УДК 517.927.2

УЗАГАЛЬНЕНИЙ НЕСАМОСПРЯЖЕНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВОСІ

Олександр МАХНЕЙ

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

За допомогою класичного і некласичного інтегралів Рімана-Стільтьєса та методу введення квазіпохідних побудовано деякі розв'язки несамоспряженого диференціального рівняння другого порядку з мірою (узагальненою похідною функції обмеженої варіації) на додатній півосі. Їх використання дає змогу визначити спектральні властивості диференціального оператора й побудувати розкладення за головними функціями.

Ключові слова: диференціальний оператор другого порядку з мірою на необмеженому проміжку, спектр оператора.

Властивості диференціальних операторів з гладкими (достатню кількість разів неперервно диференційовними) або принаймні сумовними за Лебегом коефіцієнтами вивчено і висвітлено в літературі досить добре. Однак в задачах прикладного характеру часто трапляються узагальнені функції в коефіцієнтах відповідних диференціальних виразів. У зв'язку з бурхливим розвитком теорії узагальнених функцій можна провести узагальнення деяких відомих результатів за допомогою введення квазіпохідних.

Д. Шин [1] першим застосував для досліджень апарат квазіпохідних, що дало змогу відмовитись від вимоги гладкості коефіцієнтів. Однак він і його послідовники вивчали лише диференціальні оператори з неперервними чи сумовними коефіцієнтами.

У цій праці на основі аналізу розв'язків диференціального рівняння

$$l(y) = \lambda y, \tag{1}$$

де $l(y) = -y'' + p(x)\,y$, $p(x) = q'(x)$, $q(x) \in BV^+[0,\infty)$ (тут $BV^+[0,\infty)$ – простір неперервних праворуч функцій обмеженої варіації на додатній півосі, λ – комплексний параметр, $q(x)$ – комплекснозначна функція, а знак "$'$" означає узагальнене диференціювання), робимо висновок про спектр диференціального оператора L, породженого диференціальним виразом $l(y)$ і крайовою умовою

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

та про можливість розкладення в ряд за головними функціями. Результати виявляються аналогічними до відомого випадку, коли $p(x)$ є сумовною функцією (див. [2]).

1. Розв'язки $s(x, \lambda)$ **і** $c(x, \lambda)$. Прийнявши $\lambda = \rho^2$, ми отримаємо з (1) рівняння

$$y'' + \rho^2 y = p(x)y. \tag{3}$$

За допомогою вектора $Y = \text{colon}\,(y, y')$ зведемо це рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'(x)Y \tag{4}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(x) - \rho^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

звідки видно, що

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$ на $[0, \infty)$, а, отже, система (4) – коректна, тобто розв'язок рівняння (1) з початковими умовами

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y_0 \tag{5}$$

існує і єдиний [3]. Відомо з [4, с. 28], що він є абсолютно неперервним на проміжку $[0, B]$ ($y(x) \in AC[0, B]$) для як завгодно великого $B > 0$; крім того, $y'(x) \in BV^+[0, B]$. Тим самим методом можна показати, що для $y(x) \in L_2[0, \infty)$ виконується сильніше твердження $y(x) \in AC[0, \infty) \bigcap L_2[0, \infty)$, $y'(x) \in BV^+[0, \infty) \bigcap L_2[0, \infty)$.

Якщо розглядати праву частину рівняння (3) як "неоднорідність", то векторне рівняння (4) можна подати у такому вигляді:

$$Y' = C_1'Y + C_2'Y, \;\; C_1'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^2 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

За формулою Коші для неоднорідного рівняння (див. [5])

$$Y(x) = B(x, 0)Y_0 + \int_0^x B(x, t)dC_2(t)Y(t), \tag{6}$$

де $B(x, t)$ – фундаментальна матриця "однорідної" системи

$$Y' = C_1'Y \tag{7}$$

має вигляд (див. [6])

$$B(x,t)=\begin{pmatrix} Q^{\{1\}}(x,t) & Q(x,t) \\ Q^{(1)\{1\}}(x,t) & Q^{(1)}(x,t) \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

