ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.102–108 *Ser.Mech-Math.2002. Vol.60.P.102–108*

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ НА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ШАРУ

Тарас НАГІРНИЙ, Костянтин ЧЕРВІНКА
Центр математичного моделювання
вул. Дудаєва, 15, м.Львів, Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Сформульовано крайові задачі локально-градієнтної термопружності. Ключова система рівнянь, записана для вектора переміщення, збурень температури й хімічного потенціалу, є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху. Використовуючи операцію усереднення на періоді коливань, одержано систему рівнянь на усереднені та коливні складові полів і запропоновано методику їх наближеного розв'язування (використано метод розвинення за малим параметром).

Розглянуто власні коливання шару для різних умов закріплення його поверхонь (нерухомі поверхні, одна поверхня нерухома, вільні поверхні). Проведено аналіз відповідних хвильових рівнянь. Досліджено залежність частот власних коливань від температури та параметрів, які характеризують приповерхневу неоднорідність. Одержані результати є важливими для опису хвильових процесів у тонких плівках, для яких властивий розмірний (масштабний) ефект.

Ключові слова: локально-градієнтна термопружність, хімічний потенціал.

Відомо, що поведінка деформівних систем суттєво залежить від температури, при якій вони експлуатуються. Відхилення температури від початкової може призводити до виникнення конструкційних напружень і так суттєво впливати на експлуатаційні властивості конкретних елементів.

У цій праці вивчено вплив температури на приповерхневу неоднорідність і хвильові процеси в шарі за локально-градієнтного підходу. Зазначимо, що вплив приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань шару для ізотермічного наближення досліджено в [4].

Повна система рівнянь локально-градієнтного термопружного тіла складається з рівнянь балансу імпульсу, маси, ентропії та визначальних співвідношень. Якщо за розв'язуючі функції вибрати вектор переміщення $\vec{u}$, відхилення температури $\theta \equiv T - T_*$ від початкової T_* та відхилення хімічного потенціалу $\eta \equiv H - H_*$ від початкового значення H_*, то ключову систему рівнянь, що описує динамічні процеси в термопружному тілі, з врахуванням ефектів локальної неоднорідності відповідно до [5, 6], можна записати у вигляді

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\eta - \alpha_t\vec{\nabla}\theta) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(\varrho_* - (3\lambda + 2\mu)\alpha_m \vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \alpha_{mm}\eta - \beta\theta\right)\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right],$$

$$\nabla^2\eta - \kappa^2 : \eta - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \kappa_\theta^2 : \theta = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\theta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + c_v : \frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \beta T_* : \frac{\partial\eta}{\partial\tau}, \tag{1}$$

де ϱ_* – густина матеріалу тіла у відліковий момент часу, $\vec{\nabla}$ – вектор-оператор Гамільтона, τ – час, " $\cdot$ " – внутрішній добуток, $\lambda, \mu, \alpha_m, \alpha_t, \beta, \alpha_{mm}, \kappa, \kappa_u, \kappa_\theta, \lambda_s, c_v$ – сталі матеріалу.

Система рівнянь (1) є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху. Якщо поведінка тіла описується нелінійною системою рівнянь і воно перебуває під дією періодичного силового навантаження, то у ньому існують коливні та повільно змінні на періоді коливань складові полів. Тому відповідно до [1, 2] при дослідженні хвильових процесів розв'язок таких рівнянь природно подати у вигляді суми повільно змінної в часі, чи як її ще називають осередненої $\overline{\varphi}$, та коливної $\widetilde{\varphi}$ складових $\varphi = \overline{\varphi} + \widetilde{\varphi}$. Таке подання зробимо, грунтуючись на операції осереднення на періоді коливань τ_0 [1, 3]

$$\overline{\varphi}(\vec{r},\tau) \equiv \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_0}\varphi(\vec{r},\xi)d\xi,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки тіла.

