ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.77–79

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.77–79

УДК 517.51

ТИПИ МНОЖИН ТОЧОК НЕПЕРЕРВНОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В НЕМЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Олена КАРЛОВА, Володимир МАСЛЮЧЕНКО
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2 Чернівці, Україна

Доведено, що у довільного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X з першою аксіомою зліченності в сильно σ-метризовний простір Y множина $C(f)$ його точок неперервності є типу G_δ. З'ясовано також, що будь-яка підмножина T_1-простору X без ізольованих точок є множиною точок неперервності деякого відображення $f : X \to [0,1]^X$.

Ключові слова: σ-метризований простір, точки неперервності.

1. Добре відомо [1, с.217], що множина $C(f)$ точок неперервності довільного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний простір Y є типу G_δ. Природно поставити питання про тип множини $C(f)$ для неметризовних просторів Y. У цій праці ми доводимо, що $C(f)$ є G_δ-множиною і у тому випадку, коли X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, а Y – сильно σ-метризовний простір [2, с.199]. Крім того, для будь-якої підмножини A довільного T_1-простору без ізольованих точок і тихоновського куба $Y = [0,1]^X$ будуємо відображення $f : X \to Y$, для якого $C(f) = A$. Щодо термінів, які не введено в цій праці, див. [3].

2. Нагадаємо, що топологічний простір Y називається *сильно σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів Y_n, причому кожна збіжна в Y послідовність обов'язково міститься в деякому дограничному просторі Y_n. Така послідовність підпросторів Y_n називається *вичерпуванням* простору Y.

Ми використовуватимемо таке твердження [2, лема 1.4.4, с.200].

Лема. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Y - сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Y_n : n \in \mathbf{N})$ і відображення $f : X \to Y$ неперервне в точці $x_0 \in X$. Тоді існує окіл U точки x_0 в X і номер $m \in \mathbf{N}$ такі, що $f(U) \subseteq Y_m$.*

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Y – сильно σ-метризовний простір і $f : X \to Y$ – довільне відображення. Тоді $C(f)$ є G_δ-множиною в X.*

Доведення. Оскільки Y – сильно σ-метризовний простір, то $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, де (Y_n) – зростаюча послідовність замкнених метризовних підпросторів Y. Нехай d_1 – метрика, що породжує на просторі Y_1 його топологію. Оскільки Y_1 – замкнений підпростір метризовного простору Y_2, то згідно з теоремою Гаусдорфа [3, с.439] d_1 можна неперервно продовжити до метрики d_2 на весь простір Y_2. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо узгоджену послідовність метрик (d_n). Визначимо на просторі Y метрику d так: $d(y', y'') = d_n(y', y'')$, де n – той перший номер, що $y' \in Y_n$ і $y'' \in Y_n$.

Нехай $I : Y \to (Y, d)$ – тотожне відображення. Оскільки $I \circ f$ набуває значень у метризовному просторі, то згідно з [1, с.217] його множина точок неперервності $C(I \circ f)$ є G_δ-множиною в X.

Згідно з лемою для кожної точки $x \in C(f)$ існують відкрита в X множина $U(x)$ і номер n_x, такі, що $x \in U(x)$ і $f(U(x)) \subseteq Y_{n_x}$. Приймемо $U = \bigcup\limits_{x \in C(f)} U(x)$. Покажемо, що $C(f) = C(I \circ f) \bigcap U$. Нехай $x \in C(f)$. Тоді $x \in U(x) \subseteq U$. Крім того, $f(U(x)) \subseteq Y_{n_x}$, а метрика d індукує на Y_{n_x} ту саму топологію, що й Y. Отже, $x \in C(I \circ f)$. Нехай $x \in C(I \circ f) \bigcap U$. Тоді існує x' таке, що $x \in U(x')$. Оскільки $f(U(x')) \subseteq Y_m$ для деякого m, то вихідна і метрична топології на $f(U(x'))$ збігаються. Отже, $x \in C(f)$.

Оскільки $C(I \circ f)$ – G_δ-множина, U – відкрита, то $C(f)$ є G_δ-множиною.

Зауваження 1. Якщо X – спадково паракомпактний досконалий простір з першою аксіомою зліченності, то можна подати інше доведення теореми 1, яке грунтується на одній теоремі Майкла [3, с.430].

У цьому випадку множину $C(f)$ точок неперервності відображення f можна подати у вигляді

$$C(f) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (C(f) \bigcap V) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} C(f_V),$$

де $\mathcal{V}$ – локально скінченне відкрите покриття підпростору $X_0 = \bigcup\limits_{x \in C(f)} U(x)$, а відображення $f_V = f_{|V}$ набуває значень у метризовному просторі.

