ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.122–129

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.122–129

УДК 517.57

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЗРОСТАННЯ НА ПІВОСІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Олег СКАСКІВ, Василь СОРОКІВСЬКИЙ, Олександр ШАПОВАЛОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна
Львівська комерційна академія
вул. Туган-Барановського, 12, Львів, Україна
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. Стрийська, 3, м.Дрогобич, Львівська обл., Україна

Для рядів Діріхле з комплексними показниками визначено різні співвідношення між узагальненими порядками зростання на півосі та у півплощині.
Ключові слова: ряд Діріхле, узагальнені порядки зростання.

Нехай f – аналітична у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : Re z < 0\}$ функція, представлена абсолютно збіжним в $\mathbb{C}_-$ рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n), \tag{1}$$

де $\{\lambda_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{C}_+ = \{z : Re z > 0\}$ і $Re\lambda_{n+1} \geqslant Re\lambda_n$ $(n \geqslant 1)$. Клас таких функцій, показники яких задовольняють умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < +\infty, \ |\arg \lambda_n| \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2}, \ \lambda_n \neq \lambda_k \ (n \neq k), \tag{2}$$

позначимо $S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, де $\lambda = (\lambda_n)$. У випадку, коли $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ вживатимемо позначення $S(\lambda) \equiv S_{\mathbb{C}}(\lambda)$.

Через L позначимо клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[a, +\infty)$, $a > -\infty$, функцій, через L_1 – клас повільно зростаючих функцій h, тобто таких, що $h \in L$ і $h(cx) \sim h(x)$, а через L_0 – клас функцій $h \in L$ таких, що

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{h(ct)}{h(t)} = q_1(c) \to 1 \ (c \to 1), \ \ \varliminf_{t\to+\infty} \frac{h^{-1}(\varepsilon t)}{h^{-1}(t)} = q_2(\varepsilon) \to 0 \ (\varepsilon \to 0),$$

де $h^{-1}(t)$ – обернена функція до функції $h(x)$. Легко бачити, що у випадку, коли h неперервно диференційовна, то $h \in L_0$, як тільки $th'(t) = O(h(t))$ $(t \to +\infty)$. Крім того, $L_1 \subset L_0$.

Якщо $\alpha \in L$ і $\beta \in L$, а $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, то узагальненими порядками зростання F у півплощині $\mathbb{C}_-$ і на промені називаємо відповідно величини

$$\rho_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to-0} \frac{\alpha(\ln \mathfrak{M}(\sigma,F))}{\beta(\frac{1}{|\sigma|})}, \quad \rho^{\circ}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to-0} \frac{\alpha(\ln^+|F(\sigma)|)}{\beta(\frac{1}{|\sigma|})},$$

де $\mathfrak{M}(\sigma,F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\exp(\sigma Re\lambda_n)$.

Зауважимо, що у випадку класу $S(\lambda)$ введена тут величина $\rho_{\alpha\beta}$ дещо відрізняється від узагальненого порядку, введеного в [1] за допомогою $M(\sigma,F) = \sup\{|F(\sigma+iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\sigma < 0$ замість $\mathfrak{M}(\sigma,F)$. У випадку класу $S(\lambda)$ у доведеннях стандартно за допомогою нерівності $M(\sigma,F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma,F)$ переходять до оцінок $\mathfrak{M}(\sigma,F)$ замість $M(\sigma,F)$, то природно, крім характеристик зростання розглянутих в [1], розглядати також узагальнені порядки, введені тут. Для точності варто зазначити, що за умов, які розглядають у цьому повідомленні (у випадку класу $S(\lambda)$), $\rho_{\alpha\beta}$ дорівнюватиме узагальненому порядку, введеному в [1] за допомогою $M(\sigma,F)$.

Мета праці - довести таку теорему. Вона є повним аналогом теорем 2, 4 [2], доведених у випадку класу $S(\lambda)$.

Нехай $\Phi(x;c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $\Phi^{-1}(x;c) = \alpha^{-1}(c\beta(x))$, де α^{-1}, β^{-1} - обернені функції відповідно до функцій α і β.

