

УДК 539:375

РОЗВИТОК ЗОН ПЛАСТИЧНОСТІ ПРИ ЗСУВНОМУ ЗРІЗУВАННІ ПІВШАРУ

Василь КРИВЕНЬ, Георгій СУЛИМ

*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя**вул. Руська, 46, Тернопіль, Україна**Львівський національний університет імені Івана Франка**вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язана антиплоска пружнопластична задача для півбезмежної смуги з паралельним до її граней плоским розрізом. Його початок розташований на торці смуги і поділяє її на дві ідентичні частини. Деформація зумовлена сталим зміщенням верхньої та нижньої половин торця. Розглянуто випадки суцільної пластичної зони і зон, утворених однією або трьома пластичними смугами. Визначено межу суцільної зони, довжини смуг пластичності та стрибок зміщення у вістрі розрізу. Результати розрахунку кожного випадку зіставлені між собою.

Ключові слова: антиплоска пружнопластична задача.

Для оцінювання міцності клейових з'єднань проводять випробування відриванням. Такий процес найчастіше вивчають на основі розв'язування відповідних плоских задач, зокрема [1]. Важливо у таких задачах врахувати ефекти пластичності [2, 3]. Хоча дослідження опору руйнуванню зрізуванням є не менш важливим, відповідні задачі вивчено набагато менше, особливо з урахуванням пластичного деформування, див. наприклад [4].

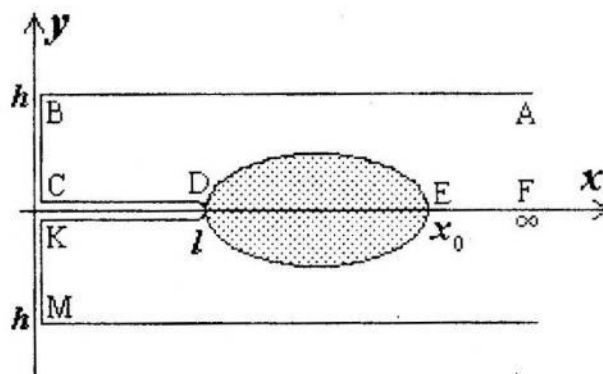


Рис. 1

Дослідимо зони пластичності при зсувному зрізуванні ідеально пружно-пластичного [5] півшару $0 \leq x < \infty$, $-h \leq y \leq h$, $-\infty < z < \infty$ із розрізом $0 \leq x \leq l$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$ якщо зміщення уздовж осі аплікату на частині межі півшару $x = 0$, $0 < y \leq h$, $-\infty < z < \infty$ стало і дорівнює w_0 , а на ділянці $x = 0$,

$-h \leq y < 0$, $-\infty < z < \infty$ теж сталі і дорівнює $-w_0$. Решту границі півшару та береги розрізу вважатимемо вільними від зовнішніх напружень. Припустимо, що з фронту розрізу розвивається в'язка пластичних смуг. З огляду на двовимірний характер задачі обмежимося аналізом перерізу півшару площиною xOy . Визначатимемо довжини смуг як функції w_0 (рис. 1 відображає площину xOy для суцільної пластичної зони, тобто за безмежної кількості смуг).

1. Формулювання крайової задачі у напруженнях

Навантаження прикладене так, що відмінне від нуля лише переміщення $w(x, y)$ уздовж осі аплікату, а досліджуваний півшар перебуває у стані антиплоскої деформації. Зовнішніх напружень на горизонтальних краях півшару та берегах розрізу немає

$$\tau_{yz}(x, \pm h) = 0 \quad (0 < x < \infty), \quad \tau_{yz}(x, \pm 0) = 0 \quad (0 < x < l). \quad (1)$$

Сталість зміщення на ділянках $x = 0$, $0 < y \leq h$ та $x = 0$, $-h \leq y < 0$ еквівалентна умові

$$\tau_{yz}(0, y) = 0 \quad (y \in (-h, 0) \cup (0, h)). \quad (2)$$

Звернемося до умови на границі пластичної зони. На межі L суцільної пластичної зони повинна виконуватися умова пластичності

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k^2 \quad ((x, y) \in L) \quad (3)$$

та умова неперервності напружень [4]

$$(x - l) \tau_{xz}(x, y) + y \tau_{yz}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in L), \quad (4)$$

де k – зсувна межа плинності матеріалу півшару.

