 VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.80–91

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Маріанна ОЛІСКЕВИЧ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено певні достатні умови, за яких задача без початкових умов для системи гіперболічних рівнянь першого порядку з трьома незалежними змінними має єдиний узагальнений розв'язок (у сенсі інтегральної тотожності) незалежно від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Для дослідження застосовано метод Гальоркіна.

Ключові слова: гіперболічна система першого порядку, задача без початкових умов.

Деякі задачі без початкових умов для гіперболічних систем першого поряку з двома незалежними змінними досліджено в працях [1 – 3]. Зокрема в працях [1,2] за допомогою методу характеристик одержано певні умови коректності задачі для лінійних систем у класах обмежених функцій. У праці [3] для дослідження використано метод Гальоркіна. Одержано певні умови однозначної розв'язності задачі Фур'є в класі функцій, які можуть зростати при $t \to -\infty$ не швидше ніж $e^{-\alpha t}$, де додатний параметр α залежить від коефіцієнтів системи.

У цій праці визначено певні достатні умови, за яких задача Фур'є для системи гіперболічних рівнянь першого порядку з трьома незалежними змінними має єдиний узагальнений розв'язок (у сенсі інтегральної тотожності) незалежно від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Для дослідження застосовано метод Гальоркіна.

Розглянемо в області $Q_T = \{(x, y, t) \, : \, 0 < x < a, 0 < y < b, -\infty < t < T\}$ систему гіперболічних рівнянь вигляду

$$u_{it} + \lambda_i(x, y, t)u_{ix} + \mu_i(x, y, t)u_{iy} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y, t)u_j + \\ + g_i(t, u_1, \ldots, u_n) = f_i(x, y, t), \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Позначимо через $L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T)$ простір функцій, які належать до $L^\infty(Q_{t_1,t_2})$ для довільних t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, де $Q_{t_1,t_2} = \{(x, y, t) \, : \, 0 < x < a, 0 < y < b, t_1 < t < t_2\}$.

Припускатимемо, що коефіцієнти системи (1) задовольняють такі умови:

(Λ) $\quad \{\lambda_i, \lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \mu_i, \mu_{ix}, \mu_{iy}\} \in L^\infty(Q_T)$,

$$\lambda_i(x,y,t) \geqslant \lambda_0 > 0, \quad \mu_i(x,y,t) \geqslant \mu_0 > 0, \quad (x,y,t) \in Q_T,$$
$$i \in \{1,\dots,n\}, \quad \lambda_0 = \mathrm{const}, \quad \mu_0 = \mathrm{const};$$

(A) $\{a_{ij}, a_{ijx}, a_{ijy}\} \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T), \quad \{i,j\} \in \{1,\dots,n\},$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,y,t) \in Q_T$$

і всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$, $a_0 = \mathrm{const}$;

(G) функції $t \to g_i(t,\xi)$ вимірні на $(-\infty,T)$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$, функції $\xi \to g_i(t,\xi)$ неперервні в $\mathbf{R}^n$ майже для всіх $t \in (-\infty,T)$,

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i(t,\xi) - g_i(t,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geqslant g_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p, \quad g_0 > 0,$$

$$|g_i(t,\xi)| \leqslant g^{(0)} \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p-1}, \quad i \in \{1,\dots,n\}, \quad p > 2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i(t,\xi)}{\partial \xi_j}\eta_i\eta_j \geqslant 0 \quad \text{для довільних } \xi,\eta \in \mathbf{R}^n \text{ і майже всіх}$$

$$t \in (-\infty,T), \quad g_0 = \mathrm{const}, \quad g^{(0)} = \mathrm{const}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Для системи (1) задамо крайові умови

$$u_i(0,y,t) = 0, \quad u_i(x,0,t) = 0, \quad i \in \{1,\dots,n\}. \tag{2}$$

Означення. *Функцію $u = (u_1,\dots,u_n)$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо $u_i \in C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \bigcap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$ і виконуються рівності*

$$\int\limits_{\Omega_t} u_i v_i \,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i(a,y,t)v_i(a,y,t)\,dydt +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i(x,b,t)v_i(x,b,t)\,dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i(v_{it} + \lambda_i v_{ix} + \mu_i v_{iy}) - (\lambda_{ix} + \mu_{iy})u_i v_i +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j v_j + (g_i(t,u) - f_i)v_i\Big]\,dxdydt = 0 \tag{3}$$

для довільних $t_t, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$ і довільних функцій $v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \bigcap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$ та умови (2).

