ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.109–114 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.109–114*

УДК 517.53

ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ ДЛЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ НА СМУГАХ ЖОРДАНА

Олег ПІХ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено умови на експоненти $\lambda = (\lambda_n)$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, за яких з обмеженості ряду на множині $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$, де $d(x) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ є неперервною функцією, яка прямує до нуля при $x \to +\infty$, випливає, що $F(z) = \text{const}$.

Ключові слова: ряд Діріхле, теорема єдиності, ціла функція.

Нехай $Q = \{q_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbf{N} \cup \{0\}$, а $E(Q)$ – множина всіх цілих функцій вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{q_n}.$$

У [1] доведено, що у випадку

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty \tag{1}$$

з умови

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}_+\} < +\infty \tag{2}$$

випливає таке:

$$f(z) \equiv \text{const},$$

тобто за виконання умови (1) ціла функція $f \in E(Q)$ може бути обмеженою на додатній дійсній півосі тільки у тривіальному випадку.

Нехай $S(\Lambda)$ клас цілих функцій $f(z)$, зображуваних абсолютно збіжними в усій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$ – фіксована послідовність, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. У статті [2] показано, що за умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \tag{3}$$

ціла функція $f \in S(\Lambda)$ не може бути обмеженою на дійсній осі.

У підкласах класів $E(Q)$ та $S(\Lambda)$, що визначаються різноманітними обмеженнями на зростання максимуму модуля цілої функції, наведені результати неодноразово доповнювали (див., наприклад,[3-6]). Крім того, за умови (3) теореми єдиності доведено в класі $S(\Lambda)$ при заміні в умові (2) $\mathbf{R}_+$ на довільну криву Γ таку, що $z \to \infty$ і $z \in \Gamma$ імплікує $\operatorname{Re} z \to +\infty$ ([7]) або на довільну множину $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$, де $a_k, b_k \in \mathbf{C}$, $|a_k - b_k| = \delta > 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \operatorname{Re} a_k = +\infty$ ([8]).

У класі $E(Q)$ теореми єдиності доводили при заміні в (2) $\mathbf{R}_+$ на так званий криволінійний кут Жордана (див. [9]); усі апріорні умови на послідовність Q є слабшими за (1) і пов'язані з шириною кута Жордана.

У цьому повідомленні в класі $S(\Lambda)$ доведено результат, подібний до отриманих у [9].

Нехай L – клас додатних неперервних монотонно спадних до 0 на $[0; +\infty)$ функцій. Для функцій $d \in L$ множину $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$ називатимемо Жордановою смугою, якщо функція $d(x)$ така, що для кожного достатньо малого $\varepsilon_1 > 0$ і для всіх $x \geqslant x_0$ замкнений круг $\overline{K}(x) = \{z : |z - x| \leqslant (1 - \varepsilon_1)d(x)\} \subset E$ і для кожних $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ функція $\exp\{c_1/d(x + c_2)\}$ опукла на $(0; +\infty)$.

Клас функцій $d \in L$, які задовольняють ці умови, позначимо L_0. Через $D(x)$ позначимо функцію, обернену до функції $\dfrac{1}{d(x)}$, де $d \in L_0$. Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай $d \in L_0$ і $f \in S(\Lambda)$. Якщо виконуються умови*

$$q = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < +\infty, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{t} \ln t < +\infty, \quad n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1, \tag{4}$$

$$(\forall b > 0) : \ \varlimsup_{R\to+\infty} \frac{1}{D(b \ln R)} \sum_{\lambda_n \leqslant R} \frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\sup\{|f(z)| : z \in E\} = C < +\infty, \tag{6}$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. Нехай $P_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{z\lambda_k}$, $n \geqslant 1$, $L(z) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} (1 - (\frac{z}{\lambda_k})^2)$ а $\psi_n(t)$ – асоційована за Борелем з цілою функцією $\dfrac{L(z)}{(z - \lambda_n)L'(\lambda_n)}$$(n \geqslant 1)$. Тоді за умови $n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$ випливає, що для кожного $\alpha \in \mathbf{C}$ та [5, теорема 1.2.1] $1 \leqslant k \leqslant n$

$$a_k e^{\alpha\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \psi_k(z) P_n(z + \alpha) dz, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне.