Якщо зона пластичності утворена скінченною кількістю смуг пластичності (СП), то у кожній точці смуг має виконуватися умова пластичності (3), а у кінцевій точці кожної смуги, що утворює кут α з віссю абсцис, додатково ще й умова прямолінійного розвитку СП [4]

$$\tau_{nz} = k \quad (\vec{n} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha\}). \quad (5)$$

Відносно зміщення точок $x = 0$, $-h \leq y < 0$ та $x = 0$, $0 < y \leq h$ дорівнює величині $2w_0$. Нехай $(x_0, 0) \in L$ точка границі зони на осі абсцис. У точках осі абсцис, що лежать правіше точки $(x_0, 0)$, пластичний стан не досягнуто і внаслідок симетрії $w(x, 0) = 0$ ($x > x_0$). Тому

$$w_0 = w(0, +0) - w(x_0, +0). \quad (6)$$

Сталість зміщення у точках дійсної осі, у яких не досягнуто пластичного стану, рівносильна умові

$$\tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (x > x_0). \quad (7)$$

2. Суцільна пластична зона. При антиплоскій деформації у пружній частині тіла компоненти тензора напружень утворюють аналітичну функцію $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ комплексної змінної $\zeta = x + iy$. Крайові умови (1) – (4), (6) для функції $\tau(\zeta)$ у верхній половині півшару поза зоною пластичності

(область D) мають вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \left((\zeta = x + ih, 0 < x < \infty) \right. \\ &\quad \left. \vee (\zeta = x \pm i0, 0 < x < l) \vee (\zeta = iy, -h < y < h) \right), \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, x > x_0), \quad |\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta \in L), \\ \operatorname{Im}(\zeta - l) \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta \in L), \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \tau(\zeta) d\zeta = w_0, \end{aligned} \quad (8)$$

де Γ – лінія з початком у точці $\zeta_1 = x_0$ і кінцем у $\zeta_2 = 0$, яка не перетинає ні пластичної зони, ні берегів розрізу; μ – модуль зсуву матеріалу. Шукатимемо функцію $\tau(\zeta)$ у параметричній формі

$$\tau = \tau(t), \quad \zeta = \zeta(t) \quad (t \in H = \{\operatorname{Im} t > 0\}). \quad (9)$$

Функція $\tau(t)$ аналітична в області H і конформно відображає цю область на певну область G площини τ . Внаслідок перших трьох умов (8) G є четвертиною круга з центром у точці $\tau = 0$ і радіусом k : $\{\operatorname{Im} \tau < 0, \operatorname{Re} \tau > 0, |\tau| < k\}$. Приймаючи у площині t афікси прообразів точок $\tau = k$, $\tau = 0$, $\tau = ik$ відповідно рівними ∞ , -1 , 0 та побудувавши конформне відображення G на H , одержуємо

$$t(\tau) = - \left(\frac{k^2 + \tau^2}{k^2 - \tau^2} \right)^2, \quad \tau(t) = k \frac{\sqrt{-t} - 1}{\sqrt{-t} + 1}. \quad (10)$$

Тут і далі під степеневою функцією з показником меншим від одиниці розумітимемо аналітичну в H функцію, додатну при додатних значеннях аргументу.

Для спрощення подальшого викладу вважатимемо відомим напруження $\tau_{xz} = \tau_B$ у вістрі B півшару. Зміщення w_0 та лінію L – границю пластичної зони – поставимо у залежність від τ_B . Афікс t_B точки B у площині t дає вираз (10) функції $t(\tau)$: $t_B = - \left((k^2 - \tau_B)^2 / (k^2 + \tau_B^2)^2 \right)$. Для визначення функції $\zeta(t)$ спочатку введемо нову невідому, аналітичну в H , функцію

$$\lambda(t) = (\zeta(t) - l) \tau(t). \quad (11)$$

На границі області H внаслідок умов (8) функція $\lambda(t)$ задовольняє такі крайові умови:

$$\operatorname{Im} \lambda(t) = 0, \quad t \in (-\infty, -1), \quad \operatorname{Re} \lambda(t) = h |\tau(t)|, \quad t \in [-1, t_B], \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} \lambda(t) = l |\tau(t)|, \quad t \in (t_B, t_c), \quad \operatorname{Re} \lambda(t) = 0, \quad t \in [t_c, 0],$$

$$\operatorname{Im} \lambda(t) = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Крім того, з формул (10), (11) випливає, що функція $\lambda(t)$ обмежена при $t \rightarrow \infty$ і задовольняє умови

$$\lambda(0) = 0, \quad \lambda(-1) = 0. \quad (13)$$

Розв'язок задачі Келдиша - Седова (12), який задовольняє умови (13), дає

$$\lambda(t) = \frac{R(t)}{\pi} \left(h \int_{-1}^{t_B} \frac{|\tau(\eta)| d\eta}{X(\eta)(\eta - t)} - l \int_{t_B}^{t_c} \frac{|\tau(\eta)| d\eta}{X(\eta)(\eta - t)} \right), \quad (14)$$