Позначимо

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sup_{Q_T} |\lambda_{ix}(x,t)| = \lambda^{(1)}, \qquad \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sup_{Q_T} |\mu_{iy}(x,t)| = \mu^{(1)}.$$

Теорема. *Нехай виконуються умови* (Λ), (A), (G) *і, крім того,* $f_i \in L^{p'}_{loc}(\overline{Q}_T)$, $\{f_{ix}, f_{iy}\} \in L^2_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)} > 0$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Розглянемо спочатку систему (1) з крайовими умовами (2) в обмеженій області $Q_{t_0,T}$ з початковими умовами

$$u_i(x,y,t_0) = 0, \quad i \in \{1,\dots,n\}. \tag{4}$$

Побудуємо послідовність функцій

$$u_i(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N} c^N_{ikm}(t)\omega_k(x)\sigma_m(y), \quad i \in \{1,\dots,n\},$$

де

$$\omega_k(x) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2a}x, \quad \sigma_m(y) = \sin\frac{(2m-1)\pi}{2b}y,$$

а функції c^N_{ikm} є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b \Big(u^N_{it} + \lambda_i u^N_{ix} + \mu_i u^N_{iy} + \sum_{j=1}^n a_{ij}u^N_j +$$

$$+ g_i - f_i\Big)\omega_k\sigma_m\,dxdy = 0, \tag{5}$$

$$c^N_{ikm}(t_0) = 0, \quad \{k,m\} \in \{1,\dots,N\}, \quad i \in \{1,\dots,n\}. \tag{6}$$

Помножимо кожне рівняння (5) відповідно на функцію c^N_{ikm}, підсумуємо за індексами k,m від 1 до N та за індексом i від 1 до n і проінтегруємо по відрізку $[t_0,\tau]$, $\tau \in (t_0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[\sum_{i=1}^n u^N_{it}u^N_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i u^N_{ix}u^N_i + \sum_{i=1}^n \mu_i u^N_{iy}u^N_i +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^N_j u^N_i + \sum_{i=1}^n g_i u^N_i - \sum_{i=1}^n f_i u^N_i \Big]\,dxdydt = 0. \tag{7}$$

Перетворимо й оцінимо кожен доданок рівності (7) окремо. На підставі умов (Λ), (A) та (G) матимемо

$$I_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n u^N_{it}u^N_i\,dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n [u^N_i]^2\,dxdy,$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \lambda_i u^N_{ix}u^N_i\,dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_0^b \sum_{i=1}^n \lambda_i(a,y,t)[u^N_i(a,y,t)]^2\,dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n \lambda_{ix}[u^N_i]^2\,dxdydt\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\lambda_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^b \sum_{i=1}^n [u_i^N(a,y,t)]^2\,dydt - \frac{1}{2}\lambda^{(1)} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_3 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \mu_i(x,y,t) u_{iy}^N u_i^N\,dxdydt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\mu_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^a \sum_{i=1}^n [u_i^N(x,b,t)]^2\,dxdt - \frac{1}{2}\mu^{(1)} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_4 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u_j^N u_i^N\,dxdydt \geqslant a_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_5 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n g_i(t,u) u_i^N\,dxdydt \geqslant g_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt;$$

$$I_6 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n f_i(x,y,t) u_i^N\,dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{p} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt + \frac{C(\delta)}{2} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,y,t)|^{p'}\,dxdydt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1,\ldots,I_6$, з рівності (5) одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdy + \lambda_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^b \sum_{i=1}^n |u_i^N(a,y,t)|^2\,dydt +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau}\int_0^a \sum_{i=1}^n |u_i^N(x,b,t)|^2\,dxdt + (2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdydt +$$
$$+ 2\left(g_0 - \frac{\delta}{p}\right) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt \leqslant C(\delta) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,y,t)|^{p'}\,dxdydt. \tag{8}$$