Теорема 1. *Нехай функції α і β задовольняють одну з двох таких груп умов*

1) $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ і для кожного $c \in (0;+\infty)$

$$\frac{\Phi(x:c)}{x} \downarrow 0 \ (x \to +\infty), \tag{3}$$

$$\alpha\left(\frac{x}{\Phi(x:c)}\right) \sim \alpha(x) \ (x \to +\infty), \tag{4}$$

$$\frac{\Phi(x)}{x} \ln x \to 0 \ (x \to +\infty); \tag{5}$$

2) $\alpha \in L_0$, $\beta \in L_1$ і для кожного $c \in (0;+\infty)$

$$\frac{\Phi^{-1}(x:c)}{x} \downarrow 0 \ (x \to +\infty), \tag{6}$$

$$\beta\left(\frac{x}{\Phi^{-1}(x:c)}\right) \sim \beta(x) \ (x \to +\infty), \tag{7}$$

$$\frac{\ln x}{\Phi^{-1}(x:c)} \to 0 \ (x \to +\infty). \tag{8}$$

Тоді, якщо $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, а у випадку 1)

$$\Delta_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n/-\ln|B'(\lambda_n)|)} = 0$$

і у випадку 2)

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(-\ln|B'(\lambda_n)|)}{\beta(Re\lambda_n)} = 0,$$

то $\rho_{\alpha\beta} = \rho^0_{\alpha\beta}$, де $B(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\lambda}_n}{\lambda_n} \cdot \frac{(\lambda_n - z)}{(\overline{\lambda}_n - z)}$.

Для доведення нам будуть потрібні такі твердження.

Лема 1 (лема 1 [3], див. також [4]). *Якщо $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, то для всіх $\sigma \in (-\infty; 0)$*

$$|a_n| \exp(\sigma Re\lambda_n) \leqslant (2Re\lambda_n)^{-1/2} |B'(\lambda_n)|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\sigma} |F(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Лема 2 (леми 2,4 [2]). *Нехай $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і*

$$k_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n / \ln^+ |a_n|)}, \quad \tilde{k}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\beta(\lambda_n)}.$$

Якщо: 1) $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$, виконуються умови (3) і для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{\lambda_n} \Phi(\lambda_n; c) \ln n \to 0 \ (n \to +\infty),$$

або 2) $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$ виконуються умови (6), (7) і для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$\frac{\ln n}{\Phi^{-1}(\lambda_n; c)} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

то для кожної функції F вигляду (1) у випадку 1) $\rho_{\alpha\beta} \leqslant k_{\alpha\beta}$ і $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \tilde{k}_{\alpha\beta}$ у випадку 2).

Зауважимо, що в [2] лема 2 доведена для узагальнених порядків, введених за допомогою $M(\sigma, F)$. Проте скрізь у доведеннях [2], насправді, використовують лише нерівність $M(\sigma, F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ і оцінки $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ зверху, тому можна вважати, що лему 2 доведено в [2] (див. леми 2 і 4).

Доведення теореми. Очевидно, що $|F(\sigma)| \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ $(\sigma < 0)$. Тому $\rho^0_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$ і достатньо довести лише, що $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$ у випадку, коли $\rho^0_{\alpha\beta} < +\infty$. За означенням величини $\rho^0_{\alpha\beta}$ маємо, що

$$|F(\sigma)| < \exp\left\{ \alpha^{-1} \left(\rho\beta \left(\frac{1}{|\sigma|} \right) \right) \right\}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0 \tag{9}$$

для $\rho = \rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – довільне, $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$. За означенням $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ для кожного $\Delta > 0$ отримуємо

$$-\ln |B'(\lambda_n)| \leqslant Re\lambda_n / \beta^{-1} \left(\frac{1}{\Delta} \alpha(Re\lambda_n) \right). \quad (n \geqslant n_0(\Delta)) \tag{10}$$

Якщо у випадку 1) вибрати $\frac{1}{|\sigma|} = \Phi(\varepsilon Re\lambda_n / \Phi(Re\lambda_n; \frac{1}{\rho}); \frac{1}{\rho})$, то, використовуючи нерівності (9) і (10), за допомогою леми 1. при $n \geqslant n_1$ (подібно як і в [2]) послідовно отримуємо

$$\ln^+|a_n| \leqslant -\ln|B'(\lambda_n)| + \frac{1}{2}\ln\left(\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0}|F(t)|^2dt + \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}|F(t)|^2dt\right)^{1/2} + |\sigma|Re\lambda_n \leqslant$$

$$\leqslant Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(A_1 + \exp\left\{2\alpha^{-1}\left(\rho\beta\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)\right)\right\}\right) + Re\lambda_n|\sigma| \leqslant$$

$$\leqslant A_2 + Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \alpha^{-1}\left(\rho\beta\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)\right) + Re\lambda_n|\sigma| =$$

$$= A_2 + Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right) +$$

$$+ Re\lambda_n/\Phi\left(\varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right), \quad (11)$$

де $A_1, A_2 > 0$ – абсолютні сталі.

