ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.67–76

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.67–76

УДК 517.927

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО ПОХІДНИХ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

За допомогою відомих умов розв'язності крайових задач для системи рівнянь $x'' = F(t, x, x', x'')$, а також методу верхніх і нижніх функцій одержано умови існування розв'язків крайових задач для системи $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ з неперервними функціями h, f і лінійними крайовими умовами.

Ключові слова: система звичайних диференціальних рівнянь, умови розв'язності, метод верхніх і нижніх функцій.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної вивчали в [1-4]. У цій праці для дослідження розв'язності системи двох звичайних диференціальних рівнянь $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ з лінійними двоточковими крайовими умовами використано умови існування розв'язків деяких двоточкових крайових задач для системи диференціальних рівнянь $x'' = F(t, x, x', x'')$ [3], а також узагальнено метод верхніх і нижніх функцій, який в [5, гл.4] застосували для вивчення двоточкових крайових задач для системи $x' = h(t, x, y)$, $y' = f(t, x, y)$.

1. Задача з лінійними крайовими умовами загального вигляду. Для системи рівнянь

$$x'(t) = h(t, x, y, x', y'), \quad y'(t) = f(t, x, y, x', y'), \quad t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

з неперервними функціями h, $f : I \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ розглянемо крайову задачу

$$\nu_i\big(x(a), y(a), x(b), y(b)\big) \equiv A_{i1}x(a) + A_{i2}y(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}y(b) = c_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

де $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, A_{ik}, $B_{ik} \in \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$, причому $(A_{11}+B_{11})(A_{22}+B_{22})-(A_{21}+$ $+B_{21})(A_{12} + B_{12}) \neq 0$. Крайова задача для системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$z_i''(t) = 0, \quad t \in I, \quad \nu_i\big(z_1'(a), z_2'(a), z_1'(b), z_2'(b)\big) = 0, \quad i = 1, 2, \\ z_1(a) = z_2(a) = 0 \tag{3}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G(t,s)$ матрицю Гріна задачі (3) і приймемо

$$\tilde{h} = \max_{t\in I} \int_a^b \left| \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \right| ds \quad \left(|G| = \left(\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}^2 \right)^{1/2} \right).$$

Ввівши позначення $g = (h, f)$, $\xi = (x, y)$, $\eta = (x', y')$, одержимо векторний запис системи (1) $\quad \xi' = g(t, \xi, \xi')$.

Теорема 1. *Нехай функція $g(t,\xi,\eta)$ неперервна для $(t,\xi,\eta) \in I \times \mathbb{R}^4$, задовольняє умову Ліпшиця стосовно змінної η $\quad |g(t,\xi,\eta_1) - g(t,\xi,\eta_2)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$ зі сталою Ліпшиця $L \in (0,1)$, і нехай існують сталі L_0, $\tilde{L} \geqslant 0$ такі, що $|g(t,\xi,0)| \leqslant L_0 + \tilde{L}|\xi|$*
$\forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^2$, причому $0 < \tilde{L}\tilde{h} + L < 1$. Тоді крайова задача (1), (2) має хоча б один розв'язок.

Доведення. Виконання умов теореми 1 гарантує згідно з теоремою 1 [3] існування розв'язку крайової задачі

$$z''(t) = g(t, z', z''), \quad t \in I, \quad \nu_i\big(z_1'(a), z_2'(a), z_1'(b), z_2'(b)\big) = c_i, \quad i = 1, 2, \\ z_1(a) = z_2(a) = 0, \tag{4}$$

де $z = (z_1, z_2)$. Тому, припустивши, що не існує жодного розв'язку задачі (1), (2), прийдемо до суперечності, оскільки зв'язок між розв'язками крайових задач (4) та (1), (2) виражається співвідношеннями

$$z_1(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau, \quad z_2(t) = \int_a^t y(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. В (3) замість умов $z_1(a) = z_2(a) = 0$ можна розглядати інші варіанти крайових умов: 1) $z_1(a) = z_2(b) = 0$; 2) $z_1(b) = z_2(b) = 0$; 3) $z_1(b) = z_2(a) = 0$. Відповідно в доведенні теореми 1 співвідношення (5) треба замінити на інші, наприклад, у випадку 1) на такі:

$$z_1(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau, \quad z_2(t) = -\int_t^b y(\tau)\, d\tau.$$

2. Метод верхніх і нижніх функцій для системи (1). Для системи (1) розглянемо крайову задачу

$$l_0\big(x(a), y(a)\big) \equiv a_0 x(a) - b_0 y(a) - A = 0, \quad l_1\big(x(b), y(b)\big) \equiv a_1 x(b) + b_1 y(b) - B = 0, \tag{6}$$

де a_0, b_0, a_1, b_1, A, $B \in \mathbb{R}$, a_i, $b_i \geqslant 0$, $a_i + b_i > 0$, $(i = 0, 1)$. Оскільки крайова задача (1), (6) – це частковий випадок задачі (1), (2), то як наслідок з теореми 1 отримаємо таке допоміжне твердження.