Згідно з умовою теореми $2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)} > 0$. Тому з (8) випливають оцінки

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdy \leqslant C_1, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_0^b \sum_{i=1}^n |u_i^N(a,y,t)|^2\,dydt \leqslant C_1, \tag{10}$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_0^a \sum_{i=1}^n |u_i^N(x,b,t)|^2\,dxdt \leqslant C_1, \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^N|^p \, dxdydt \leqslant C_1, \tag{12}$$

причому стала C_1 не залежить від N.

Враховуючи те, що

$$\omega_k''(x) = -\left[\frac{(2k-1)\pi}{2a}\right]^2 \omega_k(x), \quad \sigma_m''(y) = -\left[\frac{(2m-1)\pi}{2b}\right]^2 \sigma_m(y),$$

з рівнянь (5) легко одержати рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Bigg[u_{it}^N + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}^N + \mu_i(x,y,t)u_{iy}^N + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j^N +$$
$$+ g_i(t,u) - f_i(x,y,t)\Bigg] u_{ixx}^N \, dxdydt = 0. \tag{13}$$

Перетворимо кожний доданок рівності (13) окремо. Матимемо

$$I_7 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} u_{it}^N u_{ixx}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{ix}^N|^2 \, dxdy;$$

$$I_8 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ix}^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$
$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(0,y,t)|u_{ix}^N|^2 \, dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ix}|u_{ix}^N|^2 \, dxdydt;$$

$$I_9 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_{iy}^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$
$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{a} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,b,t)|u_{ix}^N|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{iy}|u_{ix}^N|^2 \, dxdydt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ix} u_{ix}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{10} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_j^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^N u_{ix}^N \, dxdydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijx} u_j^N u_{ix}^N \, dxdydt;$$

$$I_{11} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} g_i(t,u^N) u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i(t,u^N)}{\partial u_j^N} u_{jx}^N u_{ix}^N \, dxdydt;$$

$$I_{12} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y,t) u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} f_i(0,y,t) u_{ix}^N \, dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_{ix}(x,y,t) u_{ix}^N \, dxdydt.$$

Аналогічно до (13) одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big[u_{it}^N + \lambda_i u_{ix}^N + \mu_i u_{iy}^N + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^N +$$

$$+ g_i(t,u) - f_i(x,y,t) \Big] u_{iyy}^N \, dxdydt = 0. \tag{14}$$

Знову перетворимо кожний доданок рівності (14) окремо. Отримаємо

$$I_{13} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} u_{it}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{iy}^N|^2 \, dxdy;$$

$$I_{14} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ix}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a,y,t) |u_{iy}^N|^2 \, dydt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ix} |u_{iy}^N|^2 \, dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{iy} u_{ix}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{15} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_{iy}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{a} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,0,t) |u_{iy}^N|^2 \, dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{iy} |u_{iy}^N|^2 \, dxdydt;$$

$$I_{16} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_j^N u_{iyy}^N \, dxdydt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jy}^N u_{iy}^N \, dxdydt -$$

$$- \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijy} u_j^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{17} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} g_i(t,u^N) u_{iyy}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i(t,u^N)}{\partial u_j^N} u_{jy}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{18} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_i u_{iyy}^N \, dxdydt = -\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,0,t) u_{iy}^N \, dydt -$$
$$- \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_{iy} u_{iy}^N \, dxdydt.$$

Додавши рівності (13) і (14), врахувавши інтеграли $I_7, \ldots, I_{18}$ та умови теореми, одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (|u_{ix}^N|^2 + |u_{iy}^N|^2) \, dxdy \leqslant C_2, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{15}$$

де стала C_2 не залежить від N. Зазначимо також, що на підставі умови (G) і (12) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i=1}^{n} |g_i(t, u^N)|^{p'} \, dxdydt \leqslant C_3. \tag{16}$$