Зауважимо, що

$$\psi_k(z) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int\limits_{0}^{\infty e^{i\varphi(t)}} \frac{L(\tau)}{\tau - \lambda_k} e^{-\tau z} d\tau, \tag{8}$$

де $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ – довільне (див. [5,с.12]). Нехай $M(\alpha, \varepsilon, f) = \max\{|f(z)| : |z - \alpha| \leqslant \varepsilon\}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$. Позаяк з (8) при $z = re^{i\varphi}, \varphi_0 = -\varphi, \tau = te^{-i\varphi}$ отримуємо

$$\psi_k(re^{i\varphi}) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{L(te^{-i\varphi})}{te^{-i\varphi} - \lambda_k} e^{-tr} e^{-i\varphi} dt,$$

$$\left|\frac{L(\tau)}{\tau - \lambda_k}\right| = \left|\frac{(1 + \frac{\tau}{\lambda_k})}{-\lambda_k} \prod_{s=1, s\neq k}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{\tau}{\lambda_s}\right)^2\right)\right| \leqslant \frac{1 + \frac{t}{\lambda_k}}{\lambda_k} \prod_{s=1, s\neq k}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{t}{\lambda_s}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{M(0, t, L)}{\lambda_k(1 + (\frac{t}{\lambda_k})^2)} \left(1 + \frac{t}{\lambda_k}\right),$$

то

$$\left|\psi_k(re^{i\varphi})\right| \leqslant \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tr} \frac{(t + \lambda_k)}{t^2 + \lambda_k^2} M(0, t, L) dt.$$

Звідси з рівності (7) для всіх $\alpha \in \mathbf{C}$ та $1 \leqslant k \leqslant n$ маємо

$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \left|\int\limits_0^{2\pi} \psi_k(\varepsilon e^{i\varphi}) P_n(\varepsilon e^{i\varphi} + \alpha) e^{i\varphi} d\varphi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha, \varepsilon, P_n)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon} \frac{t + \lambda_k}{t^2 + \lambda_k^2} M(0, t, L) dt.$$

Зауважимо, що наведені викладки подібні до [5, с.25-26]. Якщо в останній нерівності перейти до границі при $n \to +\infty$, то для всіх $\alpha \in \mathbf{C}$ і $k \geqslant 1$ одержимо

$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha, \varepsilon, f)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon} \frac{t + \lambda_k}{t^2 + \lambda_k^2} M(0, t, L) dt, \tag{9}$$

оскільки $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} M(\alpha, \varepsilon, P_n) \leqslant M(\alpha, \varepsilon, f)$. Враховуючи, що

$$\ln M(0, t, L) = 2t^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(x)}{x(x^2 + t^2)} dx$$

та у випадку, коли $l(x)$ – додатна повільно змінна функція,

$$2t \int\limits_0^{+\infty} \frac{l(x)}{x^2 + t^2} dx \leqslant (\pi + o(1)) l(t) \ (t \to +\infty)$$

за умови

$$n(x) \leqslant Bxl(x) \ (x \geqslant x_0), \ B < +\infty, \tag{10}$$

для всіх $t > 0$ одержимо
$$\ln M(0,t,L) \leqslant Atl(t),$$
де $A > 0$ деяка стала. Тому з (9) для всіх $k \geqslant 1$ за умов (10) і $l(t) \downarrow 0$ $(t \to +\infty)$ маємо
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{Atl(t) - t\varepsilon\right\} dt. \tag{11}$$
Визначимо функцію $\psi(t) = Atl(t) + 2\ln t - t\varepsilon$. Зауважуючи, що при $t \to +\infty$
$$\psi'(t) = Al(t) + Atl'(t) - \varepsilon + \frac{2}{t} = Al(t)(1 + o(1)) - \varepsilon, \tag{12}$$
то у випадку, коли $l(t)$ така, що
$$\frac{tl''(t)}{l'(t)} \geqslant q > -2, \quad t^2 l'(t) \to -\infty (t \to +\infty) \tag{13}$$
для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ функція $\psi(t)$ має єдину точку максимуму $t(\varepsilon)$, яка завдяки (12) має асимптотику
$$t(\varepsilon) = l^{-1}\left(\frac{\varepsilon(1 + o(1))}{A}\right),\ \varepsilon \to +0, \tag{14}$$
де $l^{-1}(x)$ – функція обернена до $l(x)$.

З рівності $\psi'(t(\varepsilon)) = 0$, крім того, одержуємо
$$\psi(t(\varepsilon)) = 2\ln t(\varepsilon) - 2 - At^2(\varepsilon)l'(t(\varepsilon)). \tag{15}$$
Звідси та з (11) отримуємо, що при $\varepsilon \to +0$
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} K \exp\left\{-At^2(\varepsilon)l'(t(\varepsilon))\right\}, \tag{16}$$
де $k > 0$ – деяка стала.