Лема. *Якщо функція* $g(t,\xi,\eta) = \big(h(t,\xi,\eta), f(t,\xi,\eta)\big)$ *неперервна і обмежена для* $(t,\xi,\eta) \in I \times \mathbb{R}^4$ *і задовольняє умову Ліпшиця стосовно* η *зі сталою* $L \in (0,1)$, *то крайова задача (1), (6) має хоча б один розв'язок.*

Далі для скорочення казатимемо, що функція $g(t,\xi,\eta)$ задовольняє умову (L), якщо $g(t,\xi,\eta)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця стосовно η зі сталою $L \in (0,1)$.

Теорема 2. *Нехай функція* $g(t,\xi,\eta)$ *задовольняє умову* (L) *і нехай існують функції* α, β, u, $v \in C^1(I)$, φ, ψ, λ_x, μ_x, λ_y, μ_y, u_1, $v_1 \in C(I)$ *такі, що для будь-якого* $t \in I$

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;
2) $\alpha'(t) = h\big(t, \alpha(t), u(t), \alpha'(t), u_1(t)\big)$, $\quad u'(t) \geqslant f\big(t, \alpha(t), u(t), \alpha'(t), w(t)\big)$,
$\beta'(t) = h\big(t, \beta(t), v(t), \beta'(t), v_1(t)\big)$, $\quad v'(t) \leqslant f\big(t, \beta(t), v(t), \beta'(t), w(t)\big)$
$\forall\, w(t) \in C(I) : \lambda_y(t) \leqslant w(t) \leqslant \mu_y(t)$;
3) $l_0\big(\alpha(a), u(a)\big) \leqslant 0 \leqslant l_0\big(\beta(a), v(a)\big)$, $\quad l_1\big(\alpha(b), u(b)\big) \leqslant 0 \leqslant l_1\big(\beta(b), v(b)\big)$;
4) *для будь-яких* y_1, $y_2 \in \big[\varphi(t), \psi(t)\big]$ *з умови* $y_1 > y_2$ *випливає, що*
$h\big(t, \alpha(t), y_1, \alpha'(t), u_1(t)\big) > h\big(t, \alpha(t), y_2, w_x(t), w_y(t)\big)$,
$h\big(t, \beta(t), y_1, \beta'(t), v_1(t)\big) > h\big(t, \beta(t), y_2, w_x(t), w_y(t)\big)$
$\forall\, w_x$, $w_y \in C(I)$, $w_x(t) \in \big[\lambda_x(t), \mu_x(t)\big]$, $w_y(t) \in \big[\lambda_y(t), \mu_y(t)\big]$,
5) $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \lambda_x(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\quad \lambda_y(t) \leqslant \mu_y(t)$;
6) $\varphi(t) \leqslant u(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \lambda_x(t) \leqslant \alpha'(t) \leqslant \mu_x(t)$,
$\lambda_y(t) \leqslant \beta'(t) \leqslant \mu_y(t)$;
7) *для будь-яких* x, $y \in C^1(I)$ *з умов* $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$,

$$x'(t) = h\big(t, x(t), \delta\big(\varphi(t), y(t), \psi(t)\big), \delta\big(\lambda_x(t), x'(t), \mu_x(t)\big), \delta\big(\lambda_y(t), y'(t), \mu_y(t)\big)\big) + \\ + \delta\big(0, y(t) - \psi(t), 1\big) - \delta\big(0, \varphi(t) - y(t), 1\big),$$

$$y'(t) = f\big(t, x(t), \delta\big(\varphi(t), y(t), \psi(t)\big), \delta\big(\lambda_x(t), x'(t), \mu_x(t)\big), \delta\big(\lambda_y(t), y'(t), \mu_y(t)\big)\big),$$

де

$$\delta(x,y,z) = \begin{cases} x, & y < x, \\ y, & x \leqslant y \leqslant z, \\ z, & z < y \end{cases}$$

випливає, що $\varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall t \in I$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $\big(x(t), y(t)\big)$ *задачі (1), (6) і для нього є оцінки* $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$, $\varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall$ $t \in I$.

