ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.115–121

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.115–121

УДК 517.576

ПРО ВЕЛИЧИНУ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В АСИМПТОТИЧНІЙ РІВНОСТІ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ТА СУМИ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ

Тетяна САЛО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілих рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\|} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\| \ (n \to +\|)$, визначено умови, виконання яких забезпечує правильність співвідношення

$$\sup\{|F(\sigma+i\tau)| : \tau\in\mathbb{R}\} = (1+o(1))\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

при $\sigma \to +\|$ зовні деякої множини E, $dE = \varliminf\limits_{\sigma\to+\|} h(\sigma)\mathrm{meas}(E\cap[\sigma,+\|)) = 0$, де $h(\sigma)$ – додатна неперервна зростаюча до $+\|$ на $[0,+\|)$ функція.

Ключові слова: цілий ряд Діріхле, виняткова множина.

1°. Нехай $H(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

$\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \uparrow +\infty)$. Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій, а L_1 – клас функцій $h \in L$ таких, що $h(x+O(1)) = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$. Через L_φ, для $\varphi \in L$, позначимо клас функцій $h \in L$ таких, що $\frac{h(\varphi(t))}{t}\ln t \to 0$ $(t \to +\infty)$. Всюди далі $\varphi(t)$ – функція обернена до функції $\Phi(t) \in L$.

Для локально вимірної за Лебегом множини $E \subset [0,+\infty)$ скінченної міри $\mathrm{meas}E < +\infty$ її верхньою $D_h(E)$ і нижньою $d_h(E)$ щільностями називаємо відповідно величини $D_h(E) = \varlimsup\limits_{R\to+\infty} h(R)\mathrm{meas}(E\cap[R,+\infty))$, $d_h(E) = \varliminf\limits_{R\to+\infty} h(R)\mathrm{meas}(E\cap[R,+\infty))$, де $h \in L$.

Для $\Phi \in L$ визначимо такі класи цілих рядів Діріхле:

$$H(\Lambda,\Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varliminf_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi_1(\sigma)} > 0\},$$

$$\bar{H}(\Lambda,\Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi_1(\sigma)} > 0\},$$

де $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$.

У випадку, коли $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$, $F \in H(\Lambda, \Phi)$, в [1] доведено, що умова

$$(\forall b > 0): \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{2}$$

забезпечує правильність співвідношення

$$F(\sigma + iy) = (1 + o(1)) a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma + iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{3}$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0$), рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, а в [2] доведено, що умова

$$(\forall b > 0): \varliminf_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{4}$$

забезпечує правильність цього ж співвідношення при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h(E) = 0$). Як умова (3) (див. [1,3]), так і (4) (див. [2]) є необхідними для того, щоб відповідні твердження були правильними для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$.

У цій статті доведемо подібне твердження в класі $\bar{H}(\Lambda, \Phi)$. Правильною є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in L$ і $h \in (L_\varphi \cap L_1)$. Якщо $F \in \bar{H}(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова (2), то співвідношення (3) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h(E) = 0$) рівномірно за $y \in \mathbb{R}$.*

2.° *Допоміжні твердження.* Позначимо через L_0 – клас додатних неспадних на $[0, +\infty)$ функцій $V(t)$ таких, що $A \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} < +\infty$.

Теорема 2. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in \bar{H}(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0): \lim_{n \to +\infty} h(\varphi(b\lambda_n)) \int\limits_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{5}$$

то для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $d_h E = 0$ правильна нерівність

$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{ -\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t) \right\}, \tag{6}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$ і φ – функція обернена до Φ.

Доведення. Міркуємо подібно як і в [1,4]. Нехай $\alpha(t) = \int\limits_0^t \frac{dV(x)}{x}$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $\alpha_n = \exp\left\{ -\int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t) dt \right\}$. Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\lambda_n}.$$

Оскільки $\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{\sigma\lambda_n} \leqslant |a_n| \exp\{(\sigma + \alpha(\lambda_n))\lambda_n\} \leqslant |a_n| \exp\{(\sigma + A)\lambda_n\}$, то $f \in H(\Lambda)$.