де $R(t) = \sqrt{t(t - t_c)(t - t_B)(t + 1)}$ – така аналітична у верхній півплощині t функція, що $R(t) = t^2 + o(t^2)$ при $t \rightarrow \infty$; $X(\eta) = |R(\eta)|$ – дійсна функція дійсного аргументу, $|\tau(\eta)| = k\sqrt{1 + \eta}/(1 + \sqrt{-\eta})$. Функція $\lambda(t)$ обмежена у безмежно

віддаленій точці, якщо виконується умова

$$h \int_{-1}^{t_B} \frac{|\tau(\eta)| d\eta}{X(\eta)} = l \int_{t_B}^{t_C} \frac{|\tau(\eta)| d\eta}{X(\eta)}. \quad (15)$$

Цю рівність можна забезпечити вибором афікса t_C точки C у площині t . Рівняння (15) на відрізку $[t_B, 0]$ має єдиний розв'язок, який знайдемо числовим методом.

Скориставшись тим, що лінія L є образом у площині ζ додатної дійсної півосі площини t , а також рівністю $k/\tau(t) = (\sqrt{t+1})/\sqrt{t+1}$ ($t \in (0, +\infty)$), одержуємо рівняння границі L зони пластичних деформацій

$$x(t) = i + \lambda(t) \sqrt{t}/\sqrt{t+1}, \quad y(t) = \lambda(t)/\sqrt{t+1}, \quad t \in (0, +\infty). \quad (16)$$

У напрямі вирізу пластична зона простягається на відстань $d = x_0 - l$ від вістря тріщини. З формул (11), (14) знаходимо, що

$$d = \frac{1}{\pi} \left(l \int_{t_B}^{t_C} \frac{|\tau(\eta)| \eta d\eta}{X(\eta)} - h \int_{-1}^{t_B} \frac{|\tau(\eta)| \eta d\eta}{X(\eta)} \right).$$

У вираз для границі зони входить параметр t_B , який є функцією напруження τ_{xz} у вершині B півшару. Визначимо через t_B зміщення w_0 . Для цього вважатимемо в останній із формул (8) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 - границя пластичної зони у верхній половині півшару, Γ_2 - верхній край розрізу. Тоді $w_0 = w_{01} + w_{02}$, w_{01} і w_{02} - відносне зміщення точок $(x_0, 0)$ і $(l, +0)$ і кінцевої та початкової точок верхнього краю розрізу відповідно

$$w_{01} = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_0^\infty \tau(t) d\zeta(t), \quad w_{02} = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{t_C}^0 \tau(t) d\zeta(t). \quad (17)$$

Використавши формули (10), (14), одержуємо

$$w_{01} = \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \frac{\lambda(t)}{(t+1)\sqrt{t}} dt, \quad w_{02} = l \frac{\tau_C}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{t_C}^0 \left| \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} \right| \lambda(t) dt, \\ \tau_C = -\tau_{xz}(0, +0) = k \frac{\sqrt{1+t_C}}{1+\sqrt{-t_C}}. \quad (18)$$

Для деяких відношень ширини півшару та глибини розрізу форма межі зони пластичних деформацій зображена на рис. 2. Як і у випадку півпростору ($h = \infty$) [4] при малих w_0 пластична зона є круговою, а зі збільшенням w_0 витягується у напрямі перпендикулярному до розрізу. Чим більша ширина півшару при сталій глибині вирізу, тим витягнітушою стає форма зони у перпендикулярному до розрізу напрямі.

3. Дослідження пластичної зони, утвореної трьома пластичними смугами. Дослідимо розвиток трьох смуг пластичності з фронту розрізу, одна з яких (центральна) є на продовженні розрізу, а дві інші (бічні) симетричні стосовно вирізу й утворюють із центральною СП кут α , який вважатимемо наперед

відомим.