Доведення. Визначимо для $(t, x, y, x', y') \in I \times \mathbb{R}^4$ функції

$$H(t, x, y, x', y') =$$
$$= h\big(t, \delta\big(\alpha(t), x(t), \beta(t)\big), \delta\big(\varphi(t), y(t), \psi(t)\big), \delta\big(\lambda_x(t), x'(t), \mu_x(t)\big), \delta\big(\lambda_y(t), y', \mu_y(t)\big)\big) + \\ + \delta\big(0, y(t) - \psi(t), 1\big) - \delta\big(0, \varphi(t) - y(t), 1\big),$$
$$F(t, x, y, x', y') =$$
$$= f\big(t, \delta\big(\alpha(t), x(t), \beta(t)\big), \delta\big(\varphi(t), y(t), \psi(t)\big), \delta\big(\lambda_x(t), x'(t), \mu_x(t)\big), \delta\big(\lambda_y(t), y', \mu_y(t)\big)\big) + \\ + \delta\big(0, x(t) - \beta(t), 1\big) - \delta\big(0, \alpha(t) - x(t), 1\big).$$

Розглянемо вектор-функцію $G(t,\xi,\eta) = \big(H(t,\xi,\eta), F(t,\xi,\eta)\big)$ та вектори $\eta_i = (\eta_{ix}, \eta_{iy})$, $i = 1, 2$. З того, що вектор-функція $g = (h, f)$ задовольняє умову (L), випливає виконання умови (L) для функції $G(t,\xi,\eta)$, оскільки $\forall\ t \in I$, $\forall\ \eta_1$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$|G(t,\xi,\eta_1) - G(t,\xi,\eta_2)| = |g(t,\tilde{\xi},\tilde{\eta}_1) - g(t,\tilde{\xi},\tilde{\eta}_2)| \leqslant L|\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|,$$

де $\tilde{\xi} = \big(\delta(\alpha, x, \beta), \delta(\varphi, y, \psi)\big)$, $\tilde{\eta}_i = \big(\delta(\lambda_x, \eta_{ix}, \mu_x), \delta(\lambda_y, \eta_{iy}, \mu_y)\big)$, $i = 1, 2$. Крім того, функції H і F обмежені, тому згідно з лемою крайова задача

$$\begin{gathered} x'(t) = H(t,x,y,x',y'), \quad y'(t) = F(t,x,y,x',y'), \quad t \in I; \\ l_0\big(x(a), y(a)\big) = l_1\big(x(b), y(b)\big) = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

має хоча б один розв'язок. Позначимо його через $\big(\overline{x}(t), \overline{y}(t)\big)$. Умови 1)–6) теореми та вигляд функцій $H(t,x,y,x',y')$ і $F(t,x,y,x',y')$ дають змогу далі, міркуючи так само як в доведенні теореми 1 [5, с.62–65], одержати оцінку $\alpha(t) \leqslant \overline{x}(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$. Оскільки тепер з умови 7) випливає, що $\varphi(t) \leqslant \overline{y}(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant \overline{x}'(t) \leqslant$ $\leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant \overline{y}'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall t \in I$, то $\big(\overline{x}(t), \overline{y}(t)\big)$ є не лише розв'язком задачі (7), а й задачі (1), (6). Теорему доведено.

Конкретизуємо умови теореми 2 для крайової задачі

$$\begin{gathered} x'(t) = h(t,x,y), \quad y'(t) = f(t,x,y,y'), \quad t \in I; \\ l_0\big(x(a), y(a)\big) = l_1\big(x(b), y(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Введемо позначення

$$\omega = \big\{\,(t,x) : t \in I,\, x \in [\alpha(t), \beta(t)]\big\}, \quad \alpha_* = \min_{t\in I} \alpha(t), \quad \beta^* = \max_{t \in I} \beta(t),$$
$$I_{\alpha\beta} = [\alpha_*, \beta^*], \quad \rho = \max\big\{|\alpha(b) - \beta(a)|/(b-a),\, |\alpha(a) - \beta(b)|/(b-a)\big\}.$$