За умовою $F \in \tilde{H}(\Lambda, \Phi)$ маємо $\exists K > 0, \exists \sigma_j \uparrow +\infty (j \to +\infty)$ такі, що $K\sigma_j \Phi(\sigma_j) \leqslant \ln \mu(\sigma_j, F)$. Зауважимо, що $\ln \mu(\sigma, f) = \max\{\ln |a_n| - \ln \alpha_n + \sigma\lambda_n\} = \max\{\ln |a_n| + \int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt + \sigma\lambda_n\} \geqslant \ln \mu(\sigma, F)$, отже, $f \in \tilde{H}(\Lambda, \Phi)$ і $K\sigma_j \Phi(\sigma_j) \leqslant \ln \mu(\sigma_j, f) (j \geqslant 0)$. Оскільки $\ln \mu(\sigma, f) = \ln \mu(0, f) + \int\limits_0^{\sigma} \lambda_{\nu(t,f)} dt \leqslant 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0,f)}$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$, то

$$\sigma_j \leqslant \varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j-0,f)}\right) \ \ (j \geqslant j_0), \tag{7}$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до $\Phi(t)$.

Нехай (R_j) – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, f)$ занумерована так, що $\nu(\sigma, f) = j$ при $R_j \leqslant \sigma < R_{j+1}$ і, якщо $\nu(R_{j+1}, f) = j + p$, то $R_{j+1} = R_{j+2} = \cdots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$. Якщо $(\sigma - \tau_j) \in [R_j, R_{j+1})$, то за означенням $\mu(\sigma, f)$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_n} \leqslant \frac{|a_j|}{\alpha_j} e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_j} \quad (n \geqslant 0)$$

і тому при $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$ і $n \neq j$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j| e^{\sigma\lambda_j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_j} e^{\tau_j(\lambda_n - \lambda_j)} = \exp\left\{ - \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j)) dt \right\} < 1.$$

Отже, для $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$ маємо $\nu(\sigma, F) = j$. Оскільки $\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j)) dt = \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t)$, то нерівність (6) виконується для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in E_1 \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$.

Позначимо $E = [R_1 + \tau_1; +\infty) \setminus E_1$. Тоді для $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$ маємо

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = \operatorname{meas}(E \cap [R_{j+1} + \tau_j, +\infty)) = \\ &= \sum_{k=j}^{+\infty} (\tau_{k+1} - \tau_k) = \int\limits_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Розглянемо послідовність $\{\sigma_j^*\}$ таку, що $\sigma_j^* = \sigma_j + \tau_{n_j}$, де $\{\sigma_j\}$ – послідовність згадувана вище (див. нерівність (7)), а номер n_j – номер проміжку $[R_n, R_{n+1})$ до якого належить σ_j. Тоді $\sigma_j^* \in [R_{n_j} + \tau_{n_j}, R_{n_j+1} + \tau_{n_j})$, тобто $\nu(\sigma_j^*, F) = n_j$. Враховуючи нерівність (7), отримуємо

$$\begin{aligned} &h(\sigma_j^*) = h(\sigma_j + \tau_{n_j}) \leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j-0,f)}\right) + \int\limits_0^{\lambda_{n_j}} \frac{dV(x)}{x}\right) \leqslant \\ &\leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2\lambda_{n_j}}{K}\right) + A\right), \end{aligned}$$

оскільки $\nu(\sigma - 0, f) \leqslant j$ при $\sigma \in [R_j, R_{j+1})$.

Враховуючи (8) та умови теореми, а саме $h \in L_1$ і (5) отримуємо $h(\sigma_j^*)\mathrm{meas}(E\cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(1)$ $(j \to +\infty)$, тобто $d_h E = 0$ і теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Нехай $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in \bar{H}$ і виконується умова

$$(\forall b > 0) : h(\varphi(bx)) \int\limits_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt \to 0 \ (x \to +\infty), \tag{9}$$

то існує функція $C(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $d_h E = 0$ правильна нерівність

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{ -\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t) dt \right\}, \tag{10}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n).

