ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.130–136 Ser.Mech-Math.2002. Vol.60.P.130–136

УДК 511.364

ПРО МІРУ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТІ ЧИСЛА $\operatorname{tg}\alpha$ ТА ПРО ЙОГО НАБЛИЖЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИМИ ЧИСЛАМИ

Володимир СТЕФАНЯК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Покращено відому оцінку А.Б.Шидловського міри трансцендентності числа $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$. Одержано оцінку апроксимації цього числа алгебраїчними числами. Основну теорему доведено за допомогою другого методу Гельфонда.

Ключові слова: трансцендентні числа, апроксимація трансцендентних чисел.

Означення. *Нехай $\xi \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$. Мірою трансцендентності числа ξ називають функцію*

$$\Phi_{m,H}(\xi) = \min \mid a_0 + a_1\xi + \ldots + a_m\xi^m \mid,$$

де мінімум береться за всіма $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$, які задовольняють умову

$$0 < \max_{0 \leqslant k \leqslant m} |a_k| \leqslant H.$$

Нехай $\mathbb{A}$ – поле алгебраїчних чисел, $deg\ \alpha$ – степінь алгебраїчного числа α, $H(\alpha)$ і $L(\alpha)$ – його висота і довжина відповідно, $[\cdot]$ – ціла частина числа, λ_i, q_i – ефективні сталі, які залежать тільки від α і $deg\ \alpha$ і не залежать від $L(\alpha)$.

Очевидно, що для довільного $\alpha \in \mathbb{A}$ при $m \geqslant deg\ \alpha$ та досить великого H $\Phi_{m,H}(\alpha) = 0$. Відомо [2], що число $\operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$ трансцендентне. Загалом знайти міру трансцендентності для трансцендентного числа важко, проте у часткових випадках можна отримати для неї оцінку знизу.

Природу алгебраїчних чи трансцендентних чисел важко визначити, тому для розв'язання конкретних важливих задач у теорії чисел використовують нижню межу значень многочленів з цілими коефіцієнтами в заданій точці залежно від властивостей самого многочлена, а точніше від його коефіцієнтів.

Питання наближення трансцендентних чисел (в нашому випадку $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$) алгебраїчними мають самостійне наукове значення в теорії трансцендентних чисел, водночас тісно пов'язані з оцінкою міри трансцендентності.

Задачі знаходження оцінок мір трансцендентності актуальні й сьогодні. Цю тематику продовжують розвивати А.Б.Шидловський, Г.Діас (G.Diaz) та ін.

У цій праці ми доводимо посилення оцінки, яку одержав А.Б.Шидловський [1] за допомогою розробленого ним методу E-функцій, який дає змогу виводити оцінки для широкого класу трансцендентних чисел. Проте виведення оцінки міри трансцендентності для конкретного набору чисел ($\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{A}$) за допомогою другого методу Гельфонда дає кращий результат.

У теоремі 1 одержано наближення числа $\operatorname{tg}\alpha$ алгебраїчними. Оцінка для міри трансцендентності міститься в теоремі 2, доведення якої безпосередньо грунтується на теоремі 1.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0,\ d = deg\ \alpha$. Тоді існує така додатна ефективна стала $\eta = \eta(\alpha)$, що для будь-якого алгебраїчного числа θ, $deg\ \theta \leqslant d$ виконується нерівність*

$$|\operatorname{tg}\alpha - \theta| > e^{-q^2 \ln^{2+\eta} q}, \tag{1}$$

де $q = [\ln L\ \ln^{2+\eta} \ln L]$, $L = L(\theta) \geqslant L_0(d, \alpha)$.

Доведення цієї теореми проведено за допомогою другого методу Гельфонда, з яким детальніше можна ознайомитись в [2] чи [3]. Для доведення теореми використаємо такі допоміжні твердження.