Теорема 3. *Нехай функції $h(t,x,y)$, $f(t,x,y,z)$ неперервні відповідно для $(t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^2$, $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$, а функція f задовольняє умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0,1)$. Нехай існують функції α, β, u, $v \in C^1(I)$ такі, що для будь-якого $t \in I$*

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;

2) $\alpha'(t) = h\big(t, \alpha(t), u(t)\big)$, $\quad u'(t) \geqslant f\big(t, \alpha(t), u(t), w(t)\big)$,
$\beta'(t) = h\big(t, \beta(t), v(t)\big)$, $\quad v'(t) \leqslant f\big(t, \beta(t), v(t), w(t)\big)$
$\forall\ w(t) \in C(I) : |w(t)| \leqslant K_0$;

3) $l_0\big(\alpha(a), u(a)\big) \leqslant 0 \leqslant l_0\big(\beta(a), v(a)\big)$, $\quad l_1\big(\alpha(b), u(b)\big) \leqslant 0 \leqslant l_1\big(\beta(b), v(b)\big)$;

4) для будь-яких y_1, y_2 таких, що $|y_1| \leqslant N_0$, $|y_2| \leqslant N_0$, з умови $y_1 > y_2$ випливає, що

$$h\big(t, \alpha(t), y_1\big) > h\big(t, \alpha(t), y_2\big), \quad h\big(t, \beta(t), y_1\big) > h\big(t, \beta(t), y_2\big).$$

Нехай виконуються умови:

а) існують числа $\underline{N}$, $\overline{N} > 0$ такі, що $\forall (t,x) \in \omega$

$$h(t,x,y) > \rho \quad \forall y \geqslant \overline{N}, \quad h(t,x,y) < -\rho \quad \forall y \leqslant -\underline{N};$$

б) існує число $\tilde{N} \geqslant 0$ і неперервні функції $f_\omega(s) > 0$ $\forall s \geqslant 0$, $h_\omega(s) > 0$ $\forall s \geqslant \tilde{N}$; $p(s) > 0$, $q(s) \geqslant 0$ $\forall s \in I_{\alpha\beta}$; $\gamma(s) \geqslant 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$ такі, що $\forall (t,x) \in \omega$

$$|h(t,x,y)| \geqslant p(x) h_\omega(|y|) \quad \forall |y| \geqslant \tilde{N}, \quad |f(t,x,y,z)| \leqslant q(x) f_\omega(|y|)\gamma(z) \quad \forall y, z \in \mathbb{R},$$

причому рівняння

$$\nu = \gamma_0\big(q_0\omega_0(M(\nu))\nu\big) \tag{9}$$

має хоча б один додатний розв'язок ν *і*

$$\int\limits_{\overline{y}}^{\infty} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds > \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds,$$

де $\overline{y} = \max(\tilde{N}, \underline{N}, \overline{N})$, $\nu = \nu_0$ *- найменший додатний розв'язок рівняння (9),*

$$\gamma_0(K) = \max_{z\in[-K,K]} \gamma(z), \quad q_0 = \max_{x\in[\alpha(t),\beta(t)],\, t\in I} q(x), \quad \omega_0(M) = \max_{|y|\leqslant N(M)} f_\omega(|y|),$$
$$N(M) = \max\big\{M, \max_{t\in I}|u(t)|, \max_{t\in I}|v(t)|\big\},$$

а $M = M(\nu)$ *знаходимо з рівності*

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds = \nu \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds,$$
$$N_0 = N(M_0), \quad K_0 = q_0\omega_0(M_0)\nu_0, \quad M_0 = M(\nu_0),$$

тобто

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds = \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds. \tag{10}$$

Тоді крайова задача (8) має хоча б один розв'язок.

Доведення. Задача (8) – це частковий випадок крайової задачі (1), (6), тому для доведення цієї теореми досить перевірити виконання умов теореми 2. Прийнявши $\psi(t) = -\varphi(t) \equiv N_0$, $\mu_y(t) = -\lambda_y(t) \equiv K_0$, бачимо, що всі умови теореми 2, крім умови 7), виконуються. Покажемо, що виконується також і умова 7), тобто

$$-N_0 \leqslant y(t) \leqslant N_0, \quad -K_0 \leqslant y'(t) \leqslant K_0 \quad \forall t \in I,$$

якщо $\big(x(t), y(t)\big)$ – розв'язок системи

$$\begin{aligned} x' &= h\big(t, x, \delta(-N_0, y, N_0)\big) + \delta(0, y - N_0, 1) - \delta(0, -N_0 - y, 1),\\ y' &= f\big(t, x, \delta(-N_0, y, N_0), \delta(-K_0, y', K_0)\big) \end{aligned} \tag{11}$$

такий, що $x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ $\forall t \in I$.