де $Q(x,t)$ – функція Коші рівняння $y''+\rho^2 y=0$, якому відповідає векторне рівняння (7). Круглі дужки в (8) позначають похідну за змінною x, а фігурні – квазіпохідну за t, яка згідно з [4, с. 29] визначається формулою $z^{\{1\}}=-z'$. Легко перевірити, що функція Коші

$$Q(x,t)=\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}.$$

Використавши дві останні формули та (8), можна розписати (6) у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Стільтьєса

$$\begin{cases} y(x)=c_1\cos\rho x+\frac{c_2}{\rho}\sin\rho x+\int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}y(t)dq(t), \\ y'(x)=-c_1\rho\sin\rho x+c_2\cos\rho x+\int\limits_0^x \cos\rho(x-t)y(t)dq(t). \end{cases}$$

Позначимо через $s(x,\rho^2)$ і $c(x,\rho^2)$ розв'язки рівняння (3), що задовольняють початкові умови

$$s(0,\rho^2)=0,\ s'_x(0,\rho^2)=1,\ :c(0,\rho^2)=1,\ c'_x(0,\rho^2)=0.$$

Неважко довести (так само, як це зроблено в праці [7]), що $s(x,\rho^2)$ і $c(x,\rho^2)$ при $x\geqslant 0$ є цілими аналітичними функціями параметра ρ^2.

Зрозуміло, що при $c_1=0$, $c_2=1$, $\rho\neq 0$, з першого рівняння системи (10) отримуємо функцію $s(x,\rho^2)$. Прийнявши, що $s(x,\rho^2)=\rho^{-1}e^{-i\rho x}z(x,\rho)$, одержимо

$$z(x,\rho)=\sin\rho x e^{i\rho x}+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)e^{i\rho(x-t)}z(t,\rho)dq(t).$$

Припустимо, що $\mathrm{Im}\rho\geqslant 0$, а, отже, $\left|\sin\rho x e^{i\rho x}\right|\leqslant 1$ для всіх $x\geqslant 0$. Тоді

$$|z(x,\rho)|\leqslant 1+\frac{1}{|\rho|}\int\limits_0^x |z(t,\rho)||dq(t)|.$$

Внаслідок узагальненої леми Гронуолла-Беллмана (див. [8]) з останньої нерівності випливає такий результат.

Теорема 1. *При* $\mathrm{Im}\rho\geqslant 0$, $\rho\neq 0$ *для всіх* $x\geqslant 0$ *виконується нерівність*

$$\left|\rho s(x.\rho^2)\right|\leqslant\exp\left\{\frac{1}{|\rho|}\mathop{V}\limits_0^x[q]+x\mathrm{Im}\rho\right\},$$

де $\mathop{V}\limits_a^b[g]$ *– варіація функції* $q(x)$ *від 0 до* x.

2. Розв'язок $e(x,\rho)$. Нехай $\sigma(x)=\int\limits_x^\infty |dq(t)|<\infty$, $x\geqslant 0$.

Теорема 2. *Рівняння (3) має розв'язок $y = e(x, \rho)$, що задовольняє інтегральне рівняння*

$$e(x,\rho) = e^{ix\rho} - \int_x^\infty \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} e(t,\rho)dq(t) \tag{11}$$

при $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *і виконанні умови* $\frac{\sigma(x)}{|\rho|} < 1$ *для* $x \geqslant 0$. *Для кожного* $\delta > 0$ *при* $x \to \infty$

$$e(x,\rho) = e^{i\rho x}[1 + o(1)],\ e'_x(x,\rho) = e^{i\rho x}[i\rho + o(1)]$$

рівномірно в області $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Крім того, при* $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$ *і* $\rho \to \infty$

$$e(x,\rho) = e^{i\rho x}[1 + O(1/\rho)],\ e'_x(x,\rho) = i\rho e^{i\rho x}[1 + O(1/\rho)]$$

рівномірно за $x \geqslant 0$. *Для кожного* $x \geqslant 0$ *розв'язок* $e(x,\rho)$ *є неперервним за* ρ *при* $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *і регулярним за* ρ *при* $\mathrm{Im}\rho > 0$.