Зауважимо тепер, що за умовою $\beta \in L_0$. З

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\beta^{-1}(\varepsilon t)}{\beta^{-1}(t)} = q_2(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$$

випливає, що

$$\Phi\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) = o\left(\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right)\right) \ (x \to +\infty). \quad (12)$$

Крім того, за умовою (4) та $\alpha \in L_1$ одержуємо

$$\Phi\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right)\right)\right) =$$

$$= \beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(x)\right) \leqslant \left(q_2\left(\frac{\Delta}{q}\right) + \varepsilon_1\right)\Phi\left(x;\frac{1}{\Delta}\right)$$

при $x \to +\infty$, де $\varepsilon_1 > 0$ довільне.

Звідси, а також з (12) і (11) при $n \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{\ln^+|a_n|}{Re\lambda_n} \leqslant \left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)\Phi\left(\varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= \left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)/\beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right);$$

ми знову використали умови (4) та $\alpha \in L_1$. Звідси, при $n \to +\infty$ маємо

$$\beta\left(\frac{Re\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right) \geqslant \beta\left(\beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right)\right)/(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1),$$

тобто при $x = \beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right)/\left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)$

$$\alpha(Re\lambda_n)/\beta\left(\frac{Re\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right) \leqslant \frac{\beta(x(1 + q_2(\frac{\Delta}{\rho}) + \varepsilon_1))}{\beta(x)}(\rho + o(1)) \leqslant$$

$$\leqslant q_1(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1)(\rho + o(1)).$$

Звідси $k_{\alpha\beta} \leqslant q_1(1 + q_2(\Delta/\rho) + \varepsilon_1)(\rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon)$. Оскільки $q_2(\Delta/\rho) \to 0$ $(\Delta \to +0)$, то спрямовуючи в останній нерівності $\varepsilon_1 \to +0$, $\Delta \to +0$, $\varepsilon \to +0$ остаточно отримуємо $k_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$. Залишається застосувати до функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ лему 2. Останнє є можливим. Щоб у цьому переконатися, достатньо зауважити, що з умов (2) випливає $n = o(Re\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Тому за умовою (5) одержуємо

$$\frac{\Phi(Re\lambda_n; c)}{Re\lambda_n} \ln n = \frac{\Phi(Re\lambda_n; c)}{Re\lambda_n} \ln Re\lambda_n \frac{\ln n}{\ln(Re\lambda_n)} = o(1) \ (n \to +\infty).$$

Отже, завершується доведення першої частини теореми застосуванням леми 2.

Друга частина теореми доводиться подібно, тільки замість нерівності (11), вибираючи $1/|\sigma| = Re\lambda_n$, отримуємо нерівність

$$\ln^+ |a_n| < \alpha^{-1}(\Delta\beta(\lambda_n)) + \alpha^{-1}(\rho\beta(\lambda_n)) + A_3,$$

де $\rho = \rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ і $\Delta > 0$ – довільні, A_3 – абсолютна стала. Залишається, скориставшись умовою $\alpha \in L_0$, спочатку записати $\alpha^{-1}(\Delta x) \leqslant (q_2(\Delta/\rho) + o(1))\alpha^{-1}(\rho x)$ $(x \to +\infty)$, а потім при $x = \alpha^{-1}(\rho\beta(Re\lambda_n)) \to +\infty$

$$\frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\beta(Re\lambda_n)} \leqslant \rho\alpha((1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + o(1))x)/\alpha(x) \leqslant \rho q_1(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + o(1)).$$