Зазначимо насамперед, що існує точка $t_0 \in I$ така, що $|x'(t_0)| \leqslant \rho$. Справді, якщо, наприклад, $x'(t) > \rho$ $\forall t \in I$, то, інтегруючи цю нерівність від $t = a$ до $t = b$, одержимо оцінку

$$x(b) - x(a) > \max\big(|\alpha(b) - \beta(a)|, |\beta(b) - \alpha(a)|\big),$$

яка суперечить умові $x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ $\forall t \in I$. Аналогічно доводимо, що не може виконуватися нерівність $x'(t) < -\rho$ $\forall t \in I$.

Позначимо $y_0^* = y(t_0)$, де $t_0 \in I$ – та точка, в якій $|x'(t_0)| < \rho$. З першого рівняння системи (11) знаходимо

$$x'(t_0) = h\big(t_0, x(t_0), \delta(-N_0, y_0^*, N_0)\big) + \delta(0, y_0^* - N_0, 1) - \delta(0, -N_0 - y_0^*, 1).$$

Враховуючи умову а), робимо висновок, що $y_0^* < \overline{N} \leqslant \overline{y}$. Припустимо, що умова $-N_0 \leqslant y(t) \leqslant N_0$ не виконується, тобто існує точка $t_1 \in I$ і число $N^* > N_0$ такі, що $y(t_1) = N^*$. Оскільки $\overline{y} \leqslant N_0 < N^*$, то знайдеться відрізок $[t_0^*, t_1] \subseteq I$, в якому $\overline{y} \leqslant y(t) \leqslant N^*$ (не зменшуючи загальності, вважаємо, що $t_0^* < t_1$, інакше ми зробили б заміну t на $-t$).

З умови а) $\forall t \in [t_0^*, t_1]$ маємо

$$x'(t) = h\big(t, x(t), \delta(-N_0, y(t), N_0)\big) + \delta(0, y(t) - N_0, 1) > \rho \geqslant 0.$$

Отож, $x'(t) > 0 \ \forall t \in [t_0^*, t_1]$, тому існує обернена, неперервно диференційовна функція $t = t(x)$, і, отже, для таких t $y(t)$ на відрізку $x(t_0^*) \leqslant x \leqslant x(t_1)$ можна розглядати як функцію $y(x)$. Для таких x з системи (11) і умови б) знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f\big(t(x), x, \delta(-N_0, y(x), N_0), \delta(-K_0, y'(t), K_0)\big)}{h\big(t(x), x, \delta(-N_0, y(x), N_0)\big) + \delta(0, y(x) - N_0, 1)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{q(x) f_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)\gamma\big(\delta(-K_0, y'(t), K_0)\big)}{p(x) h_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)} \leqslant \\ &\leqslant \gamma_0(K_0)\frac{q(x) f_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)}{p(x) h_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)}.\end{aligned}$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи за x від $x_0^* = x(t_0^*)$ до $x_1 = x(t_1)$ (при цьому $y(x)$ змінюється від $\overline{y}$ до N^*). отримуємо

$$\int\limits_{\overline{y}}^{N^*} \frac{h_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}{f_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}\, dy \leqslant \gamma_0(K_0) \int\limits_{x_0^*}^{x_1} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx \leqslant \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx. \qquad (12)$$

Враховуючи, що $M_0 \leqslant N_0 < N^*$, для інтеграла у лівій частині (12) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\overline{y}}^{N^*} \frac{h_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}{f_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}\, dy > \int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(y)}{f_\omega(y)}\, dy.$$

Підставляючи її в (12), одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(y)}{f_\omega(y)}\, dy < \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx,$$

яка суперечить рівності (10). Отже, оцінка $y(t) \leqslant N_0 \ \forall t \in I$ доведена. Аналогічно доводиться нерівність $y(t) \geqslant -N_0 \ \forall t \in I$.