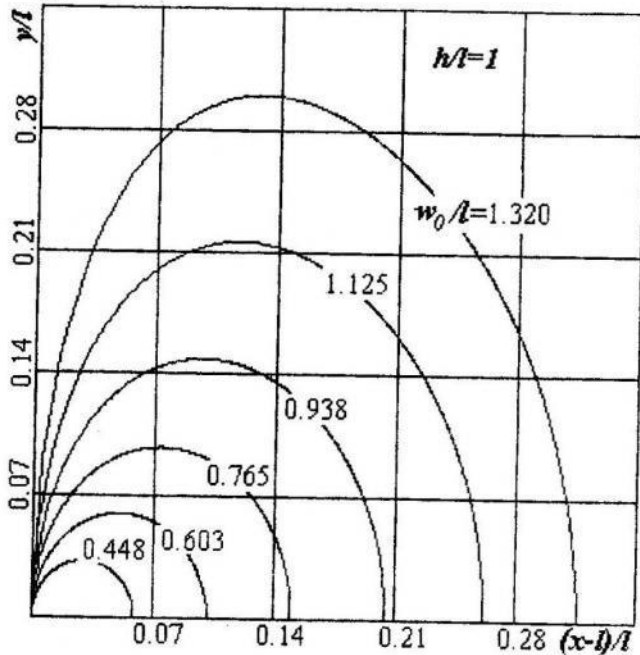


Рис. 2

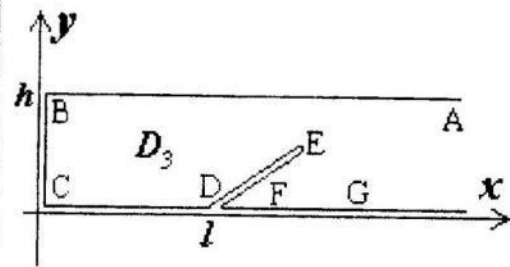


Рис. 3

Складену з компонент тензора напружень аналітичну у пружній частині півшару функцію $\tau_{yz} + i\tau_{xz}$ позначимо тепер $\tau_3(\zeta)$ ($\zeta = x + iy$). Як і у попередньому випадку замість зміщення w_0 задамося напруженням τ_{xz} у точці B вершини півшару. Функція $\tau_3(\zeta)$ аналітична в області D_3 – півсмузі $\text{Re } \zeta > 0$, $0 < \text{Im } \zeta < h$, розрізаній уздовж відрізка $\arg(\zeta - l) = \alpha$, $0 < |\zeta - l| < d_2 < h/\sin \alpha$ (d_2 – довжина бічних СП), яка зображена на рис. 3. Визначимо для функції $\tau_3(\zeta)$ крайові умови на границі області D_3 . В усіх точках, де межі областей D та D_3 збігаються, крайові умови для функцій $\tau_3(\zeta)$ та $\tau(\zeta)$ теж збігаються. Для формулювання крайової задачі для $\tau_3(\zeta)$ ($\zeta \in D_3$) достатньо зазначити умови на СП

$$|\tau_3(\zeta)| = k \quad (\arg(\zeta - l) = \alpha, \quad 0 < |\zeta - l| < d_2), \quad (19)$$

$$\arg \tau_3(l + d_2 e^{i\alpha}) = -\alpha, \quad |\tau_3(\zeta)| = k \quad (\text{Im } \zeta = 0, \quad l \leq \text{Re } \zeta \leq l + d_1),$$

d_1 – довжина центральної СП. Функція $\tau_3(\zeta)$ конформно відображає область D_3 (рис. 3) на область G . У площині ζ ламана $DEFG$, що збігається з берегами СП, відображається на дугу $|\tau| = k$, $-\pi/2 < \arg \tau < 0$. Оскільки довжина бічної СП заздалегідь невідома, то область D_3 визначена з точністю до одного параметра – глибини розрізу. Функцію $\tau_3(\zeta)$ можна знайти безпосередньою побудовою конформного відображення. При будь-якій допустимій глибині розрізу конформне відображення D_3 на G існує і єдине оскільки на їхніх границях є рівно три пари точок A, B, D , афікси яких фіксовані. Тому при змінній глибині вирізу конформні відображення D_3 на G формують однопараметричну множину функцій. Знайшовши у цій множині функцію, яка задовольняє другу з умов (19), знайдемо глибину вирізу (довжину бічної СП) для $\tau_{xz} = \tau_B$ у вершині B півшару.