Саме це доведення було в первісній редакції цієї статті, а покращити результат вдалося завдяки порадам рецензента.

3. Наступний результат свідчить про те, що загалом множини точок неперервності відображень $f : X \to Y$ можуть мати довільну природу.

Теорема 2. *Нехай X – довільний T_1-простір без ізольованих точок, $A \subseteq X$ і $Y = [0, 1]^X$ – тихоновський куб. Тоді існує відображення $f : X \to Y$ таке, що $C(f) = A$.*

Доведення. Приймемо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ g_x, & x \notin A, \end{cases}$$

де

$$g_x(t) = \begin{cases} 1, & t = x, \\ 0, & t \neq x, \end{cases}$$

і доведемо, що відображення f є шуканим.

Нехай $x_0 \in A$. Тоді $y_0 = f(x_0) = 0$. Перевіримо, що $x_0 \in C(f)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$, точки $x_1, \ldots, x_n \in X$ і розглянемо окіл $V = \{y \in Y : \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y(x_i) < \varepsilon\}$ точки y_0 в Y. З того, що X задовольняє аксіому T_1 випливає, що множина $F = \{x_i : i = 1, \ldots, n\} \setminus \{x_0\}$ замкнена. Тоді $U = X \setminus F$ є відкритим околом точки

x_0 в X, причому $f(U) \subseteq V$. Справді, якщо $x \in V \setminus A$, то $x \neq x_i$ для кожного $i = 1, \ldots, n$, отже $g_x(x_i) = 0$, при $i = 1, \ldots, n$ випливає, що $f(x) = g_x \in V$. Якщо $x \in V \bigcap A$, то $f(x) = 0 \in V$. Таким чином, $x_0 \in C(f)$, отже, $A \subseteq C(f)$.

Припустимо, що $x_0 \in X \setminus A$. Тоді $y_0 = f(x_0) = g_{x_0}$. Розглянемо множину $V_0 = \{y \in Y : y(x_0) > \frac{1}{2}\}$, яка є околом точки y_0 в просторі Y, бо $y_0(x_0) = g_{x_0}(x_0) = 1 > \frac{1}{2}$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в X. Оскільки x_0 не є ізольованою точкою в X, то існує $x^* \in U \setminus \{x_0\}$. Приймемо $y^* = f(x^*)$ і покажемо, що $y^* \notin V_0$. Якщо $x^* \in A$, то $y^* = 0$, зокрема $y^*(x_0) = 0$; якщо ж $x^* \notin A$, то $y^* = g_{x^*}$, а отже, $y^*(x_0) = g_{x^*}(x_0) = 0$, бо $x^* \neq x_0$. Ми бачимо, що у кожному випадку $y^*(x_0) = 0$, отже, $y^* \notin V_0$. Таким чином, $f(U) \not\subseteq V_0$ для будь-якого околу U точки x_0, звідки випливає, що f розривне в точці x_0. Отже, ми довели обернене включення $C(f) \subseteq A$, а з ним і рівність $C(f) = A$.

Зауваження 2. Оскільки образ $f(X)$ є копією одноточкової компактифікації αD дискретного простору потужності $|X|$, то в теоремі 2 тихоновський куб $[0,1]^X$ можна замінити на довільний простір, що містить αD, наприклад, на довільний діадичний компакт ваги $\geqslant |D|$.

Автори висловлюють щиру вдячність О.В. Маслюченку і О.В.Собчуку за допомогу при написанні статті та рецензентові за корисні поради.

---

1. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М., 1966.
2. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана. – Чернівці, 1995. – С.192-246.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М., 1986.

TYPES SETS OF CONTINUITY POINTS OF MAPPINGS WITH VALUES IN NONMETRIZABLE SPACES

Olena Karlova, Volodymyr Maslyuchenko

Yuriy Fed'kovych National University in Chernivtsi
2 Kotsyubyns'koho Str. Chernivtsi, Ukraine

It is shown that any mapping $f : X \to Y$, where X is a first countable space and Y is a strong σ-metrizable space, the set $C(f)$ of continuity points is G_δ-set. Furthermore, it is obtained that any subset of T_1-space X without isolated points is the set of continuity points of some mapping $f : X \to [0,1]^X$.

Key words: strong σ-metrizable space, continuity points.

Стаття надійшла до редколегії 22.10.2001
Прийнята до друку 20.06.2002