Враховуючи, що $y(t) \in [-N_0, N_0]$, запишемо друге рівняння системи (11) у вигляді $y' = f\big(t, x, y, \delta(-K_0, y', K_0)\big)$, звідки за допомогою умови б) $\forall\, t \in I$ одержимо оцінку

$$|y'(t)| \leqslant q(x) f_\omega(|y|)\gamma\big(\delta(-K_0, y', K_0)\big) \leqslant q_0\omega_0(M_0)\gamma_0(K_0) = q_0\omega_0(M_0)\nu_0 = K_0,$$

яка завершує доведення теореми 3.

3. Задача з мішаними крайовими умовами. Розглянемо крайову задачу

$$x' = h(t, x, y, x', y'), \quad y' = f(t, x, y, x', y'), \quad t \in I; \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \qquad (13)$$

де A, $B \in \mathbb{R}$. Специфіка крайових умов задачі (13) дає змогу спростити теорему 2 для цього часткового випадку задачі (1), (6).

Теорема 4. *Нехай функція* $g(t,\xi,\eta) = \big(h(t,\xi,\eta), f(t,\xi,\eta)\big)$, *де* $\xi = (x,y)$, $\eta = (x',y')$ *задовольняє умову* (L) *і нехай існують функції* α, β, φ, $\psi \in C^1(I)$, λ_x, μ_x, λ_y, $\mu_y \in C(I)$ *такі, що*

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)\ \forall\, t \in I$;

2) $\alpha'(t) \leqslant h\big(t,\alpha(t),y,z_x,z_y\big)$, $\quad \beta'(t) \geqslant h\big(t,\beta(t),y,z_x,z_y\big)$,
$\forall\,(t,y,z_x,z_y) \in \omega_2 = \big\{(t,y,z_x,z_y) : t \in I,\ \varphi(t) \leqslant y \leqslant \psi(t),$
$\lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t),\ \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)\big\}$;

3) $\varphi(t) \leqslant \psi(t)\ \forall\, t \in I$;

4) $\varphi'(t) \geqslant f\big(t,x,\varphi(t),z_x,z_y\big)$, $\quad \psi'(t) \leqslant f\big(t,x,\psi(t),z_x,z_y\big)$,
$\forall\,(t,x,z_x,z_y) \in \omega_1 = \big\{(t,x,z_x,z_y) : t \in I,\ \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t),$
$\lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t),\ \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)\big\}$;

5) $\alpha(a) \leqslant A \leqslant \beta(a)$, $\quad \varphi(b) \leqslant B \leqslant \psi(b)$;

6) $\lambda_x(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\quad \lambda_y(t) \leqslant \mu_y(t)\ \forall\, t \in I$;

7) для будь-яких x, $y \in C^1(I)$ *з умов*

$$x'(t) = h\big(t,x(t),y(t),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big),$$
$$y'(t) = f\big(t,x(t),y(t),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big),$$
$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t) \quad \forall t \in I$$

випливає, що $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)\ \forall\, t \in I$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $\big(x(t),y(t)\big)$ *задачі (13) і для нього є оцінки*

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t),$$
$$\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t), \quad \lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t) \quad \forall t \in I.$$

Доведення. Задамо для $(t,x,y,x',y') \in I \times \mathbb{R}^4$ функції

$$H(t,x,y,x',y') =$$
$$= h\big(t,\delta\big(\alpha(t),x,\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y,\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x',\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big),$$
$$F(t,x,y,x',y') =$$
$$= f\big(t,\delta\big(\alpha(t),x,\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y,\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x',\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big).$$

Згідно з лемою п.2 крайова задача

$$x' = H(t,x,y,x',y'), \quad y' = F(t,x,y,x',y'), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{14}$$

має розв'язок, який позначимо через $\big(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big)$. Умови 1)–6) цієї теореми та вигляд функцій H і F дають змогу, міркуючи аналогічно як в доведенні теореми 3 [5, с.69–70], одержати оцінки

$$\alpha(t) \leqslant \overline{x}(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant \overline{y}(t) \leqslant \psi(t) \quad \forall t \in I.$$

Оскільки з умови 7) випливає, що

$$\lambda_x(t) \leqslant \overline{x}'(t) \leqslant \mu_x(t), \quad \lambda_y(t) \leqslant \overline{y}'(t) \leqslant \mu_y(t) \quad \forall t \in I,$$

то $\big(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big)$ є не лише розв'язком задачі (14), а й задачі (13). Теорему доведено.