Лема 1 ([2], с.15). *Нехай $X_0 \in \mathbb{N},\ n > m \geqslant 1,\ m, n \in \mathbb{N}$,*

$$L_t(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{t,j} x_j,\ a_{t,j} \in \mathbb{R},\ A_t = \sum_{j=1}^{n} |a_{t,j}|,\ t = 1, \ldots, m.$$

Тоді існує набір $x_{1,0}, \ldots, x_{n,0} \in \mathbb{Z}$, який задовольняє умови

$$0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_{j,0}| \leqslant X_0,\ |L_t(\overline{x}_0)| < A_t X_0^{1-n/m},\ t = 1, \ldots, m.$$

Лема 2 ([2], с.102)(формула Ерміта). *Нехай $f(\xi)$ аналітична в області $\mathcal{D}$ і на її кусково-гладкій межі $\mathcal{L}$; $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{D}$, $a_i \neq a_j$, якщо $i \neq j, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді для будь-якого $z \in \mathcal{D}$, відмінного від чисел $a_1, \ldots, a_m$, виконується рівність*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - a_k}{\xi - a_k}\right)^{s+1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{f^{(\sigma)}(a_l)}{\sigma!} \oint_{|\xi - a_l| = \rho_l} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - a_k}{\xi - a_k}\right)^{s+1} \frac{(\xi - a_l)^{\sigma}}{\xi - z} d\xi,$$

де $\rho_l > 0$ і такі малі, що круги $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - a_l| \leqslant \rho_l\}$ належать до $\mathcal{D}$ і не містять чисел z і $a_k, k \neq l$.

Лема 3 ([2], с.46). *Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{A}$, $deg\ \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = n, deg\ \alpha_k = n_k$, $k = 1, \ldots, m,\ N_1, \ldots, N_m \in \mathbb{N}$,*

$$P(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{N_m} a_{k_1, \ldots, k_m} z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m} \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_m].$$

Якщо $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$, то $|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)| \geqslant L(P)^{1-\delta n} \prod_{i=1}^{m} L(\alpha_i)^{-\delta N_i n / n_i}$, де $\delta = 1$, якщо поле $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ дійсне, і $\delta = 1/2$, якщо це не так.

Доведення теореми. Нехай для деякого $\theta \in \mathbb{A}, deg\ \theta \leqslant d$ виконується нерівність

$$|\operatorname{tg}\alpha - \theta| \leqslant e^{-q^2 \ln^{2+\eta} q}. \tag{2}$$

Введемо позначення

$$S = [ln^{1+\eta} q],\ X = [\sqrt{\ln q}],\ X_0 = [e^{q \ln q}],\ X_1 = [\ln q],$$

$$f_n(z) = \sum_{k,l=0}^{q} C_{k,l} z^k \sin^{2l}(z - n + \alpha),\ n = 0, 1, \dots, X;\ t(z) = \sin^2 z.$$

За індукцією за s знайдемо похідні функції $t(z)$

$$t^{(s)}(z) = 2^{2[\frac{s-1}{2}]+1}(-1)^{[\frac{s-1}{2}]} \left(\frac{\sin 2z}{2}\right)^{\varkappa_1(s)} (\cos 2z)^{\varkappa_2(s)} \left(-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z}\right)^{\varkappa_3(s)},$$

$s = 0, 1, \dots, S$, де $\varkappa_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^s$, $\varkappa_2(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^s$, $\varkappa_3(s) = \left[\frac{S-s}{S}\right]$.
Далі для довільного $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $s = 0, 1, \dots, S$ отримаємо рівність

$$\left(t^l(z)\right)^{(s)} = \sum_{s_1+\dots+s_l=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_l!} t(z)^{(s_1)} \dots t(z)^{(s_l)} = \sum_{s_1+\dots+s_l=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_l!} \times$$
$$\times\, 2^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left(2\left[\frac{s_j-1}{2}\right]+1\right)} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left[\frac{s_j-1}{2}\right]} \left(\frac{\sin 2z}{2}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_1(s_j)} \times$$
$$\times\, (\cos 2z)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_2(s_j)} \left(-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_3(s_j)}. \qquad (3)$$

Враховуючи наші позначення, можна записати, що $f_n(z) = \sum\limits_{k,l=0}^{q} C_{k,l} z^k t^l(z - n + \alpha)$, і за індукцією за s легко визначити таку рівність:

$$f_n^{(s)}(z) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} C_{k,l} z_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \left(t^l(z - n + \alpha)\right)^{(\sigma)}, \qquad (4)$$

$$s = 0, 1, \dots, S;\ n = 0, 1, \dots, X,$$

де $*$ означає, що $z^{k-s+\sigma}$ заміняємо на 1 при $k - s + \sigma < 0$.