З оцінок (9) – (12), (15), (16) випливає існування такої підпослідовності $\{u_i^{N_k}(x,y,t)\}$ послідовності $\{u_i^N(x,y,t)\}$, що $u_i^{N_k} \to u_i$ слабко в $L^2((t_0,T); H^1(\Omega))$, $u_i^{N_k} \to u_i$ слабко в $L^p(Q_{t_0,T})$, $u_i^{N_k}(\cdot,\cdot,T) \to \tilde{u}_i$ слабко в $L^2(\Omega_T)$, $u_i^{N_k}(a,\cdot,\cdot) \to \theta_i$ слабко в $L^2((0,b) \times (t_0,T))$, $u_i^{N_k}(\cdot,b,\cdot) \to \tilde{\theta}_i$ слабко в $L^2((0,a) \times (t_0,T))$, $g_i(\cdot, u^{N_k}) \to \chi_i$ слабко в $L^{p'}(Q_{t_0,T})$ при $k \to \infty$ для $i \in \{1,\ldots,n\}$. Використавши задачу (5), (6) для N_k і збіжність послідовностей $\{u_i^{N_k}(x,y,t)\}$ у відповідних просторах, неважко одержати рівності

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[-u_i v_{it} + \lambda_i(x,y,t) u_{ix} v_i + \mu_i(x,y,t) u_{iy} v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_j v_i +$$
$$+ \chi_i v_i - f_i(x,y,t) v_i \Big] \, dxdydt + \int\limits_{\Omega_T} \tilde{u}_i v_i \, dxdy +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{0}^{b} \lambda_i(a,y,t)\theta_i v_i \, dydt + \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{0}^{a} \mu_i(x,b,t)\tilde{\theta}_i v_i \, dxdt = 0, \tag{17}$$

правильні для кожної функції $v_i \in H^1(Q_{t_0,T}) \cap L^p(Q_{t_0,T})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, яка задовольняє крайові умови (2). Крім того, функція u задовольняє крайові умови (2).

Приймемо, що в (17) $v_i \in C_0^\infty(Q_{t_0,T})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді одержимо, що

$$u_{it} = -\lambda_i(x,y,t) u_{ix} - \mu_i(x,y,t) u_{iy} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_j - \chi_i + f_i(x,y,t).$$

Використовуючи монотонність оператора Немицького, визначеного функцією g_i, аналогічно до [4, с.171] легко переконатися, що $\chi_i(x,y,t) = g_i(t, u(x,y,t))$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Отже, функції u_i, $i \in \{1,\dots,n\}$ є розв'язком задачі (1), (2), (4) майже всюди. Крім того, згідно з лемою 1.2 [4, с.20] $u_i \in C([t_0,T]; L^2(\Omega))$, $i \in \{1,\dots,n\}$. На підставі рівностей (17) матимемо, що $\tilde{u_i}(x,y) = u_i(x,y,T)$, $\theta_i(y,t) = u_i(a,y,t)$, $\tilde{\theta}_i(x,t) = u_i(x,b,t)$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Продовжимо функції u_i, $i \in \{1,\dots,n$ нулем на область $Q_{-\infty,t_0}$ і збережемо для них ті самі позначення. Тоді ці функції задовольняють рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[u_{it}v_i + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}v_i + \mu_i(x,y,t)u_{iy}v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i + \\ + g_i(t,u)v_i - f_i^{t_0}(x,y,t)v_i\Big]\,dxdydt = 0$$

для довільних функцій $v_i \in H^1(Q_{t_1,T}) \cap L^p(Q_{t_1,T})$, $i \in \{1,\dots,n\}$ і довільного t_1, $t_1 \leqslant t_0$, де

$$f_i^{t_0}(x,y,t) = \begin{cases} f_i(x,y,t), & (x,y,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_{-\infty,t_0}. \end{cases}$$