Зауваження 2. Умови 1)–5) теореми 4 виконуються, якщо існують сталі c_x, $c_y > 0$ такі, що $\forall\ t \in I$, z_x, $z_y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} xh(t,x,y,z_x,z_y) \leqslant 0, \quad & \forall\ |x| \geqslant c_x, \quad |y| \leqslant \max\{\, c_y, |B|\,\}, \\ yf(t,x,y,z_x,z_y) \geqslant 0, \quad & \forall\ |y| \geqslant c_y, \quad |x| \leqslant \max\{\, c_x, |A|\,\}. \end{aligned}$$

Щоб переконатися в правильності такого твердження, достатньо прийняти $\alpha \equiv -c_1$, $\beta \equiv c_1$, $\varphi \equiv -c_2$, $\psi \equiv c_2$, де $c_1 = \max\{\, c_x, |A|\,\}$, $c_2 = \max\{\, c_y, |B|\,\}$.

Зауваження 3. Умова 7) теореми 4 виконується, якщо для $t \in I$

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \;\; \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t), \;\; \lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t), \;\; \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)$$

функції $\lambda_x(t)$, $\lambda_y(t)$, $\mu_x(t)$, $\mu_y(t)$ задовольняють співвідношення

$$\lambda_x(t) \leqslant h\bigl(t,x,y,\lambda_x(t),z_y\bigr), \quad \mu_x(t) \geqslant h\bigl(t,x,y,\mu_x(t),z_y\bigr); \tag{15}$$

$$\lambda_y(t) \leqslant f\bigl(t,x,y,z_x,\lambda_y(t)\bigr), \quad \mu_y(t) \geqslant f\bigl(t,x,y,z_x,\mu_y(t)\bigr). \tag{16}$$

Справді, припустивши, наприклад, що існує точка $t_0 \in I$ така, що $x'(t_0) > \mu_x(t_0)$, тобто

$$h\bigl(t_0, x(t_0), y(t_0), \mu_x(t_0), \delta\bigl(\lambda_y(t_0), y'(t_0), \mu_y(t_0)\bigr)\bigr) > \mu_x(t_0),$$

приходимо до суперечності з другою нерівністю (15). Аналогічно перевіряються інші три нерівності (15), (16).

Зауваження 4. Якщо функція $h(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна (незростаюча) за змінною z_y, то умови (15) записують у вигляді

$$\lambda_x(t) \leqslant h\bigl(t,x,y,\lambda_x(t),\lambda_y(t)\bigr), \quad \mu_x(t) \geqslant h\bigl(t,x,y,\mu_x(t),\mu_y(t)\bigr); \tag{17}$$

$$\Bigl(\; \lambda_x(t) \leqslant h\bigl(t,x,y,\lambda_x(t),\mu_y(t)\bigr), \quad \mu_x(t) \geqslant h\bigl(t,x,y,\mu_x(t),\lambda_y(t)\bigr) \;\Bigr).$$

Аналогічно, якщо функція $f(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна (незростаюча) за змінною z_x, то умови (16) записують у вигляді

$$\lambda_y(t) \leqslant f\bigl(t,x,y,\lambda_x(t),\lambda_y(t)\bigr), \quad \mu_y(t) \geqslant f\bigl(t,x,y,\mu_x(t),\mu_y(t)\bigr); \tag{18}$$

$$\Bigl(\; \lambda_y(t) \leqslant f\bigl(t,x,y,\mu_x(t),\lambda_y(t)\bigr), \quad \mu_y(t) \geqslant f\bigl(t,x,y,\lambda_x(t),\mu_y(t)\bigr) \;\Bigr).$$

Доведемо теорему, яка дає достатні умови для виконання умов 6), 7) теореми 4. Введемо позначення $I_M = [-M, M]$, $I_N = [-N, N]$, де M, $N > 0$.

Теорема 5. *Нехай функція $h(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна за змінною z_y, функція $f(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна за змінною z_x; для будь-яких $M > 0$, $N > 0$ існують неперервні додатні функції $\gamma_1(z_x,z_y)$, $\gamma_2(z_x,z_y)$, $(z_x,z_y) \in \mathbb{R}^2$ такі, що*

$$|h(t,x,y,z_x,z_y)| \leqslant \gamma_1(z_x,z_y), \quad |f(t,x,y,z_x,z_y)| \leqslant \gamma_2(z_x,z_y)$$

$\forall\ t \in I$, $(x,y) \in I_M \times I_N$, $(z_x,z_y) \in \mathbb{R}^2$, причому $\gamma_i(-z_x,-z_y) \leqslant \gamma_i(z_x,z_y)$ $(i = 1,2)$, $\forall\ z_x$, $z_y > 0$, і система рівнянь

$$\gamma_1(M_x, M_y) = M_x, \qquad \gamma_2(M_x, M_y) = M_y \tag{19}$$

має хоча б один розв'язок (M_x, M_y), де $M_x > 0$, $M_y > 0$. Тоді виконуються умови 6), 7) теореми 4.