Використаємо (3) для $\left(t^l(z - n + \alpha)\right)^{(\sigma)}$ і розглянемо $f_n^{(s)}(z)$ в точках $z_m = m$, $m = 0, 1, \dots, X$, врахувавши (4)

$$f_n^{(s)}(m) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1+\dots+\sigma_l=\sigma} C_{k,l} m_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_l!} 2^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left(2\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]+1\right)} \times$$
$$\times (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]} \left(\frac{\sin 2(m-n+\alpha)}{2}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_1(\sigma_j)} (\cos 2(m-n+\alpha))^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_2(\sigma_j)} \times$$
$$\times \left(-2\frac{\sin^2(m-n+\alpha)}{\cos 2(m-n+\alpha)}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_3(\sigma_j)};\ n = 0, 1, \dots, X;\ m = 0, 1, \dots, X. \qquad (5)$$

Отримали $m_1 = (S+1)(X+1)^2$ лінійних форм, кількість доданків у кожній лінійній формі $m_2 \geqslant q^2$. Відомо таке: якщо $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N(M,m)$ – кількість розв'язків рівняння $x_1 + \ldots + x_m = M$ у цілих невід'ємних числах, то $N(M,m) = C_{M+m-1}^{M}$. Використовуючи формулу

$$C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r, \ n \geqslant r \geqslant 1,$$

доходимо висновку, що кількість доданків у кожній лінійній формі $m_2 \geqslant q^2$.

З леми 1 і (5) випливає, що існує набір чисел $C_{k,l} \in \mathbb{Z}$, які задовольняють умови

$$|\, f_n^{(s)}(m) \,| \leqslant A_{s,n,m} X_0^{1-m_2/m_1} \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{1+\eta} q}, \ q \geqslant q_1, \tag{6}$$

$$0 < \max |\, C_{k,l} \,| \leqslant X_0.$$

За допомогою леми 2 і (6), використовуючи принцип максимуму модуля для аналітичних функцій, отримуємо для $q \geqslant q_2$ нерівність

$$\max_{|z| \leqslant X_1+1} |\, f_n(z) \,| = \max_{|z| \leqslant X_1+1} \Bigg| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = \ln^{3/2} q} \prod_{m=0}^{X-1} \left(\frac{z-m}{\xi-m} \right)^S \frac{f_n(\xi) d\xi}{\xi - z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{X-1} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{f_n^{(s)}(m)}{s!} \oint\limits_{|\xi-m|=0,5} \prod_{y=0}^{X-1} \left(\frac{z-y}{\xi-y} \right)^S \frac{(\xi-m)^s}{z-\xi} d\xi \Bigg| \leqslant \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{4}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{7}$$

Оцінка (7) і інтегральна формула Коші допомагають оцінити похідні $f_n^{(s)}(z)$

$$\max_{|z|=X_1} |\, f_n^{(s)}(z) \,| \leqslant \max_{|z| \leqslant X_1+1} \Bigg| \frac{s!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = \ln q} \frac{f_n(\xi) d\xi}{|\, \xi - z \,|^{s+1}} \Bigg| \leqslant e^{-\frac{1}{8}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{8}$$

Оскільки $\sin 2z = \frac{2\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg}^2 z}$, $\cos 2z = \frac{1-\operatorname{tg}^2 z}{1+tg^2 z}$, $-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z} = -\frac{2\operatorname{tg}^2 z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$, то позначимо

$$P_{s,n}(z) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_l=\sigma} C_{k,l} n_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \ldots \sigma_l!} 2^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left(2\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]+1 \right)} \times$$

$$\times (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]} \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_1(\sigma_j)} \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_2(\sigma_j)} \left(-\frac{2z^2}{1-z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)}. \tag{9}$$

Оцінимо різницю

$$\Delta = |\, P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) - P_{s,n}(\theta) \,| = \Bigg| \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1+\ldots+\sigma_l=\sigma} C_{k,l} n_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \ldots \sigma_l!} \times$$

$$\times 2^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left(2\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]+1 \right) + \sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)} \int\limits_{\operatorname{tg}\alpha}^{\theta} g'(z) dz \Bigg|,$$

де $g(z) = \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_1(\sigma_j)} \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_2(\sigma_j)} \left(-\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)}$.