Доведення теореми можна провести міркуваннями, аналогічними до [2, с. 446] і [9, с. 195–197] (з тією різницею, що замість інтегралів Рімана фігуруватимуть інтеграли Рімана-Стільтьєса). Зауважимо, що безпосередня перевірка того, що розв'язок рівняння (11) задовольняє рівняння (3), буде правильною, бо $e(x,\rho)$ є тоді розв'язком деякої початкової задачі (3), (5), а, отже, його можна диференціювати, причому друга похідна береться в узагальненому сенсі.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають обмежену варіацію і є неперервними праворуч на кожному підінтервалі $[c,d] \subset (a,b)$. Тоді символ

$$\int_c^d f(x)dg(x) = \int_c^d f(x)dg_c(x) + \sum_{c\leqslant x\leqslant d} f(x-0)[g(x) - g(x-0)], \tag{13}$$

де $g_c(x)$ – неперервна компонента функції $g(x)$, називається *некласичним інтегралом Рімана-Стільтьєса* (див. [10]).

Теорема 3. *Якщо виконується умова*

$$\sigma_1(x) = \int_x^\infty t|dq(t)| < \infty,\ x \geqslant 0, \tag{14}$$

то розв'язок $e(x,\rho)$ *рівняння (3) існує також при* $\rho = 0$. *Він може бути поданий формулою*

$$e(x,\rho) = e^{ix\rho} + \int_x^\infty K(x,t)e^{it\rho}dt,\ x \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\rho \geqslant 0, \tag{15}$$

де ядро $K(x,t)$ *зображається у вигляді*

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty dq(s) + R(x,t), \tag{16}$$

$$R(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s) \int\limits_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s) \int\limits_{s}^{t+s-x} K(s,u)du,$$

причому

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right). \tag{17}$$

Крім того,

$$e'_x(x,\rho) = i\rho e^{ix\rho} - \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}\left[e^{i\rho(2s-x)} + e^{ix\rho}\right]dq(s) + \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{\infty} R(x,t)e^{it\rho}dt, \tag{18}$$

причому

$$|R'_x(x,t)|, |R'_t(x,t)| \leqslant \tfrac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\tfrac{x+t}{2}\right)\sigma(x),\ 0 \leqslant x \leqslant t < \infty. \tag{19}$$

Функції $K(x,t)$, $R'_x(x,t)$, $R'_t(x,t)$ за кожною змінною при фіксованій іншій є неперервними праворуч функціями обмеженої варіації на $[0,\infty)$.

Доведення. Розглянемо рівняння (11) і будемо формально шукати його розв'язок у вигляді (15). Підставивши в (11) замість $e(x,\rho)$ його вираз (15), отримаємо

$$\int\limits_{x}^{\infty} K(x,t)e^{it\rho}dt = -\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}e^{is\rho}dq(s) - \int\limits_{x}^{\infty}dq(s)\int\limits_{s}^{\infty}\frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}e^{i\rho u}K(s,u)du =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{20}$$

Перетворимо інтеграли в правій частині співвідношення (20), скориставшись тим, що

$$\frac{\sin\rho(s-x)}{\rho}e^{i\rho s} = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{2s-x} e^{i\rho t}dt,\ :\ \frac{\sin\rho(s-x)}{\rho}e^{i\rho u} = \frac{1}{2}\int\limits_{u+x-s}^{u+s-x} e^{i\rho t}dt,$$

і змінивши в них порядок інтегрування. В результаті цього одержимо

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{i\rho t}\left[\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\right]dt;$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} e^{i\rho t}\left[\int\limits_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s)\int\limits_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du + \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\int\limits_{s}^{t+s-x} K(s,u)du\right]dt.$$

Інтеграли в I_1 та I_2 ми розуміємо як некласичні інтеграли Рімана-Стільтьєса (властивості функції $K(x,t)$ визначимо нижче). Зауважимо, що законність перестановки порядку інтегрування в інтегралі I_1 легко доводиться за допомогою умови (14) і формули Діріхле для некласичного інтеграла Рімана-Стільтьєса (див. [10]); щодо інтеграла I_2, то в ньому ця операція виконана формально і буде обґрунтована пізніше.