Застосовуючи операцію осереднення до рівнянь (1) та нехтуючи осередненою складовою сили інерції, для $\overline{\vec{u}}, \overline{\eta}, \overline{\theta}$ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\overline{\theta}) = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \kappa^2 : \overline{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \overline{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s\nabla^2\overline{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\tau} - \beta T_* : \frac{\partial\overline{\eta}}{\partial\tau}. \tag{2}$$

На цій підставі для коливних складових $\widetilde{\vec{u}}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\theta}$ маємо

$$\mu\nabla^2\widetilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\widetilde{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\widetilde{\theta}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\left(\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \alpha_{mm}\overline{\eta} - \beta\overline{\theta}\right)\frac{\partial\widetilde{\vec{u}}}{\partial\tau}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\widetilde{\left((3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} + \alpha_{mm}\widetilde{\eta} + \beta\widetilde{\theta}\right)\frac{\partial\widetilde{\vec{u}}}{\partial\tau}}\right),$$

$$\nabla^2\widetilde{\eta} - \kappa^2 : \widetilde{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \widetilde{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\widetilde{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\tau} - \beta T_* : \frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial\tau}. \tag{3}$$

Обмежуючись усталеним режимом та розглядом хвиль основної гармоніки, системи (2), (3) зводимо до вигляду

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\overline{\theta}) = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \kappa^2 : \overline{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \overline{\theta} = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\theta} = 0; \tag{4}$$

$$\mu\nabla^2\widetilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\widetilde{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\widetilde{\theta}) =$$

$$= \left(\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \alpha_{mm}\overline{\eta} - \beta\overline{\theta}\right)\frac{\partial^2\widetilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2},$$

$$\nabla^2\widetilde{\eta} - \kappa^2 : \widetilde{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \widetilde{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\widetilde{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\tau} - \beta T_* : \frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial\tau}. \tag{5}$$

Система рівнянь (4) описує рівноважний стан, а (5) — хвильові процеси у термопружному тілі з врахуванням приповерхневої неоднорідності. Тому математично вивчення хвильових процесів зводиться до послідовного визначення осереднених складових на основі (4) при наступному визначенні коливних складових на підставі системи рівнянь (5). Зазначимо, що вона є системою рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Застосуємо співвідношення (4), (5) для вивчення власних частот поперечних коливань шару $|x| \leqslant l$ за різних умов закріплення його поверхонь $x = \pm l$. Нехтуватимемо зв'язаністю коливних складових розглядуваних полів. Вважаючи, що в тілі реалізується одновимірна за просторовою координатою ситуація і приймаючи $u_x = \overline{u} + \widetilde{u}$, одержуємо

$$\overline{u}'' + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(\alpha_m\overline{\eta}' - \alpha_t\overline{\theta}') = 0,$$

$$\overline{\eta}'' - \kappa^2\overline{\eta} - \kappa_u^2\overline{u}' - \kappa_\theta^2\overline{\theta} = 0, \qquad \overline{\theta}'' = 0,$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2} = \left[\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\overline{u}' - \beta\overline{\theta} - \alpha_{mm}\overline{\eta}\right]\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\tau^2}, \tag{6}$$

де штрихом позначено похідні осереднених складових за просторовою координатою. Для знаходження складових $\overline{u}, \overline{\eta}, \overline{\theta}$ використаємо перші три рівняння (6) та такі крайові умови:

$$\overline{\theta}|_{x=\pm l} = \theta_a, \qquad \overline{\eta}|_{x=\pm l} = \eta_a,$$

$$\left.\left[\frac{d\overline{u}}{dx} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(\alpha_m\overline{\eta} - \alpha_t\overline{\theta})\right]\right|_{x=\pm l} = 0. \tag{7}$$

Розв'язок крайової задачі (6), (7) має вигляд

$$\overline{\theta}(x) = \theta_a, \qquad \overline{\eta}(x) = \left(\eta_a + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a\right)\frac{\operatorname{ch}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)} - \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a,$$

$$\overline{u}(x) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\alpha_m}{\xi}\left(\eta_a + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a\right)\frac{\mathrm{sh}\,(\xi x)}{\mathrm{ch}\,(\xi l)} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\alpha_t + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\alpha_m\right)\theta_a x,$$

де $\xi^2 = \kappa^2 - \kappa_u^2\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_m$, $\xi_\theta^2 = \kappa_\theta^2 + \kappa_u^2\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_t$.