Шукатимемо відображення $\tau_3(\zeta)$ у параметричному вигляді $\tau_3 = \tau_3(t)$, $\zeta = \zeta_3(t)$ ($t \in H$, $H = \{\text{Im } t > 0\}$). Якщо відповідні точки на границях областей D_3 та G мають спільний прообраз на границі H , то шукану функцію $\tau_3(\zeta)$ визначає пара функцій $\tau_3(t), \zeta_3(t)$. Зафіксувавши три пари точок на границях областей,

конкретизуємо відображення H на G . Це можна зробити довільним способом, наприклад, як у попередньому випадку. Зручно обрати афікси точок A, B, D у площині t , які дорівнюють $\infty, 0, 1$ відповідно. Композицією елементарних відображень отримуємо

$$\tau_3(t) = k \frac{\sqrt{t-1} - \sqrt{t-t_G}}{\sqrt{t_G-1}}, \quad t = \frac{(\tau^2 + \tau_B^2)(k^4 + \tau_B^2 \tau^2)}{\tau^2(k^2 - \tau_B^2)^2}, \quad t_G = \left(\frac{k^2 + \tau_B^2}{k^2 - \tau_B^2} \right)^2. \quad (20)$$

Відомим є афікс t_E точки E у площині t

$$t_E = (k^4 + 2k^2\tau_B^2 \cos 2\alpha + \tau_B^4) / (k^2 - \tau_B^2)^2.$$

Афікси t_C, t_F ($t_C \in (0, 1)$, $t_F \in (t_E, t_G)$) визначимо при побудові відображення $\zeta = \zeta_3(t)$, яке шукаємо у вигляді інтеграла Крістофеля-Шварца

$$\zeta_3(t) = M \int_0^t \frac{(\eta - t_E) d\eta}{\sqrt{\eta(\eta - t_C)(\eta - 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}(\eta - t_F)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}}} + ih, \quad (21)$$

$$M = \frac{h}{\int_{t_C}^{t_G} F(\eta) d\eta}, \quad F(\eta) = \frac{|\eta - t_E|}{\sqrt{|\eta(\eta - t_C)| |\eta - 1|^{\frac{\alpha}{\pi}} |\eta - t_F|^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}}}.$$

Для допустимих значень параметрів t_C, t_F відображення (21) задає множину шестикутників $ABCDEF$ площини ζ із фіксованими кутами вершин. Потрібну фігуру, для якої $|BC| : |CD| = h/l$ і $|DE| = |EF|$, одержимо, визначивши t_E, t_C з системи рівнянь

$$l \int_0^{t_C} F(\eta) d\eta = h \int_{t_C}^1 F(\eta) d\eta, \quad \int_1^{t_E} F(\eta) d\eta = \int_{t_E}^{t_F} F(\eta) d\eta. \quad (22)$$

Існування й єдність розв'язку системи (22) гарантується теоремою Рімана про конформне відображення. Знайдемо його методом послідовних наближень

$$t_C^{(m)} = t_C^{(m-1)} \frac{h I_{m-1}(t_C^{(m-1)}, 1)}{l I_{m-1}(0, t_C^{(m-1)})}, \quad t_F^{(m)} = t_F^{(m-1)} \frac{I_{m-1}(1, t_E)}{I_{m-1}(t_E, t_F^{(m-1)})},$$

де $t_C^{(0)} = 0, 5$, $t_F^{(0)} = (t_G + t_E)/2$, $I_m(a, b)$ – інтеграл по відрізку $[a, b]$ від функції $F(\eta)$, в якій t_C, t_F замінено на $t_C^{(m)}, t_F^{(m)}$. Визначивши афікси t_C, t_F точок у площині t , які відповідають вершинам СП, знайдемо з формули (21) довжини центральної та бічних СП

$$d_1 = M \int_{t_F}^{t_G} F(\eta) d\eta, \quad d_2 = M \int_1^{t_E} F(\eta) d\eta. \quad (23)$$

Довжини СП залежать не тільки від напруження τ_B , а й від кута між бічними та центральною СП. Зокрема при $\alpha \rightarrow \pi/2$, $t_E \rightarrow 1$, $d_2 \rightarrow 0$ – бічні СП щезають. Вони також не можуть утворювати гострих кутів з берегами вирізу. Довжини СП та функція $\tau_3(\zeta)$ знайдені як функції τ_B – напруження τ_{xz} у вершині B