Підставимо знайдені для I_1 і I_2 вирази в рівність (20) і, скориставшись єдиністю розкладення в інтеграл Фур'є, отримаємо таке інтегральне рівняння $(0 \leqslant x \leqslant t)$

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s) + \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s)\int_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\int_{s}^{t+s-x} K(s,u)du. \tag{21}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок, який можна отримати методом послідовних наближень. Прийнявши, що

$$K_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s),$$

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s)\int_{t+x-s}^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\int_{s}^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)du, \tag{22}$$

одержимо такі оцінки:

$$|K_0(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \ |K_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma_1(x),$$

а потім за індукцією

$$|K_m(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\frac{\sigma_1^m(x)}{m!} \quad (m = 0,1,2,\dots). \tag{23}$$

З цих оцінок випливає, що ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$ збігається рівномірно в області $0 \leqslant x \leqslant t$ і для його суми $K(x,t)$ справджується нерівність (17).

Формули (22) і (13) означають, що при обмеженості варіації неперервної праворуч функції $K_{m-1}(x,t)$ за кожною змінною при фіксованій іншій і оцінці (23) на нескінченності функція $K_m(x,t)$ має такі самі властивості. Функцію обмеженої варіації можна подати у вигляді різниці двох монотонних функцій; на підставі цього неважко довести, що $K(x,t)$ як сума ряду матиме обмежену варіацію за кожною змінною при фіксованій іншій на $[0,\infty)$.

Внаслідок (14) маємо

$$\int_{x}^{\infty} |K(x,t)|dt \leqslant e^{\sigma_1(x)}\int_{x}^{\infty}\sigma(u)du \leqslant e^{\sigma_1(x)}\sigma_1(x) \tag{24}$$

і тепер можемо виправдати зміну порядку інтегрування в інтегралі I_2. Справді, внаслідок обмеженості варіації підінтегральних функцій в I_2 можна двічі застосувати формулу Діріхле (див. [10]). Доведено, що всі інтеграли, наведені вище, існують, а формула (15) з ядром $K(x,t)$, що задовольняє рівняння (21), дає розв'язок рівняння (3) при $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$.

Залишилось довести формули (18) і (19). Скориставшись позначенням (16) і продиференціювавши (15) за x, легко прийти до рівності (18). Врахувавши (21), можна побачити, що при $0 \leqslant x \leqslant t$

$$R'_x(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\frac{x+t}{2}} K(s,t+x-s)dq(s) - \frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty} K(s,t+s-x)dq(s),$$

звідки, на підставі оцінок (14) і (17), отримаємо (19). Обмеженість варіації функції $R'_x(x,t)$ випливає з властивостей функції $K(x,t)$. Для $R'_t(x,t)$ викладення аналогічне. Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо при деякому $\gamma \geqslant 0$ збігається інтеграл*

$$\sigma_{1+\gamma}(x) = \int\limits_x^{\infty} t^{1+\gamma}|dq(t)|,$$

то при $x \to \infty$ $e(x,0) = 1 + o(x^{-\gamma})$, $e'_x(x,0) = o(x^{-1-\gamma})$.

Доведення. Враховуючи формули (15), (24) і умову збіжності інтеграла $\sigma_{1+\gamma}(x)$, маємо при $x \to \infty$ оцінку

$$|e(x,0)| \leqslant 1 + \int\limits_x^{\infty} |K(x,t)|dt \leqslant 1 + e^{\sigma_1(x)}\int\limits_x^{\infty} t|dq(t)| \leqslant 1 + o(x^{-\gamma}).$$

З формули (18) видно, що

$$e'_x(x,0) = -\int\limits_x^{\infty} dq(t) + \int\limits_x^{\infty} R'_x(x,t)dt - R(x,x).$$

Отже, згідно з рівністю (16) і нерівностями (17), (19), (24) та умови теореми при $x \to \infty$ отримаємо

$$|e'_x(x,0)| \leqslant \frac{3}{2}\sigma(x) + e^{\sigma_1(x)}\sigma(x)\sigma_1(x) + \frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma(x) = o(x^{-1-\gamma}),$$

що й доводить теорему.

3. Розв'язок $\hat{e}(x,\rho)$. Обмежений розв'язок $e(x,\rho)$ відповідає розв'язку $e^{ix\rho}$ рівняння $y'' + \rho^2 y = 0$. Можна побудувати також необмежений розв'язок $\hat{e}(x,\rho)$ рівняння (3), відповідний розв'язку $e^{-ix\rho}$ рівняння $y'' + \rho^2 y = 0$.