Зауважимо, що у випадку $l(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ всі умови, описані вище (у тому числі й умови (13)), виконуються. Крім того, $l^{-1}(t) = \exp\left\{\dfrac{1}{t}\right\}$ і тому з (14) маємо
$$t(\varepsilon) = \exp\left\{\frac{A}{\varepsilon}(1 + o(1))\right\}\ (\varepsilon \to +0)$$
та з (16)
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant K\varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{\varepsilon}\right\}\right\}\ (\varepsilon \to +0).$$
Вибираючи тепер $\alpha = x$, $\varepsilon = (1-\varepsilon_1)d(x)$ звідси для всіх достатньо великих $x > 0$ одержуємо
$$|a_k|\, e^{x\lambda_k} \leqslant CK(1-\varepsilon_1)d(x)\frac{1}{|L'(\lambda_k)|} \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x)}\right\}\right\}.$$

Враховуючи, що $\ln \dfrac{1}{|L'(\lambda_k)|} \leqslant \overline{q}\lambda_k$, $\overline{q} = q + r$, $r > 0$ – довільне, звідси для $k \geqslant k_0$ одержимо при $x \to +\infty$

$$\mu(x - \overline{q}, f) \leqslant CK(1 - \varepsilon_1)d(x) \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x)}\right\}\right\},$$

де $\mu(x, f) = \max\left\{|a_k| e^{x\lambda_k} : k \geqslant k_0\right\}$ максимальний член ряду $f \in S(\Lambda)$. Звідси при $x \to +\infty$

$$\ln \mu(x, f) \leqslant C_1 + \ln d(x + \overline{q}) + \exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x+\overline{q})}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{4A}{(1-\varepsilon_1)d(x+\overline{q})}\right\} = \exp\left\{\frac{4A}{1-\varepsilon_1} D^{-1}(x+\overline{q})\right\} \overset{def}{=} \Phi(x). \qquad (17)$$

Застосуємо такий результат з [6].
Якщо $f \in S(\Lambda)$, $\Phi_0(x)$ – додатна зростаюча до $+\infty$ опукла на $(-\infty, +\infty)$ функція і

$$\ln \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} \leqslant \Phi_0(x) \ (x \geqslant x_0), \qquad (18)$$

$$\sup\{|f(x)| : x \in R\} < +\infty,$$

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \sum_{\lambda_n \leqslant \Phi_0(R)} \frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{2}, \qquad (19)$$

то $f(z) \equiv \text{const}$.

Зауважимо, оскільки ([11]) $\ln \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} = (1 + o(1)) \ln \mu(x, f)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченої міри, як тільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\lambda_n} < +\infty$, то з (17) одержуємо, що умова (18) виконується з функцією $\Phi_0(x) = \Phi(x + 1)$.

Крім того, беручи до уваги, що при $x = \exp\left\{\dfrac{4A}{1-\varepsilon_1} D^{-1}(R + \overline{q} + 1)\right\}$ і $R \to +\infty$

$$\frac{1}{R} \sum_{\lambda \leqslant \Phi_0(R)} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{(1 + o(1))}{D(\frac{1-\varepsilon_1}{4A} \ln x)} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n}$$

з умови (5) одержуємо, що виконується умова (19). Застосування сформульованого результату з [6] завершує доведення теореми.

1. *Macintyre A.J.* Asymptotic path of integral function with gap power series // Proc. London Math. Soc. – 1952. – Vol.2. – N 3. – P.286-298.

2. *Евграфов М.А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // Успехи матем. наук. – 1962. – Т.17. – N 3. – С.169-175.

3. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Док. АН СССР. – 1963. – Т.150. – N 4. – С.722-725.

4. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле для случая более общего поведения показателей // Док. АН СССР. – 1963. – Т.153. – N 3. – С.510-511.

5. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М., 1980.

6. *Шеремета М.Н.* Теоремы единственности для целых рядов Дирихле // Изв. вузов. Матем. – 1987. – N 7. – С.64-72.

7. *Гайсин А.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Матем. заметки. – 1991. – Т.50. – N 2. – С.54-60.

8. *Фрынтов А.Е.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле с лакунами Фейера // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1993. – Вып. 57. – С.128-131.

9. *Мартиросян В. А.* О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами // Изв. АН Арм. ССР. – 1986. – Т.21. – N 3. – С.280-300

10. *Гайсин А.М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. – 2000. – Т.370. – N 6. – С.735-737.

11. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию //Матем. заметки. – 1985. – Т.37. – N 1. – С.41-47.

UNIQUENESS THEOREMS FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES ON THE JORDAN STRIPS

Oleh Pikh

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

We establish conditions on exponents $\lambda = (\lambda_n)$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ of an entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, under which boundedness of the series on the set $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$, where $d(x) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is a continuous function approaching to 0 as $x \to +\infty$, implies $F(z) = \text{const}$.

Key words: Dirichlet series, uniqueness theorem, entire functions.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2001

Прийнята до друку 20.06.2002