наведемо ще один приклад впливу зовнішніх випадкових факторів на зміну вигляду диференціальних рівнянь. Відомі три моделі ведення бойових дій [3, с.35], які є системою двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку стосовно функцій $x(t)$, $y(t)$ – кількісного складу противників з різними правими частинами відповідно для випадків бойових дій: 1) між регулярними військовими частинами; 2) між партизанськими з'єднаннями; 3) для змішаного типу бойових дій, в яких беруть участь як регулярні частини, так і партизанські з'єднання. Очевидно, що в реальних умовах ведення війни у деякі випадкові моменти часу можуть виникати ситуації, коли в результаті зміни місць дислокації регулярних або партизанських з'єднань склад воюючих сторін змінюватиметься, внаслідок чого процес буде переходити з одного стану в інший з відповідною зміною вигляду системи диференціальних рівнянь.

Трактуючи описані вище процеси як випадкові блукання по множині станів, з невеликим ступенем ідеалізації їх можна вважати напівмарківськими [5] зі скінченною множиною станів та неперервним часом. Для вивчення реальних процесів важливо знайти асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх значень основних параметрів процесу $x_i(t)$ (наприклад, у моделях математичної екології це – асимптотичні середні числа індивідуумів різних видів [4, с.59]). З метою знаходження таких асимптотик у цій праці на підставі розв'язків крайових задач та задач Коші відповідно для систем звичайних диференціальних рівнянь другого та першого порядку на траєкторії напівмарківського процесу зі скінченною множиною станів побудовано випадкові еволюції, які є процесами з марківським втручанням випадку [1]. Для збільшення загальності моделі розглядають звичайні диференціальні рівняння, частково розв'язані стосовно старших похідних, частковим випадком яких є загальновідомі рівняння нормального вигляду (розв'язані стосовно старших похідних). Оскільки дослідження коректності випадкової еволюції проводять на основі теорем існування та єдиності розв'язків крайових задач і задач Коші, то в цій праці використано деякі результати статті [6], а також, як допоміжне твердження, визначено умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для системи $x'' = f(t, x, x', x'')$ з лінійними крайовими умовами загального вигляду.

1. Умови однозначної розв'язності крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь $x'' = f(t, x, x', x'')$. Для системи рівнянь

$$x''(t) = f(t, x, x', x''), \qquad t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

з неперервною векторною функцією $f : I \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ розглянемо крайову задачу

$$\nu_i\big(x(a), x(b), x'(a), x'(b)\big) \equiv A_{i1}x(a) + A_{i2}x'(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}x'(b) = c_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

де $c_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$, A_{ik} і B_{ik} $(i, k = 1, 2)$ – дійсні $n \times n$-матриці такі, що крайова задача

$$x''(t) = 0, \quad t \in I; \quad \nu_i\big(x(a), x(b), x'(a), x'(b)\big) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G(t, s)$ матрицю Гріна задачі (3) і приймемо

$$g_0 = \max_{t \in I} \int\limits_a^b |G(t, s)|\, ds, \quad g_1 = \max_{t \in I} \int\limits_a^b \left| \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} \right| ds \quad \left(|G| = \left(\sum_{i,j=1}^n G_{ij}^2 \right)^{1/2} \right).$$

Розглянемо узагальнення теореми 3 праці [6].

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x, y, z)$ неперервна для $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ і задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f(t, x, y, z) - f(t, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})| \leqslant L_0|x - \overline{x}| + L_1|y - \overline{y}| + L_2|z - \overline{z}| \tag{4}$$

із сталими Ліпшиця $L_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ такими, що $0 < L_0 g_0 + L_1 g_1 + L_2 < 1$. Тоді крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок.