Доведення наслідку 1. Доведення цього наслідку практично нічим не відрізняється від доведення наслідку 1 з теореми 3 в [1] і грунтується лише на теоремі 2.

Наслідок 2. Якщо $\Phi \in L$, $h \in L_1$ і виконуються умови наслідку 1, то

$$\Sigma_1 \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \leqslant \frac{1}{3}\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} = o(1)$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h E = 0)$, де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Доведення наслідку 2. Доведення цього наслідку є дослівним повторенням доведення наслідку 3 з теореми 3 в [1], тому ми його не наводимо.

3°. *Доведення теореми 1.* Визначимо

$$q(k) = n\left(\frac{\lambda_k}{3}\right) \ (k \geqslant 0),$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l, j) : q(k) \leqslant l \leqslant k \leqslant j < +\infty\},$$

$$\delta(l, j) = (j - l + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1}.$$

Як і в [5] показуємо, що

$$\sum_{k \geqslant n} \delta_k \leqslant C \sum_{k \geqslant q(n)} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \quad (n \geqslant 0),$$

де $C > 0$ - деяка стала.За умовою (2) при $b = \frac{1}{6}$ маємо

$$\sum_{k \geqslant q(n)} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \leqslant \sum_{\lambda_k > \frac{1}{3}\lambda_n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = o\left(\frac{1}{h(\varphi(2\lambda_n))}\right) \quad (n \to +\infty).$$

Тому

$$h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k \geqslant n} \delta_k = o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{11}$$

Визначимо

$$C_k = (\max\{h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k\geqslant n} \delta_k : k \leqslant n\})^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді $C_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і, отже, завдяки (11) як і в [1] доводимо, що

$$h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k\geqslant n} C_k\delta_k = o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{12}$$

Зазначимо, що міркуючи подібно як і в [1] (див. також [5]), доводимо, що з того, що рівності

$$\nu(\sigma + \varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma - \varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \tag{13}$$

де $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$, $\varepsilon_k = C_k\delta_k$, виконуються для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$ випливає, що при $\nu = \nu(\sigma, F)$

$$\Sigma_2 \overset{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{n\geqslant q_1(\nu), n\neq\nu} |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = o(1) \tag{14}$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2)$.

Справді, за означенням $\mu(\sigma, F)$ з рівностей (13) при $\sigma \notin E_2$ отримуємо

$$|a_n|e^{(\sigma\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)}, F) = e^{\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)}\lambda_{\nu(\sigma)}}\mu(\sigma, F),$$

звідки, вибираючи знаки "$\pm$" у відповідний спосіб, маємо

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\{-|\lambda_n - \lambda_{\nu(\sigma)}|\varepsilon_{\nu(\sigma)}\},$$

тобто

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{n\geqslant q_1(\nu), n\neq\nu} \exp\{-|\lambda_n - \lambda_{\nu(\sigma)}|\varepsilon_{\nu(\sigma)}\}. \tag{15}$$

Позаяк $\sum\limits_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \sum\limits_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \geqslant (j - l + 1)^2$, то при $n \geqslant \nu + 1$, $l = \nu$ та $j = n - 1$ одержуємо

$$\delta_\nu \geqslant \delta(\nu, n-1) = (n-\nu)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=\nu}^{n-1} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant \frac{(n-\nu)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_n - \lambda_\nu}, \tag{16}$$

а при $q_1(\nu) \leqslant n \leqslant \nu - 1$, $l = n$ та $j = \nu - 1$ отримуємо

$$\begin{aligned} \delta_\nu &\geqslant \delta(n, \nu) \geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=n}^{\nu} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant \\ &\geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=n}^{\nu-1} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant \\ &\geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \frac{(\nu - n)^2}{(\lambda_\nu - \lambda_n)} \geqslant \frac{1}{3} \frac{(\nu - n)^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_\nu - \lambda_n)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Отже, застосовуючи (16) і (17) до нерівності (15), одержуємо, що співвідношення (14) є правильним при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E_2)$.