півшару. Щоб подати їх функціями зміщення w_0 , виразимо w_0 через τ_B

$$w_0 = w_1 + w_2 + w_3, \quad (24)$$

де w_1 – відносне зміщення кінцевої та початкової точок центральної СП; w_2 – початкових точок бічної смуги; w_3 – кінцевої та початкової точок верхнього берега розрізу. Аналогічно до випадку суцільної зони подамо доданки формул (24) інтегралами по відповідних відрізках границі площини H

$$w_1 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{t_F}^{t_G} \tau_3(t) d\zeta_3(t), \quad w_2 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} 1 \int_1^{t_F} \tau_3(t) d\zeta_3(t), \quad w_3 = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{t_c}^1 \tau_3(t) d\zeta_3(t).$$

З формул (20), (21) одержуємо

$$\begin{aligned} w_1 &= M \frac{k}{\mu \sqrt{t_G - 1}} \int_{t_F}^{t_G} F(\eta) \sqrt{t_G - \eta} d\eta, \\ w_3 &= M \frac{k}{\mu \sqrt{t_G - 1}} \int_{t_c}^1 F(\eta) \left(\sqrt{t_G - 1} - \sqrt{1 - \eta} \right) d\eta, \\ w_2 &= M \frac{k}{\mu \sqrt{t_G - 1}} \int_1^{t_F} F(\eta) \left(\sqrt{t_G - \eta} \cos \alpha - \sqrt{\eta - 1} \sin \alpha \right) d\eta. \end{aligned} \quad (25)$$

Результати обчислення довжин СП залежно від зміщення w_0 для випадку $h = l$, $\alpha = 60^\circ$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

τ_B / k	$w_0 / (kl / \mu)$	d_1 / l	d_2 / l	$w_1 / (kl / \mu)$	$w_2 / (kl / \mu)$
0,1	0,14838	0,01182	0,00280	0,01317	0,00111
0,2	0,30194	0,04661	0,01170	0,05220	0,00471
0,3	0,45920	0,10251	0,02839	0,11561	0,01164
0,4	0,62308	0,17665	0,05626	0,20029	0,02438
0,5	0,79518	0,26396	0,10075	0,29888	0,04503
0,6	0,97773	0,35686	0,17154	0,39657	0,08374
0,7	1,16945	0,43460	0,28175	0,42294	0,15947
0,8	1,37376	0,43632	0,44901	0,35651	0,33193

Зі збільшенням зсуву w_0 спочатку СП ростуть пропорційно, потім ріст бічних СП пришвидшується. При ще більших зміщеннях w_0 ріст центральної СП гальмується: простежується ефект його екранування з боку бічних СП.

4. Розвиток однієї смуги пластичності на продовженні розрізу. Функцію $\tau_{yz} + i\tau_{xz}$ для цього випадку позначимо $\tau_1(\zeta)$. Її можна отримати з $\tau_3(\zeta)$ як таку, що відображає півсмуку $\operatorname{Re} \zeta > 0, 0 < \operatorname{Im} \zeta < h$ з нульовим розрізом на область G . Приймаючи у формулі (21) $t_F = t_E = 1$ і позначивши тепер $\zeta_3(t)$ через $\zeta_1(t)$, маємо

$$\zeta_1(t) = \frac{2h}{\pi} \ln \left(\sqrt{t} \operatorname{ch} \frac{\pi l}{2h} + \sqrt{t \operatorname{ch}^2 \frac{\pi l}{2h} - 1} \right). \quad (26)$$

Пара функцій $\tau_3(\zeta)$, $\zeta_1(t)$ визначає напружено-деформований стан півшари та характеристики пластичної смуги. Із формули (26) знайдемо $t(\zeta) = \text{ch}^{-2}(\pi l/(2h)) \text{ch}^2(\pi \zeta/(2h))$ і, зокрема, $t_C = \text{ch}^{-2}(\pi l/(2h))$. Підставимо $t = t_G$ у формулу (26) і знайдемо образ вершини СП у площині ζ при відображенні $\zeta_1(t)$, а, отже, й довжину смуги d_0 СП

$$d_0 = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{(k^2 + \tau_B^2) \text{ch} \frac{\pi l}{2h} + \sqrt{(k^2 + \tau_B^2)^2 \text{ch}^2 \frac{\pi l}{2h} - (k^2 - \tau_B^2)^2}}{k^2 - \tau_B^2} - l. \quad (27)$$

Відносно зміщення кінцевої та початкової точок СП w_{11} та кінцевої і початкової точок верхнього берега розрізу w_{12} можна записати як

$$w_{11} = \frac{1}{\mu} \text{Im} \int_1^{t_G} \tau_3(t) d\zeta_1(t), \quad w_{12} = \frac{1}{\mu} \text{Im} \int_{t_C}^1 \tau_3(t) d\zeta_1(t)$$