Доведення. Крайова задача (1), (2) еквівалентна рівнянню

$$x(t) = \tilde{x}_0(t) + \int\limits_a^b G(t, s) f\big(s, x(s), x'(s), x''(s)\big)\, ds.$$

де $\tilde{x}_0(t)$ – лінійна векторна функція, яка залежить від A_{ik}, B_{ik}, c_i $(i, k = 1, 2)$. Розглянемо $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I$, які мають неперервні другі похідні та норму

$$\|h\| = \max\big(g_1 \max_{t \in I} |h(t)|, \;\; g_0 \max_{t \in I} |h'(t)|, \;\; g_0 g_1 \max_{t \in I} |h''(t)|\big).$$

Для фіксованого $0 < R < \infty$ візьмемо в кулі $\|h\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), h''(t)\big)$, який задовольняє умови (2). Визначимо в кулі $\|h\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$. Тоді

$$x(t) = \tilde{x}_0(t) + \int\limits_a^b G(t, s) f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\, ds \tag{5}$$

і $\forall\, t \in I$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leqslant \tilde{p}_0 + g_0 \max_{s \in I} \big|f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\big|; \\ |x'(t)| &\leqslant \tilde{p}_1 + g_1 \max_{s \in I} \big|f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\big|, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\tilde{p}_0 = \max_{t\in I}|\tilde{x}_0(t)|, \qquad \tilde{p}_1 = \max_{t\in I}|\tilde{x}_0'(t)|.$$

Нехай $x_0 = T_0(0)$ і $|f(t,0,0,0)| \leqslant M$, тоді з (6) при $h \equiv 0$ отримуємо

$$|x_0(t)| \leqslant \tilde{p}_0 + Mg_0, \quad |x_0'(t)| \leqslant \tilde{p}_1 + Mg_1, \quad |x_0''(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in I.$$

Отже, норма функції $x_0(t) = T_0(0) \in \mathbb{B}$ задовольняє нерівність

$$\|T_0(0)\| \leqslant \tilde{p}_0 g_1 + \tilde{p}_1 g_0 + g_0 g_1 M.$$

Нехай $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$ для довільних h_1, $h_2 \in \mathbb{B}$, тоді згідно з (4)–(6) маємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant g_0 H, \quad |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant g_1 H, \quad |x_1''(t) - x_2''(t)| \leqslant H \quad \forall\, t \in I,$$

де

$$H = L_0 \max_{t\in I}|h_1 - h_2| + L_1 \max_{t\in I}|h_1' - h_2'| + L_2 \max_{t\in I}|h_1'' - h_2''|.$$

Якщо ці три нерівності домножити відповідно на g_1, g_0 і g_0g_1, то одержимо оцінку

$$\|T_0(h_1) - T_0(h_2)\| \leqslant (L_0g_0 + L_1g_1 + L_2)\|h_1 - h_2\|.$$

Оскільки $0 < L_0g_0 + L_1g_1 + L_2 < 1$, то для виконання умов принципу стискаючих відображень (теорема 0.1 [7, с.475]) достатньо взяти R, що задовольняє нерівність

$$\tilde{p}_0 g_1 + \tilde{p}_1 g_0 + g_0 g_1 M \leqslant R\big[1 - (L_0g_0 + L_1g_1 + L_2)\big].$$

Теорему доведено.

2. Випадкові еволюції, які будують за допомогою розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо напівмарківський процес $z(t)$ із скінченною множиною станів $\{1, 2, \ldots, m\}$ та неперервним часом. Позначимо через $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моменти послідовних стрибків процесу, тобто

$$\tau = \inf\{t > 0 : \; z(t) \neq z(0)\}; \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : \; z(t) \neq z(\tau_1)\}; \ldots;$$
$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : \; z(t) \neq z(\tau_{k-1})\}; \ldots.$$

Вкладений однорідний ланцюг Маркова $z(\tau_0)$, $z(\tau_1)$, $\ldots$, $z(\tau_k), \ldots$ вважатимемо нерозкладним [8, гл.12] з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$ таким, що

$$\sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij} = p_j, \quad j = \overline{1, m},$$

де $p_{ij} = P\{z(\tau_1) = j \,/\, z(\tau_0) = i\}$ – перехідні ймовірності ланцюга Маркова.