Далі міркуючи, як і в [1,2,5], отримуємо, що рівності (13) виконуються для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$, де $E_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_{(n)}$, $E_{(n)} = [\sigma_n, \sigma_n + \varepsilon_n) \cup [\sigma_{n+1} - \varepsilon_n, \sigma_{n+1})$.

З умови $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < +\infty$ отримуємо за допомогою нерівності Коші-Буняковського, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \geqslant \frac{n^2}{\lambda_n},$$

тому

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (x \to +\infty).$$

Враховуючи $h \in L_\varphi$, отримуємо, що виконуються умови наслідку 2. Застосовуючи наслідок 2 і нерівність (14), при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E_1 \stackrel{def}{=} E \cup E_2$, E – множина з наслідку 2) одержуємо

$$\sum_{n \neq \nu(\sigma)} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F)\,(\Sigma_1 + \Sigma_2) = o(\mu(\sigma, F)).$$

Тому

$$R_\nu(\sigma + iy) \stackrel{def}{=} \sum_{n \neq \nu(\sigma)} a_n e^{(\sigma+iy)\lambda_n} = o(\mu(\sigma, F))$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E_1$) рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Треба довести, що $d_h E_1 = 0$. Зауважимо, що для множини E з наслідку за доведенням теореми 2 $\mathrm{meas}(E \cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(\frac{1}{h(\sigma_j^*)})$ $(j \to +\infty)$, де (σ_j^*) – послідовність визначена у доведенні теореми 2. При цьому $h(\sigma_j^*) \leqslant h(\varphi(\frac{2}{K}\lambda_{n_j}) + A)$ та $\nu(\sigma_j^*, F) = n_j$. Позаяк $\sigma_j^* \in [\sigma_{n_j}, \sigma_{n_j+1})$, то

$$h(\sigma_j^*)\mathrm{meas}(E_2 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) \leqslant 2h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{n_j}\right) + A\right) \sum_{k=n_j}^{+\infty} \varepsilon_k.$$

Враховуючи умову $h \in L_1$ і співвідношення (12), отримуємо $\mathrm{meas}(E_1 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) \leqslant \mathrm{meas}(E \cap [\sigma_j^*, +\infty)) + \mathrm{meas}(E_2 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(\frac{1}{h(\sigma_j^*)})$ $(j \to +\infty)$. Тобто, $d_h(E_1) = 0$ і теорему 1 доведено.

---

1. *Скасків О.Б.,Сало Т.М.* Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри винятковиx множин в теоремах типу Вімана-Валірона //Укр. мат. журн. – 2001. – (в друці)
2. *Сало Т.М.* Про виняткову множину в асимптотичній рівності суми і максимального члена цілого ряду Діріхле швидкого зростання //Матем. студії. – 2001. – Т.15. – N 1. – С.57-64.
3. *Сало Т.М.,Скасків О.Б.* Про виняткові множини у теоремах типу Вімана-Валірона //Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.176-178.
4. *Сало Т.М.,Скасків О.Б.* Оцінки міри виняткової множини у теорії Вімана-Валірона //Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.171-174.
5. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции //Изв. АН СССР, сер. матем. – 1989. – Т.53. – N 4. – С.833-850.

ON THE VALUE OF EXCEPTIONAL SET IN ASYMPTOTIC EQUALITY BETWEEN MAXIMAL TERM AND THE SUM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES OF RAPID GROWTH

Tetyana Salo

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

This paper contains an investigation of conditions which an entire function $F(z)$ represented by a Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, satisfies the relation

$$\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \varliminf\limits_{\sigma \to +\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Key words: entire Dirichlet series, exceptional set.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2001
Прийнята до друку 20.06.2002