Використовуючи методику [4, с.225], легко довести, що для довільних функцій $v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$ і довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$ є правильними рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_iv_{it} + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}v_i + \mu_i(x,y,t)u_{iy}v_i + \\ + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i + g_i(t,u))v_i\Big]\,dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_iv_i\,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} + \\ + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_iv_i\,dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_iv_i\,dxdt = 0. \tag{18}$$

Нехай t_0 набуває значення $T-1$, $T-2$, ... , $T-s$, ... Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^s(x,y,t)\}$, кожна з яких задовольняє (18). Приймемо, що $v_i = (u_i^s - u_i^l)\psi(t)$, $s, l \in \mathbf{N}$, де

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \tau_0 \leqslant t \leqslant T, \\ \left(\dfrac{t-t_1}{\tau_0 - t_1}\right)^{\alpha}, & t_1 \leqslant t < \tau_0, \\ 0, & t < t_1, \end{cases}$$

а $\alpha > 1$. Нехай $t_2 \in [\tau_0, T]$. Запишемо рівності (18) для функцій u_i^s і u_i^l та віднімемо від перших другі. Позначивши $u_i^{s,l} = u_i^s - u_i^l$, одержимо рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i^{s,l}u_{it}^{s,l}\psi(t) - |u_i^{s,l}|^2\psi'(t) + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t) +$$

$$+ \mu_i(x,y,t)u_{iy}u_i^{s,l}\psi(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j u_i^{s,l}\psi(t)+$$

$$+ (g_i(t,u^s) - g_i(t,u^l))u_i^{s,l}\psi(t)\Big] \, dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_i^{s,l}u_i^{s,l}\, dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t)\, dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t)\, dxdt = 0, \tag{19}$$

$i \in \{1,\dots,n\}$ для s і l більших від $T - t_1$. Повторивши перетворення і оцінки доданків рівності (19) аналогічно до інтегралів $I_1, \dots, I_5$, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^2\, dxdy + \lambda_0 \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}(a,y,t)|^2\psi(t)\, dydt+$$

$$+ \mu_0 \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}(x,b,t)|^2\psi(t)\, dxdt+$$

$$+ (2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^2\psi(t)\, dxdydt+$$

$$+ g_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^p\, dxdydt \leqslant C_4 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \frac{|\psi'(t)|^{p/(p-2)}}{|\psi(t)|^{2/(p-2)}}\, dxdydt, \tag{20}$$

причому стала C_4 не залежить від s, l і t_1. Легко бачити, що права частина нерівності (20) може бути оцінена величиною $C_5(\tau_0 - t_1)^{1-p/(p-2)}$ і оскільки $p/(p-2) > 1$, може бути зроблена як завгодно малою за рахунок вибору t_1. Отже, послідовності $\{u_i^s\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ є фундаментальними в просторах $L^2(Q_{\tau_0,T})$, $L^p(Q_{\tau_0,T})$, $C([\tau_0,T]; L^2(\Omega))$. Крім того, послідовності $\{u_i^s(a,y,t)\}$ є фундаментальними в просторі $L^2((0,a)\times(\tau_0,T))$, послідовності $\{u_i^s(x,b,t)\}$ є фундаментальними в просторі $L^2((0,b)\times(\tau_0,T))$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Запишемо рівності (18) для функцій u_i^s у вигляді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i^s v_{it} - \lambda_i(x,y,t)u_i^s v_{ix} - \mu_i(x,y,t)u_i^s v_{iy}-$$

$$- \lambda_{ix}(x,y,t)u_i^s v_i - \mu_{iy}(x,y,t)u_i^s v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j^s v_i+$$

$$+ g_i(t,u^s)v_i - f_i(x,y,t)v_i\Big] \, dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_i^s v_i\, dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i^s v_i\, dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i^s v_i\, dxdt = 0, \tag{21}$$

$v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Перейшовши до границі в (21) при $s \to \infty$, одержимо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i(v_{it} + \lambda_i(x,y,t)v_{ix} + \mu_i(x,y,t)v_{iy}) -$$
$$- \lambda_{ix}(x,y,t)u_iv_i - \mu_{iy}(x,y,t)u_iv_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i +$$
$$+ g_i(t,u)v_i - f_i(x,y,t)v_i\Big]\,dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} \tilde{u}_iv_i\,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)\theta_iv_i\,dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)\tilde{\theta}_iv_i\,dxdt = 0, \tag{22}$$