Розглянемо m систем звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s''(t) = f_s(t, x_s, x_s', x_s''), \quad t \in I_s = [0, t_s] \subset \mathbb{R}, \quad s = \overline{1, m}, \tag{7}$$

з неперервними векторними функціями $f_s : I_s \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &\nu_i^{(s)}\big(x_s(0), x_s(t_s), x_s'(0), x_s'(t_s)\big) \equiv \\ &\equiv A_{i1}^{(s)} x_s(0) + A_{i2}^{(s)} x_s'(0) + B_{i1}^{(s)} x_s(t_s) + B_{i2}^{(s)} x_s'(t_s) = c_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \quad s = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут для всіх $s=\overline{1,m}$ $c_i^{(s)}\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,2)$, $A_{ik}^{(s)}$ і $B_{ik}^{(s)}$ $(i,k=1,2)$ – дійсні $n\times n$–матриці такі, що кожна з однорідних крайових задач

$$x_s''(t)=0,\quad t\in I_s;\quad \nu_i^{(s)}\big(x_s(0),x_s(t_s),x_s'(0),x_s'(t_s)\big)=0,\quad i=1,2,\quad s=\overline{1,m}\quad (9)$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G_s(t,\xi)$ $(s=\overline{1,m})$ матрицю Гріна відповідної s–ої крайової задачі (9) і приймемо

$$g_{0s}=\max_{t\in I_s}\int_0^{t_s}|G_s(t,\xi)|\,d\xi,\quad g_{1s}=\max_{t\in I_s}\int_0^{t_s}\left|\frac{\partial G_s(t,\xi)}{\partial t}\right|d\xi,\quad s=\overline{1,m}.$$

Припускаючи, що кожна з крайових задач (7), (8) має єдиний розв'язок, побудуємо стохастичну еволюцію на траєкторії напівмарківського процесу $z(t)$ у вигляді

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases} x_i(t), & \text{якщо } 0\leqslant t<\tau_1,\quad z(0)=i;\\ x_j(t-\tau_1), & \text{якщо } \tau_1\leqslant t<\tau_2,\quad z(\tau_1)=j;\\ \cdots\cdots\cdots & \\ x_s(t-\tau_k), & \text{якщо } \tau_k\leqslant t<\tau_{k+1},\quad z(\tau_k)=s;\\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}\quad (10)$$

де $x_s(t)$, $t\in I_s$ $(s=\overline{1,m})$ – розв'язок s–ої крайової задачі (7), (8). Очевидно, що випадкова еволюція $\tilde{x}(t)$ є процесом з марківським втручанням випадку τ [1].

Для коректної визначеності еволюції $\tilde{x}(t)$ необхідно вважати, що $P\{\tau_1\leqslant t_i/\,z(0)=i\}=1$ для всіх $i=\overline{1,m}$.

Цілком правомірно розглянути поведінку при $t\to\infty$ адитивного функціонала

$$\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{x}(u)du,$$

який визначає середнє значення випадкової еволюції $\tilde{x}(u)$ на проміжку часу $[0,t]$.

Теорема 2. *Нехай функції $f_s(t,x,y,z)$ $(s=\overline{1,m})$ неперервні відповідно для $(t,x,y,z)\in I_s\times\mathbb{R}^{3n}$ і кожна з них задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f_s(t,x,y,z)-f_s(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})|\leqslant L_{0s}|x-\overline{x}|+L_{1s}|y-\overline{y}|+L_{2s}|z-\overline{z}|,\quad s=\overline{1,m}$$

зі сталими L_{0s}, L_{1s}, $L_{2s}>0$ $(s=\overline{1,m})$ такими, що $0<L_{0s}g_{0s}+L_{1s}g_{1s}+L_{2s}<1$, $s=\overline{1,m}$. Нехай напівмарківський процес $z(t)$ – нерозкладний, з єдиним стаціонарним розподілом $p_1,p_2,\ldots,p_m$ і $\tilde{x}(t)$ – стохастична еволюція вигляду (10), де $x_s(t)$, $t\in I_s$ $(s=\overline{1,m})$ – розв'язок s-ої крайової задачі (7), (8), причому час перебування в стані i зосереджений на I_i. Тоді для всіх $s=\overline{1,m}$

$$P_s\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\tilde{x}(u)du=\frac{\sum\limits_{i=1}^m p_iE_i\int\limits_0^{\tau_1}x_i(u)du}{\sum\limits_{i=1}^m p_iE_i\tau_1}\right\}=1,\quad (11)$$

де P_i – умовна ймовірність за умови, що $z(0)=i$, E_i – умовне математичне сподівання за умови, що $z(0)=i$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що умови щодо функцій $f_s(t,x,y,z)$ $(s=\overline{1,m})$ забезпечують згідно з теоремою 1 однозначну розв'язність кожної з крайових задач (7), (8), а, отже, й коректну визначеність еволюції $\tilde{x}(t)$. Для доведення теореми необхідно перевірити виконання умов загальної ергодичної теореми для процесів з марківським втручанням випадку (теорема 2 [1, с.362]).