або після відповідних обчислень

$$w_{11} = \frac{(k^2 - \tau_B^2) h \text{ch} \frac{\pi l}{2h}}{2\pi\mu\tau_B} \int_1^{t_G} \sqrt{\frac{t_G - \eta}{\eta^2 \text{ch}^2 \frac{\pi l}{2h} - \eta}} d\eta,$$

$$w_{12} = \frac{(k^2 - \tau_B^2) h \text{ch} \frac{\pi l}{2h}}{2\pi\mu\tau_B} \int_{\text{ch}^{-2} \frac{\pi l}{2h}}^1 \frac{\sqrt{t_G - \eta} - \sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{\eta^2 \text{ch}^2 \frac{\pi l}{2h} - \eta}} d\eta. \quad (28)$$

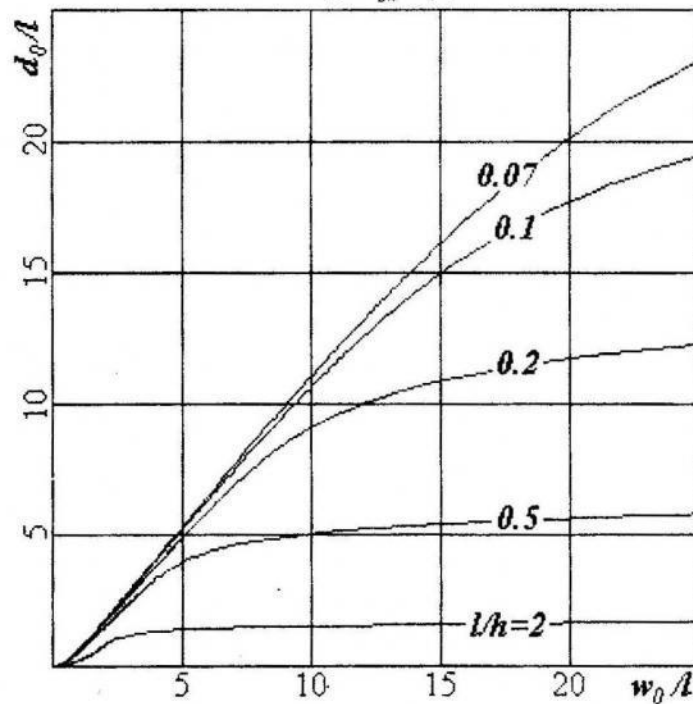


Рис. 4

Залежності довжини d_0 СП від зміщення $w_0 = w_{11} + w_{12}$ для деяких співвідношень h/l зображені на рис. 4. СП монотонно росте зі збільшенням w_0 і стає безмежно великою при наближенні τ_B до межі плинності. Безмежно великим тоді є також зміщення w_0 .

Задане стале зміщення на верхній і нижній половинках торця півшару можна забезпечити, зчепивши їх із жорсткими накладками і приклавши до накладок відповідну протилежно спрямовані сили

$$Q = \int_0^h \tau_{xz}(0, y) dy.$$

На верхній половині торця півшару ($t \in [0, t_C]$) тому, подавши силу через $\tau_3(t)$ і $\zeta_1(t)$, матимемо

$$Q = \int_0^{t_C} |\tau(t)| d|\zeta(t)|.$$

Оскільки $|\zeta(t)| = (\pi/h) \operatorname{ch}(\pi l/(2h)) / \sqrt{t(1-t/t_C)}$ для $t \in [0, t_C]$, то, врахувавши співвідношення (20), одержуємо

$$Q = \frac{kh \operatorname{ch}(\pi l/(2h))}{\pi \sqrt{t_C - 1}} \int_0^{t_C} \frac{\sqrt{t_C - t} - \sqrt{1 - t}}{\sqrt{t(1 - t/t_C)}} dt. \quad (29)$$

Для постійної глибини розрізу l і при фіксованому w_0 довжина СП є тим меншою, чим менша висота півшару h . Спочатку при малих w_0 довжина смуги пропорційна квадрату w_0 ; потім з ростом w_0 майже лінійно збільшується. При великих w_0 ріст сповільнюється. Характер росту зі збільшенням w_0 аналогічний зміні довжини центральної СП розгалуженої зони, утвореної трьома СП.

Довжина СП як функція прикладеної на торці сили Q зростає зі збільшенням сили.