$v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Нехай $x = \rho_i(t,\xi,\eta,\tau)$, $y = \varphi_i(t,\xi,\eta,\tau)$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i(x,y,t),$$
$$x(\tau) = \xi, \quad y(\tau) = \eta,$$

$i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді

$$\frac{dv_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial t} +$$
$$+ \lambda_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)\frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial x} +$$
$$+ \mu_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)\frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial y}.$$

Розглянемо відображення

$$x = \rho_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau), \quad y = \varphi_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau), \quad t = \tau \tag{23}$$

деякої області D_i на $Q_{\tau_0,T}$. Нехай функції v_i мають компактний носій в $Q_{\tau_0,T}$. Тоді рівності (22) можна записати у вигляді

$$-\int\limits_{D_i} \widehat{u}_i \frac{d\widehat{v}_i}{d\tau} J(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau = \int\limits_{D_i} \Big[\widehat{\lambda}_{ix}\widehat{u}_i + \widehat{\mu}_{iy}\widehat{u}_i -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}\widehat{u}_j - g_i(\tau,\widehat{u}) + \widehat{f}_i\Big]\widehat{v}_i J(\xi,\eta,\tau)\,d\xi d\eta d\tau, \tag{24}$$

де через $J(\xi,\eta,\tau)$ позначено Якобіан відображення (23), а $\widehat{w}$ – значення функції w у точці $(\rho_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau),\tau)$.

З рівності (24) випливає, що

$$\frac{d\widehat{u}_i}{d\tau} = \widehat{\lambda}_{ix}\widehat{u}_i + \widehat{\mu}_{iy}\widehat{u}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}\widehat{u}_j - g_i(\tau, \widehat{u}) + \widehat{f}_i \qquad (25)$$

в області D_i. Отже, функції u_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ майже всюди задовольняють систему (1). Використовуючи рівняння (22), легко показати, що $\theta_i(y,t) = u_i(a,y,t)$, $\widehat{\theta}_i(x,t) = u_i(x,b,t)$, $u_i(0,y,t) = 0$, $u_i(x,0,t) = 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Крім того, рівності (22) є правильними і для функцій $v_i = u_i$. Оскільки τ_0 є довільним з інтервалу $(-\infty, T)$, то це завершує доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку від супротивного. Нехай існують два узагальнені розв'язки $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1), (2). Тоді віднявши рівності (3), записані для кожної функції $u^{(j)}$ $j \in \{1,2\}$ і вибравши $v(x,y,t) = (u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t))\psi(t)$, аналогічно як (20) одержимо, що інтеграл

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^{n} [u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t)]^2 \, dxdydt$$

є як завгодно малим для довільного фіксованого t_1. Звідси випливає, що $u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t) = 0$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

1. *Кирилич В.М., Мишкіс А.Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу //Доп. АН УРСР. Сер.А.– 1991. – N 5.– С.8–10.

2. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Краевые задачи без начальных условий для линейной однородной системы уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28. – N 3. – С.463–469.

3. *Lavrenyuk S.P., Zareba L.* Nonlocal problem for the nonlinear system of the first order without initial conditions // Математичні студії. – 2000. – Т.14. – N 2. – 150–158.

4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

FOURIER PROBLEM FOR ONE NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

Sergiy Lavrenyuk, Marianna Oliskevych

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Some sufficient conditions the uniqueness and existence of a solution (in the sence of an integral equality) of the problem without initial conditions for nonlinear hyperbolic system of the first order with three independent variables are obtained. These conditions do not depend on the behaviour of a solution at $t \to -\infty$. For investigation there is used the Galiorkin's method.

Key words: hyperbolic system of the first order, problem without initial conditions.

Стаття надійшла до редколегії 05.06.2001
Прийнята до друку 20.06.2002