Звідси $\tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant (\rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon) q_1 \left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)\right)$. Залишилось спрямувати $\Delta \to +0$, $\varepsilon \to +0$ і скористатися тим, що $q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) \to 0$, а тому $q_1\left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)\right) \to 1$. Отже, $\tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$. Завершується доведення другої частини теореми застосуванням леми 2 до функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$. Оскільки, як і вище, $n = o(Re\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, то за умовою (8)

$$\frac{\ln n}{\Phi^{-1}(Re\lambda_n; c)} = \frac{\ln(Re\lambda_n)}{\Phi^{-1}(Re\lambda_n; c)} \cdot \frac{\ln n}{\ln(Re\lambda_n)} = o(1) \ (n \to +\infty).$$

Отже, за лемою 2 $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що наведене доведення теореми є практично повним повторенням доведення теорем 2 і 4 [2], виявлених у класі $S(\lambda)$ з поправкою на застосування дещо іншого варіанта оцінки коефіцієнтів ряду з $S(\lambda)$, ніж у сформульованій тут лемі 1.

Зазначимо, що теорему 1 у випадку $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$ доведено в [3]. Доведено дещо загальніше твердження за те, що випливає з теореми 1. Крім того, зроблено спробу визначити необхідність умови $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ (у випадку $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$) для правильності рівності $\rho_{\alpha\beta} = \rho^0_{\alpha\beta}$. Стверджується, що ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(z\lambda_n)}{(1 + \lambda_n)^2} B'(\lambda_n) \tag{13}$$

є абсолютно збіжним і обмеженим на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$, як тільки

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\ln Re\lambda_n}{Re\lambda_n} \ln \frac{1}{|B'(\lambda_n)|} = q \in (0; +\infty), \ |\arg \lambda_n| \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2} \ (n \geqslant 1).$$

При цьому $\rho_{\alpha\beta} = q = \rho^0_{\alpha\beta} + q$, оскільки $\rho^0_{\alpha\beta} = 0$. Зауважимо, що за описаних умов вдається показати лише, що ряд (13) є абсолютно збіжним у куті $K_{\alpha_0} = \{z = re^{i\varphi} : \frac{\pi}{2} + \alpha_0 < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \alpha_0\}$. Зауважимо (застосовуючи лему 2 [3], це не складно показати), що за умов $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ та (4) і (5), якщо $\Delta_{\alpha\beta} \in (0, +\infty)$ і виконуються умови (2), то для функції F, яка визначається абсолютно збіжним у куті K_{α_0} рядом (13), справджується нерівність $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$ і функція F є обмеженою на промені $\{z = \sigma, \sigma < 0\}$. Тобто правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ та виконуються умови (4) і (5). Якщо послідовність (λ_n) така, що виконуються умови (2), то ряд (13) є абсолютно збіжним у куті K_{α_0} і визначає аналітичну функцію F обмежену на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$ і таку, що $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$.*

Доведення. Оскільки для довільного $\Delta > \Delta_{\alpha\beta}$ і для всіх $n \geqslant n_0(\Delta)$

$$-\ln |B'(\lambda_n)| < Re\lambda_n / \beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(Re\lambda_n)\right), \tag{14}$$

то при фіксованому $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2} + \alpha_0 + \delta; \frac{3\pi}{2} - \alpha_0 - \delta]$, $\delta > 0$, $\varphi_n = \arg \lambda_n$, маємо $\frac{\pi}{2} + \delta < \varphi + \varphi_n < \frac{3\pi}{2} - \delta$ та при $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} -\ln |B'(\lambda_n)| + Re(z\lambda_n) &= -\ln |B'(\lambda_n)| + r|\lambda_n| \cos(\varphi + \varphi_n) \leqslant \\ &\leqslant Re\lambda_n / \beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(Re\lambda_n)\right) - r|\lambda_n| \sin \delta = -(1 + o(1))r|\lambda_n| \sin \delta \leqslant 0. \end{aligned}$$

Зважаючи на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|1+\lambda_n|^2}$, отримуємо абсолютну збіжність у K_{α_0} ряду (13).

Використовуючи лему 2 [3], у [3] показано, що при $\sigma < 0$ функцію F вигляду (13) можна зобразити інтегралом

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{i\sigma t}}{(1 + t)^2 B(t)} dt.$$

З огляду на рівність $|B(iy)| = 1 (\forall y \in \mathbb{R})$, отримуємо, що $F(z)$ обмежена на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$.