Для усталених у часі коливань розв'язок $\widetilde{u}$ останнього рівняння системи (6) подамо у вигляді

$$\widetilde{u}(x,\tau) = u(x)\,e^{i\omega\tau}.$$

Тоді для визначення амплітуди $u(x)$ одержуємо рівняння

$$u''(x) + \zeta^2\left(1 + a\,\frac{\mathrm{ch}(\xi x)}{\mathrm{ch}(\xi l)}\right)u(x) = 0, \tag{8}$$

де $a = b\left(\eta_a + \theta_a\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right)\Big/(\varrho_* + \gamma\theta_a) \equiv \left(\frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha_m^2}{\lambda+2\mu} - \alpha_{mm}\right)\left(\eta_a + \theta_a\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right)\Big/(\varrho_* + \gamma\theta_a)$, $\zeta^2 = \frac{\omega^2}{\lambda+2\mu}(\varrho_* + \gamma\theta_a)$, $\quad \gamma = \alpha_{mm}\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2} - \frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha_m}{\lambda+2\mu}\left(\alpha_t + \alpha_m\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right) - \beta$.

Використовуючи розвинення розв'язку за малим порівняно з одиницею параметром $\alpha \equiv a/\mathrm{ch}(\xi l) \ll 1$ та обмежившись першим наближенням $u(x) \approx u_0(x) + \alpha u_1(x)$ для $u_0(x), u_1(x)$, одержуємо

$$u_0''(x) + \zeta^2 u_0(x) = 0,$$

$$u_1''(x) + \zeta^2 u_1(x) + \zeta^2\mathrm{ch}(\xi x)u_0(x) = 0.$$

Розв'язком цих рівнянь є функції

$$u_0(x) = A_0\cos(\zeta x) + B_0\sin(\zeta x),$$

$$u_1(x) = A_1\cos(\zeta x) + B_1\sin(\zeta x) + A_0\zeta\,\big(-V_1(x)\cos(\zeta x) + $$
$$+ V_2\sin(\zeta x)\big) + B_0\zeta\,\big(V_3(x)\cos(\zeta x) + V_1\sin(\zeta x)\big),$$

де

$$V_1(x) = \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\mathrm{ch}(\xi x)\cos(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\mathrm{sh}(\xi x)\sin(2\zeta x)\right),$$

$$V_2(x) = -\frac{1}{2\xi}\mathrm{sh}(\xi x) - \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\mathrm{ch}(\xi x)\sin(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\mathrm{sh}(\xi x)\cos(2\zeta x)\right),$$

$$V_3(x) = \frac{1}{2\xi}\mathrm{sh}(\xi x) - \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\mathrm{ch}(\xi x)\sin(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\mathrm{sh}(\xi x)\cos(2\zeta x)\right).$$

На цій підставі для $u(x)$ маємо

$$u(x) = A\left\{\cos(\zeta x) + \alpha\zeta\left[-V_1(x)\cos(\zeta x) + V_2(x)\sin(\zeta x)\right]\right\} +$$
$$+B\left\{\sin(\zeta x) + \alpha\zeta\left[V_3(x)\cos(\zeta x) + V_1(x)\sin(\zeta x)\right]\right\}, \tag{9}$$

де $A = A_0 + \alpha A_1, B = B_0 + \alpha B_1$ – довільні константи.

Конкретизуємо розв'язок (9) для таких граничних умов: випадок 1 – коливна складова на поверхнях дорівнює нулю, випадок 2 – коливна складова на одній з поверхонь та її похідна на іншій дорівнюють нулю та випадок 3 – похідні коливних складових переміщення на поверхнях шару нульові. Враховуємо, що можна незалежно забезпечити крайові умови, які накладаються на амплітуди коливних складових та осереднені складові полів, що розглядаються.

Випадок 1. Умови

$$u(-l) = 0, \quad u(l) = 0,$$

разом з (9) дають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих A і B. Ненульовий розв'язок цієї системи існує, якщо дорівнює нулю її визначник. Нехтуючи доданками вищого порядку малості, ніж α^1, для товстих порівняно з областю приповерхневої неоднорідності шарів ($\zeta l \gg 1$) одержуємо хвильове рівняння

$$\left(1 - \frac{2a\zeta^2}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta l) + \frac{4a\zeta^3}{\xi(\xi^2 + 4\zeta^2)}\cos(2\zeta l) = 0. \tag{10}$$

Введемо у розгляд хвильове число ζ_0, що відповідає коливанням однорідного шару при початковій температурі ($\theta = 0$). Для нього рівняння (10) є таким:

$$\sin(2\zeta_0 l) = 0. \tag{11}$$

Для наближення $|\zeta/\zeta_0 - 1| \ll 1$ з (10) випливає, що

$$\zeta^{(n)} = \zeta_0^{(n)}\left[1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3}\left(\eta_a + \theta_a \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right) \Big/ (\varrho_* + \gamma\theta_a)\right], \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{12}$$

Отже, власними частотами є

$$\omega_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\varrho_*}$ – швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в однорідному середовищі при $T = T_*$.