Теорема 5. *Для кожного $\delta > 0$ існує таке досить велике $a = a_\delta > 0$, що рівняння (3) має розв'язок $y = \hat{e}(x,\rho)$, який задовольняє інтегральне рівняння типу Вольтерри-Стільтьєса*

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-ix\rho} - \frac{i}{2\rho}\int\limits_a^{x} e^{i(x-t)\rho}\hat{e}(t,\rho)dq(t) - \frac{i}{2\rho}\int\limits_x^{\infty} e^{i(t-x)\rho}\hat{e}(t,\rho)dq(t) \qquad (25)$$

в області $x \geqslant a$, $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Крім того, для кожного* $\alpha > 0$, *при* $x \to \infty$

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-ix\rho}[1 + o(1)],\ \hat{e}'_x(x,\rho) = e^{-ix\rho}[-i\rho + o(1)]$$

рівномірно в області $\mathrm{Im}\rho \geqslant \alpha$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Розв'язок* $\hat{e}(x,\rho)$ *є регулярним за* ρ *в області* $\mathrm{Im}\rho > 0$, $|\rho| \geqslant \delta$, *і при* $|\rho| \to \infty$ *рівномірно стосовно* $x \geqslant 0$

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-i\rho x}[1 + O(1/\rho)],\ \hat{e}'_x(x,\rho) = -i\rho e^{-i\rho x}[1 + O(1/\rho)].$$

Доведення теореми виконується аналогічно до доведення теореми 2.

Інтегральне рівняння (25) визначає функцію $\hat{e}(x,\rho)$ лише при $x \geqslant a$. Ми можемо розглядати функцію $\hat{e}(x,\rho)$ на півосі $x \geqslant 0$, продовжуючи її в інтервал $0 \leqslant x \leqslant a$ як розв'язок рівняння (3).

Розглянемо випадок $\rho = 0$. Так само, як і в [2, с. 449], можна довести, що розв'язок $\hat{e}(x,0)$ інтегрального рівняння

$$\hat{e}(x,0) = x - x\int_x^\infty \hat{e}(t,0)dq(t) - \int_a^x t\hat{e}(t,0)dq(t)\ \ (a > 0)$$

існує і задовольняє рівняння $l(y) = 0$. Зауважимо, що $\hat{e}(x,0) \in AC[0,B]$, $\hat{e}'_x(x,0) \in BV^+[0,B]$ для будь-якого $B > 0$.

Теорема 6. *Якщо при деякому* $\gamma \geqslant 0$ *збігається інтеграл* $\sigma_{1+\gamma}(x)$, *то при* $x \to \infty$

$$\hat{e}(x,0) = x[1 + o(x^{-\gamma})],\ \hat{e}'_x(x,0) = 1 + o(x^{-\gamma}).$$

Доведення цієї теореми можна провести так само, як в [11, с. 31–33] для аналогічного результату при сумовній функції $p(x)$ (зрозуміло, що замість інтегралів Рімана потрібно у відповідних місцях використовувати інтеграли Рімана-Стільтьєса).

4. Спектр оператора L та розкладення за головними функціями. Нехай L – це лінійний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $l(y)$ і крайовою умовою (2), з областю визначення

$$D(L) = \left\{f : f \in AC[0,\infty) \bigcap L_2[0,\infty),\ l(f) \in L_2[0,\infty),\ f(0) = 0\right\}.$$

Користуючись теоремами 1–6 міркуваннями аналогічними до праці [2, с. 449–454] можна отримати такі самі спектральні властивості оператора L, що й у "класичному" випадку. Зокрема, множина власних значень оператора L є не більш ніж зліченною; вони задовольняють умови $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Im}\rho > 0$, $e(0,\rho) = 0$; всі числа вигляду $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Im}\rho > 0$, $e(0,\rho) \neq 0$ належать резольвентній множині; всі числа $\lambda \geqslant 0$ належать неперервному спектру.