Інтеграл $\int\limits_{\operatorname{tg}\alpha}^{\theta} g'(z)dz$ зводиться до криволінійних інтегралів другого роду від дійснозначних функцій, величини яких не залежать від шляху інтегрування, а лише від кінцевих точок кривої. Враховуючи те, що спрямлювану криву, яка з'єднує точки $\operatorname{tg}\alpha$ і θ, можна вибрати такою, що не проходить через точки $\pm 1, \pm i$; якщо треба, вважаючи, що $\theta \neq \pm i$, $\theta \neq \pm 1$ ($L = L(\theta)$ –досить велике число!), скористаємось (2) і отримаємо для $s = 0, 1, \dots, S$ та $n = 0, 1, \dots, X_1$ нерівність

$$\Delta \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{2+\eta} q}. \tag{10}$$

Позаяк $\mid P_{s,n}(\theta) \mid \leqslant \mid P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) - P_{s,n}(\theta) \mid + \mid P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) \mid$ і $f_n^{(s)}(n) = P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha)$, то з (8) і (10) випливає, що

$$\mid P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q \mid \leqslant e^{-\frac{1}{16}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{11}$$

З іншого боку, $P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q \in \mathbb{Z}[\theta]$ і за лемою 3

$$\mid P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q \mid \geqslant e^{-\lambda_1 q^2}, q \geqslant q_3. \tag{12}$$

З оцінок (11) і (12) випливає, що $\mid P_{s,n}(\theta) \mid = 0$, а отже,

$$\mid f_n^{(s)}(n) \mid = \mid P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) \mid \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{2+\eta} q}, \tag{13}$$

$$s = 0, 1, \dots, S;\ n = 0, 1, \dots, X_1.$$

Знову повернемося до формули Ерміта. Оцінка для $f_n^{(s)}(m)$ відповідає оцінці для $f_{X_1}^{(s)}(X_1)$, що дає змогу використати (13)

$$\max_{|z|=2} \mid f_n(z) \mid = \max_{|z|=2} \mid \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=3} \prod_{m=0}^{X-1} \left(\frac{z - \frac{1}{m+1}}{\xi - \frac{1}{m+1}} \right)^S \frac{f_n(\xi)d\xi}{\xi - z} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{X-1} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{f_n^{(s)}(m)}{s!} \oint\limits_{|\xi - \frac{1}{m+1}| = \frac{1}{2X^2}} \prod_{y=0}^{X-1} \left(\frac{z - \frac{1}{y+1}}{\xi - \frac{1}{y+1}} \right)^S \frac{\left(\xi - \frac{1}{m+1}\right)^s}{z - \xi} d\xi \mid \leqslant 4e^{-\frac{1}{8}q^2 \ln^{2+\eta} q}.$$

За інтегральною формулою Коші

$$\mid f_1^{(s)}(1) \mid = \mid \frac{s!}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2} \frac{f_1(z)dz}{(z-1)^{s+1}} \mid \leqslant e^{-\frac{1}{16}q^2 \ln^{2+\eta} q}, 0 \leqslant s \leqslant S_0, \tag{14}$$

де $S_0 = [q^2 \ln^{\frac{1}{2}+\eta} q]$.