Якщо додатково прийняти, що вплив температури на густину є малим, тобто $\gamma\theta_a/\varrho_* \ll 1$, то

$$\omega_1^{(n)} = \zeta_0^{(n)} c_1 \left(1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{\varrho_*(\xi l)^3}(\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2)\right).$$

Випадок 2. Умови на амплітуду коливних складових переміщення мають вигляд

$$u(-l) = 0, \quad u'(l) = 0.$$

Співвідношення, аналогічні до (10)–(13) є такими:

$$\cos(2\zeta l) - \frac{a\zeta}{\xi}\sin(2\zeta l) = 0, \tag{14}$$

$$\cos(2\zeta_0 l) = 0,$$

$$\zeta^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\left(1 - \frac{a}{2\xi l}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$\omega_2^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\left(1 - \frac{b}{2\xi l}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{15}$$

Випадок 3. Для вільних поверхонь шару крайові умови для амплітуд механічних коливань є такими:

$$u'(-l) = 0, \quad u'(l) = 0.$$

Запишемо рівності, що відповідають (10)–(13)

$$\left(1 + \frac{2a\zeta^2}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta l) + a\zeta\left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\cos(2\zeta l) = 0, \tag{16}$$

$$\sin(2\zeta_0 l) = 0,$$

$$\zeta^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \frac{a}{\xi l}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$\omega_3^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \frac{b}{\xi l}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{17}$$

З (13), (15), (17) випливає, що якісна залежність $\omega^{(n)}$ від температури є однаковою для розглядуваних умов закріплення поверхонь шару, разом з тим множники $2/(\xi l)^3$, $1/(2\xi l)$, $1/(\xi l)$ можуть суттєво змінити кількісну залежність. Зрозуміло, що така залежність є суттєвішою для тонких плівок порівняно з товстими шарами, для яких ξl значно більше одиниці. Зі зростанням товщини шару вплив температури на власні частоти зменшується, прямуючи відповідно до

$$\omega_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \; \omega_2^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \; \omega_3^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}.$$

Порівнюючи дані співвідношення з аналогічними для моделі пружного тіла, бачимо, що вираз $c_1 \Big/ \sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}$ можна трактувати як залежність швидкості поширення пружної хвилі від збурення температури. Тобто, для досить товстих шарів вплив температури на частоти власних коливань можна враховувати опосередковано через залежність від температури швидкості поширення пружної хвилі.

---

1. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К., 1971.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974.
3. *Гребенников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М., 1986.
4. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Моделювання хвильових процесів у деформівних твердих тілах з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.117-124
5. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах// Прикл. механика. – 1992. – Т.28. – N 12. – С.3-23.
6. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С., Грицина О.Р., Червинка К.А.* Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. – 2000. – N 6. – С.35-43.

7. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність// Доп. НАН України. – 2000. – N 10. – С.57-62.

SIMULATION AND INVESTIGATION THE INFLUENCE ON TEMPERATURE ON EIGEN VIBRATIONS OF STRIP

Taras Nahirnyi, Kostyantyn Chervinka

Center of mathematical modelling
15 Dudayeva Str, Lviv, Ukraine
Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Boundary value problems of local gradient thermo-elasticity are formulated in the paper. System of differential equations in terms of displacement, disturbances of chemical potential and temperature is nonlinear due to nonlinearity of momentum. With use of the averaging over vibration period procedure it yields a system in term of averaged and wave components and methods to solve the later (using expansion over small parameter) are proposed. The system of averaged components describes nearsurface nonhomogeneity (interface phenomena) in solids. The system of wave components is a nonlinear one (mass density that enters in expression of momentum depends on spatial coordinates and can be derived on the base of averaged component of solution). We consider normal mode of layer vibration under various conditions on its surfaces (the surfaces are fixed, just one is fixed, both are free of load). The corresponding wave equations are analyzed. The frequencies of normal mode vibrations dependences on temperature and nonhomogeneity parameters are investigated. Obtained results mainly contribute to description of wave processes in thin films, where size effects are considerable.

Key words: local gradient thermoelasticity, chemical potential.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2001
Прийнята до друку 20.06.2002