Припустимо, що виконується додаткове обмеження: існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x}|dq(t)| < \infty.$$

Звідси випливає, що

$$\sigma(x) = \int\limits_x^{\infty} |dq(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon x}, \ \sigma_1(x) = \int\limits_x^{\infty} t|dq(t)| \leqslant C_{\varepsilon'} e^{-\varepsilon' x},$$

де $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, а C і $C_{\varepsilon'}$ – додатні сталі. Отже, оцінки (17) і (19) можна посилити так:

$$|K(x,t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon \frac{x+t}{2}}; \ |R'_x(x,t)|, |R'_t(x,t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon\left(\frac{3}{2}x+t\right)};$$

тут $0 \leqslant x \leqslant t < \infty$, а C – деяке стале число.

Сингулярними числами оператора L назвемо корені ρ_k рівняння $e(0,\rho) = 0$, що задовольняють умови $\rho_k \neq 0$, $\mathrm{Im}\rho_k \geqslant 0$. Можна довести (див. [2, с. 456]), що множина їх є скінченною. Недійсні сингулярні числа визначають власні значення оператора $\lambda_k = \rho_k^2$, $k = \overline{1,\alpha}$, а числа $\lambda_k > 0$, $k = \overline{\alpha+1,\beta}$ назвемо його *спектральними особливостями.*

Функції $s^{(m)}(x,\lambda_k) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m s(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k}$, $k = \overline{1,\alpha}$, $m = \overline{0, m_k - 1}$ (m_k – кратність сингулярного числа ρ_k) назвемо, використовуючи [2, с. 457], *головними функціями точкового спектра* оператора L, а функції $s^{(m)}(x,\lambda_k)$, $k = \overline{\alpha+1,\beta}$, $m = \overline{0, m_k - 1}$ – *головними функціями спектральних особливостей.*

Подібно до того, як це зроблено в [2] за допомогою L-перетворення Фур'є, можна показати, що кожна функція $f(x) \in L_2[0,\infty)$ розкладається за головними функціями обох типів, однак це розкладення збігається за слабшою нормою, ніж норма простору $L_2[0,\infty)$. Для тих функцій $f \in L_2[0,\infty)$, для яких виконується ще одна додаткова умова, це розкладення збігається за нормою простору $L_2[0,\infty)$. L-перетворення Фур'є та розкладення за головними функціями можна побудувати і для ширших класів, ніж $L_2[0,\infty)$, зокрема для помірно зростаючих функцій (див. [2, с. 478–490]).

1. *Шин Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сб. – 1940. – Т. 7(49). – N 3. – С. 479-532.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969.
3. *Стасюк М. Ф., Таций Р. М.* Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1988. – N 222. – С. 89-90.
4. *Тацій Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Львів, 1994. (Препринт / НАН України. ІППММ; 2-94).
5. *Стасюк М. Ф., Таций Р. М.* Однозначно определенные неоднородные дифференциальные уравнения с мерами // 1 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тезисы докладов. Киев, 16-18 мая, 1989г. – К., 1989. – С. 53.
6. *Таций Р. М., Пахолок Б. Б.* Про структуру фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Докл. АН УССР. - Сер. А. – 1989. – N 4. – С. 25-28.
7. *Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б.* Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165-167.

8. *Пахолок Б. Б.* Об одном неравенстве типа Гронуолла-Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1989. – N 232. – С. 109-110.

9. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного оператора второго порядка на полуоси // Труды Московского математического общества. – 1954. – Т.3. – С. 181-270.

10. *Стасюк М. Ф.* Неклассический интеграл Римана-Стильтьеса и его применение в теории линейных систем. – К., 1985. – 25 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, 2383.

11. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. – Харьков, 1960.

THE GENERALIZED NONSELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR OF THE SECOND ORDER ON SEMIAXIS

Olexander Makhney

National University of Technology in Lviv
12 Bandery Str. 79013 Lviv, Ukraine

Some solutions of a nonselfajoint differential equation of the second order with the measure (generalized derivative of function of bounded variation) on positive semiaxis are constructed with the help of classical and unclassical Riman-Stieltjes's integrals and the method of introduction of quasiderivatives. Their use allows to determine spectral properties of the differential operator and to construct the development by main functions.

Key words: differential operator of the second order with the measure on unbounded interval, spectrum of the operator.

Стаття надійшла до редколегії 15.11.2001

Прийнята до друку 20.06.2002