Виразивши $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin^2\alpha$ через $e^{2i\alpha}$ у (5) для $f_1^{(s)}(1)$, отримаємо, що

$$f_1^{(s)}(1) = \frac{1}{\gamma(q,\alpha)} (H_{s,1}(e^{2i\alpha}) + iH_{s,2}(e^{2i\alpha})), \tag{15}$$

де $H_{s,1}(z), H_{s,2}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, а $\gamma(q,\alpha) > 0$. Відомо [4], що $\Phi_{m,H}(e^{\alpha}) > H^{-\lambda_0 m}$ при досить великих H, де $\lambda_0 > 0$ не залежить від H та m, а тому, враховуючи нерівність $| z_1+z_2 | \geqslant || z_1 | - | z_2 ||$ та саму структуру многочленів $H_{s,1}, H_{s,2}$, доходимо висновку, що

$$| f_1^{(s)}(1) | \geqslant \frac{1}{\gamma(q,\alpha)} e^{-\lambda_2 q^2 \ln^{\frac{3}{2}+\eta} q} \geqslant e^{-\lambda_3 q^2 \ln^{\frac{3}{2}+\eta} q}, s = 0, 1, \dots, S_0. \qquad (16)$$

З оцінок (14) і (16) отримаємо суперечність при досить великих q. Це означає, що $f_1^{(s)}(1) = 0$. Враховуючи сказане вище і те, що число $e^{2i\alpha}$ трансцендентне, з (9) легко бачити, що всі $C_{k,l}$ дорівнюють 0. Теорему 1 доведено.

Надалі нехай $H(P)$ та $L(P)$ - відповідно висота та довжина многочлена P з цілими коефіцієнтами.

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, d = deg\ \alpha$. Тоді існує така ефективна стала $c = c(\alpha) > 0$, що для довільного $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $P(z) \not\equiv 0$, $deg\ P(z) = n \geqslant 1$, $L(P) = L \geqslant L_0(d,\alpha)$ виконується нерівність*

$$| P(\operatorname{tg}\alpha) | \geqslant e^{-cm^2 \ln^{6+3\eta} m}, \qquad (17)$$

де $m = ln(2^n L)$.

Зауваження. В (1) та (17) можна перейти від $L(P)$ до $H(P)$ за допомогою нерівності

$$H(P) \leqslant L(P) \leqslant H(P)(1 + deg\ P). \qquad (18)$$

За результатами А.Б.Шидловського існує така додатна константа c, що $\Phi_{m,H}(\operatorname{tg}\alpha) > cH^{-4h^2 m}$, $h \leqslant H$. Оцінка є глобальною тому, що немає обмежень на висоту і довжину многочлена з цілими коефіцієнтами. Є сенс наближати трансцендентні числа досить близькими алгебраїчними числами, в яких здебільшого довжина і висота досить великі. Це допоможе обмежитися розглядом многочленів з цілими коефіцієнтами з досить великими $L(P)$ та $H(P)$. Враховуючи нерівність (18) та звівши оцінку Шидловського до експоненціального вигляду, легко переконатися в ефективності (17).

Доведення теореми 2 безпосередньо випливає з теореми 1 і такої леми.

Лема 4 ([2], с.101). *Нехай $a \in \mathbb{C}$. Якщо для кожного $\zeta \in \mathbb{A}$ виконується нерівність*

$$| a - \zeta | \geqslant e^{-\nu\varphi(\nu,l)},\ \nu = deg\ \zeta,\ l = L(\zeta),$$

де $\varphi(x,y)$ - неспадна функція своїх аргументів, то для будь-якого $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $P(z) \not\equiv 0$, $n = deg\ P$, $n \geqslant 1$, $L = L(P)$ виконується нерівність

$$| P(a) | \geqslant e^{-n\varphi(n,2^n L)}(4L\sqrt{n})^{-n}.$$

---

1. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. – М., 1987.
2. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта. – М., 1982.
3. *Гельфонд А.О.* Избранные труды. – М., 1973.

4. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. – 1932. – N 166. – P.118-136, 137-150.

ON TRANSCEDENCE MEASURE OF NUMBER $\operatorname{tg}\alpha$ AND ITS APPROXIMATION BY ALGEBRAIC NUMBERS

Volodymyr Stefanyak

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In this article here is given the slight improval of the estimate for transcendence measure of $\operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$, made by A.B.Shidlovskiy [1] and approximation of this number by algebraic numbers. The main theorem is proved by means of the second Gelfond's method.

Key words: transcendence numbers, approximation of transcendence numbers.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2000
Прийнята до друку 20.06.2002