Зауважимо, що для $a_n = (1 + \lambda_n)^{-2}(B'(\lambda_n))^{-1}$ вздовж деякої послідовності $n = n_k \uparrow +\infty$.

$$Re\lambda_n / \ln^+ |a_n| = (1 + o(1))\beta^{-1}((\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}} + o(1))\alpha(Re\lambda_n)),$$

оскільки за умовою (5) $\ln |\lambda_n| = o(Re\lambda_n / \beta^{-1}((\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}} + o(1))\alpha(Re\lambda_n)))$. Тому при $n = n_k \to +\infty$ і для довільного $\varepsilon > 0$

$$\frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n / \ln^+ |a_n|)} \geqslant \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta((1 + \varepsilon)\beta^{-1}(\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon}\alpha(Re\lambda_n))} = \frac{(\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon)\beta(x)}{\beta((1 + \varepsilon)x)}, \ x = \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon}.$$

Звідси, за умовою $\overline{\lim\limits_{u \to +\infty}} \frac{\beta(cu)}{\beta(u)} = q_1(c) \to 1 \ (c \to 1)$ маємо

$$k_{\alpha\beta} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n / \ln^+ |a_n|)} \geqslant (\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon)\left(\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\beta((1 + \varepsilon)x)}{\beta(x)}\right)^{-1} = \frac{\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon}{q_1(1 + \varepsilon)}.$$

Тобто, $k_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Зауважимо, що за допомогою нерівності (14) подібними міркуваннями доводимо $k_{\alpha\beta} \leqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Для завершення доведення достатньо скористатись для функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ такою лемою.

Лема 3 (лема 3 [2]). *Нехай* $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. *Якщо* $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$ *і виконується умова (5), то* $k_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$.

Використовуючи лему 4 [2], можна отримати твердження подібне до теореми 2 і у випадку другого твердження з теореми 1.

Легко бачити, що у випадку, коли комплексна послідовність (λ_n) така, що $\arg\lambda_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ і виконуються умови (2), то за умов теореми 2 ряд (13) є абсолютно збіжним в усій півплощині $\mathbb{C}_-$, тобто справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай послідовність* (λ_n) *така, що* $\arg\lambda_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ *і виконуються умови (2), а функції* α *і* β *задовольняють першу групу умов теореми 1. Якщо* $\Delta_{\alpha\beta} < +\infty$, *то для того щоб для кожної функції* $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$ *виконувалась рівність* $\rho_{\alpha\beta} = p^0_{\alpha\beta}$, *необхідно і достатньо, щоб* $\Delta_{\alpha\beta} = 0$.

Подібна теорема є правильною і у випадку, коли функції α і β задовольняють другу групу умов з теореми 1.

Дослідження О.Б.Скасківа частково підтримані грантом INTAS, проект 99-0089.

---

1. *Галь Ю.М., Шеремета М.Н.* Про зростання аналітичних у півплощині функцій, заданих рядами Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1978. – №12. – С.1064-1067.

2. *Скаскив О.Б., Сорокивский В.М.* О росте на горизонтальных лучах функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.12. – №3. – С.363-371.

3. *Шаповаловський О.В.* Про зростання на дійсній півосі рядів Діріхле з комплексними показниками // Математичні студії. – 1999. –Т.11. – №2. – С.213-215.

4. *Сорокивский В.М.* О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1984. – Т.36. – №4. – С.524-528.

5. *Винницкий Б.В., Шаповаловский А.В.* О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями // Укр. мат. журн. – 1990. –Т. 42. – №7. – С.882-888.

ABOUT GENERALIZED ORDERS OF THE GROWTH ON A SEMIAXIS THE DIRICHLET SERIES WITH COMPLEX EXPONENTS

Oleh Skaskiv, Vasyl' Sorokivskyi, Oleksandr Shapovalovskyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
Lviv Academy of Commerce
12 Tugan-Baranovs'ki Str. Lviv, Ukraine
Drogobych State Pedagogic University
3 Stryis'ka Str. Drogobych, Ukraine

For a Dirichlet series with complex exponents a relations between the generalized orders of the growth on semiaxes and semiplane is established.

Key words: Dirichlet series, generalized orders of the growth.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2001
Прийнята до друку 20.06.2002