Згідно з нашими припущеннями $P_i\{\tau_1 \leqslant t_i\} = 1$ для всіх $i = \overline{1,m}$, тому $E_i\tau_1 < \infty$ $(i = \overline{1,m})$, і, отже,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E_i \tau_1 < \infty.$$

Оскільки $x_i(t)$ – обмежений розв'язок на I_i $(i = \overline{1,m})$, то

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^{\infty} P_i\{\tau_1 < t\} x_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du < \infty.$$

Отже, всі умови згаданої вище теореми 2 [1, с.362] виконуються, тому для всіх $i = \overline{1,m}$ з ймовірністю $P_i = 1$ існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i \int\limits_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i \tau_1},$$

значення якої не залежить від початкового стану $z(0) = i$ напівмарківського процесу. Теорему доведено.

Аналогічні міркування можна провести, будуючи стохастичну еволюцію вигляду (10) за допомогою розв'язків $x_s(t)$, m систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s, x_s'), \quad t \in I_s, \quad s = \overline{1,m} \tag{12}$$

з неперервними векторними функціями $f_s : I_s \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ та початковими умовами

$$x_s(0) = x_0^{(s)}, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{13}$$

де $x_0^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ – задане початкове значення $x_s(t)$.

Теорема 3. *Нехай функції $f_s(t, x, y)$ $(s = \overline{1,m})$ неперервні відповідно для $(t, x, y) \in I_s \times \mathbb{R}^{2n}$ і кожна з них задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f_s(t, x, y) - f_s(t, \overline{x}, \overline{y})| \leqslant L_{0s}|x - \overline{x}| + L_{1s}|y - \overline{y}|, \quad s = \overline{1,m}$$

зі сталими L_{0s}, $L_{1s} > 0$ $(s = \overline{1,m})$ такими, що $0 < L_{0s}t_s + L_{1s} < 1$, $s = \overline{1,m}$. Нехай напівмарківський процес $z(t)$ – нерозкладний, з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$ і $\tilde{x}(t)$ – стохастична еволюція вигляду (10), де $x_s(t)$, $t \in I_s$ $(s = \overline{1,m})$ – розв'язок s-ої задачі Коші (12), (13), причому час перебування в стані i зосереджений на I_i. Тоді для всіх $s = \overline{1,m}$ виконуються рівності (11).

Доведення. Згідно з теоремою 1 [6] існує єдиний розв'язок $x_s(t)$ кожної з задач Коші (12), (13). Далі так само, як у доведенні теореми 2 перевіряємо виконання умов теореми 2 [1, с.362].

---

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. – М., 1973. – Т.2.

2. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. – М., 1989.

3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М., 1987.

4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976.

5. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1990.

6. *Жерновий Ю.В.* Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.80–90.

7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.

8. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М., 1986.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF STOCHASTIC EVOLUTIONS DESCRIBED BY THE SOLUTIONS OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER DERIVATIVES

Yaroslav Yeleyko, Yuriy Zhernovyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Conditions of unique solvability of the two-point boundary problem for the system of ordinary differential equations $x'' = f(t, x, x', x'')$ with a continuous function f and linear boundary conditions are obtained. Asymptotic behavoir for $t \to \infty$ of the additive functionals on the stochastic evolutions constructed on the trajectory of the semi-Markov process with the finite set of states with the help of solutions of the boundary problems for the systems of the form $x'' = f(t, x, x', x'')$ and the Cauchy problems for the systems of the form $x' = f(t, x, x')$ is examined.

Key words: stochastic evolution, additive functional, semi-Markov process, asymptotic behavior, ordinary differential equations.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2001
Прийнята до друку 20.06.2002