Таблиця 2

w_0/l	$\delta_1/(kl/\mu)$	$\delta_3/(kl/\mu)$	$\delta_\infty/(kl/\mu)$
0,2	0,0326	0,0277	0,0260
0,4	0,1252	0,1064	0,1001
0,6	0,2715	0,2310	0,2240
0,8	0,4620	0,3932	0,3867
1,0	0,6882	0,5870	0,5831
1,2	0,9447	0,8070	0,8042

Проаналізуємо розглянуті зони за величиною $w(l, +0) - w(l, -0)$ – розрив зміщення, що виникає у вершині розрізу. Залежності розриву зміщення ($\delta_1 = 2w_{11}$ стосується зони, утвореної при $h = l$ одною СП; $\delta_3 = 2(w_1 + w_2)$ – трьома; $\delta_\infty = 2w_{01}$ – суцільної зони) від w_0 наведено у табл. 2. Розрив у вершині розрізу для розгалужених СП перевищує його значення для суцільної зони, причому можна стверджувати, що чим більше СП – тим точніше вони моделюють суцільну пластичну зону. У випадку однієї СП перевищення становить приблизно 20%; для трьох СП воно незначне – розриви зміщення для суцільної зони та зони, утвореної трьома смугами, практично збігаються.

Розрив зміщення у вершині вирізу при малих w_0 пропорційний квадрату w_0 для всіх трьох розглянутих форм зон. Суцільна зона гомотетично збільшується зі збільшенням w_0 . Пропорційно ростуть СП розгалуженої зони, причому співвідношення між їхніми довжинами є такими, як і у випадку півбезмежного розрізу в тілі, навантаженому на нескінченності [6] (див. [7]). У разі низьких навантажень розвиток зон визначається коефіцієнтом інтенсивності напруження пружного розв'язку. При подальшому збільшенні w_0 змінюється форма суцільної зони, зростає відношення довжини бічної СП до центральної. Для таких рівнів навантажень знання коефіцієнта інтенсивності недостатнє, щоб врахувати пластичний ефект. Навіть при досить великих навантаженнях (w_0 дещо перевищує l , а напруження на торці півшару $-0,7k$) для $h = l$ розрив зміщення у вістрі розрізу мало відрізняється для розглянутих форм пластичних зон. Оскільки таке навантаження треба вважати дуже високими з погляду міцності цього тіла, можна стверджувати, що моделювання зони однією СП достатнє для задовільного врахування пластичного ефекту.

-
1. Прокопишин І.А., Сулим Г.Т., Хлебніков Д.Г. Квазістатичне відшарування плоско здеформованої пластини від вінклерової основи // Фіз. - хім. мех. матеріалів. - 1999. - N 5. - С.33-38.
 2. Лазько В.А., Мачуга О.С. Определение границ межслойных дефектов в слоистых анизотропных пластинах // Механика композит. матер. - 1985. - N 6. - С.1112-1115.
 3. Мачуга О.С., Пелех Б.Л. О сопротивлении разрушению слоистых анизотропных пластин с дефектами на границе раздела // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. - 1986. - N 1. - С.168-174.
 4. Кривень В.А. Пружнопластична задача для півпростору з крайовим розрізом при заданому зміщенні на границі півпростору // Фіз. - хім. мех. матеріалів. - 1993. - N 4. - С.70-74.
 5. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. - М., 1979.
 6. Кривень В.А. Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи о продольном сдвиге тела с трещиной // Физ.- хім. мех. матеріалів. - 1985. - N 6. - С.10-16.
 7. Витвицький П.М., Кривень В.А. Про структуру пластичних зон біля вершини тріщини при антиплоскій деформації // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1981. - N 4. - С.32-36.

**PLASTIC ZONES DEVELOPMENT
AT SHIFT BAND WEDGING****Vasyl' Kryven', Georgiy Sulym***Ivan Pulyui university of technology in Ternopil'**56 Rus'ka Str. 79000 Ternopil', Ukraine**Ivan Franko National University in Lviv**1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

Anti-plane plastic-elastic problem for semi-infinite band with a plane cut parallel to band side is solved. The cut begin with band edge, dividing it in two equal parts. Deformation is caused by constant displacements on edge upper and lower halves. Case of continual plastic zone and case of zones formed by one and three plastic layers are considered. Zone edge, layers lengths and displacement jump displacement at the cut vertex are found. Comparisonal analysis of the result is given.

Key words: Anti-plane plastic-elastic problem.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2001

Прийнята до друку 20.06.2002