Доведення. Нехай $M_x > 0$, $M_y > 0$ – розв'язки системи (19). Візьмемо $-\lambda_x = \mu_x \equiv M_x$, $-\lambda_y = \mu_y \equiv M_y$. Тоді $\forall\ t \in I$, $(x, y) \in I_M \times I_N$,

$$h(t,x,y,\mu_x,\mu_y) = h(t,x,y,M_x,M_y) \leqslant \gamma_1(M_x,M_y) = M_x = \mu_x,$$
$$h(t,x,y,\lambda_x,\lambda_y) =$$
$$= h(t,x,y,-M_x,-M_y) \geqslant -\gamma_1(-M_x,-M_y) \geqslant -\gamma_1(M_x,M_y) = -M_x = \lambda_x,$$

тобто виконуються умови (17). Аналогічно перевіряємо виконання умов (18). Теорему доведено.

4. Приклад виконання умов теореми 4. Розглянемо систему рівнянь

$$x' = h(t,x,y), \quad y' = f(t,x,y,y'), \quad t \in I,$$

де

$$f(t,x,y,z) = f_0(t,x,y)\ln\left((x^2+y^2+1)|z| + \sqrt{(x^2+y^2+1)^2(z^2+1)+\lambda_0}\right),$$

$h(t,x,y) \in C(I \times \mathbb{R}^2)$, $f_0(t,x,y) \in C(I \times \mathbb{R}^2)$, $\lambda_0 = const > 0$,

$$xh(t,x,y) \leqslant 0, \quad yf_0(t,x,y) \geqslant 0, \quad |f_0(t,x,y)| \leqslant 1 \quad \forall\,(t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^2.$$

Тоді маємо $yf(t,x,y,z) \geqslant 0\ \forall\ (t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$, $\forall\ M, N > 0$

$$|f(t,x,y,z)| \leqslant \ln\left((M^2+N^2+1)|z| + \sqrt{(M^2+N^2+1)^2(z^2+1)+\lambda_0}\right)$$
$$\forall\ (t,x,y,z) \in I \times I_M \times I_N \times \mathbb{R}.$$

Отже, функція $\gamma_2(z_x, z_y)$ (див. теорему 5) має вигляд

$$\gamma_2(z) = \ln\left((M^2+N^2+1)|z| + \sqrt{(M^2+N^2+1)^2(z^2+1)+\lambda_0}\right) > 0,$$

причому $\gamma_2(-z) = \gamma_2(z)\ \forall\ z \in \mathbb{R}$.

Оскільки $|\partial f/\partial z| < 1$, $|\gamma_2'(z)| < 1$ для $z \neq 0$, то міркуючи як в п.6 праці [2], приходимо до висновку, що функції $f(t,x,y,z)$ і $\gamma_2(z)$ задовольняють умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0,1)$. Це означає, що функція $g(t,\xi,\eta) = \big(h(t,\xi), f(t,\xi,\eta)\big)$ задовольняє умову (L), а рівняння $\gamma_2(M_y) = M_y$, в яке вироджується в цьому випадку система (19), має єдиний додатний розв'язок. Таким чином, функції $h(t,x,y)$ і $f(t,x,y,y')$ задовольняють умови теореми 5 і зауваження 2, а, отже, й умови теореми 4.

---

1. *Жерновий Ю.В.* Про єдиність розв'язку двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.64-74.
2. *Жерновий Ю.В.* Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.80-90.
3. *Жерновий Ю.В.* Умови розв'язності двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, частково розв'язаних стосовно

старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С.129-138.

4. *Король І.І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Ужгород, 1996.
5. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SYSTEM OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE DERIVATIVES

Yuriy Zhernovyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Existence of solutions of the boundary problems for the system $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ with continuous functions h, f and linear boundary conditions are obtained both with the help of known conditions of solvability of boundary problems for the system $x'' = F(t, x, x', x'')$ and with the help of the method of upper and lower functions.

Key words: system of ordinary differential equations, conditions of solvability, method of upper and lower functions.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.2001
Прийнята до друку 20.06.2002