

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН, ПАРАЛЕЛЬНИХ ДО ЛІНІЇ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ, ІЗ УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Іван ЗВІЗЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Із використанням класичної теорії згину пластин і методів теорії функцій комплексної змінної досліджена задача згину кусково-однорідної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів і періодичною системою співвісних тріщин, паралельних до неї. Вважається, що у процесі деформування пластини береги тріщин контактують. Розв'язок задачі зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і контактного тиску для різних геометричних і механічних параметрів задачі.

Ключові слова: кусково-однорідна пластина, тріщина, згинальні моменти.

Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини, яка складається з двох спаяних півплощин, в одній із них є періодична система прямолінійних тріщин завдовжки $2l$, які паралельні до лінії поділу матеріалів, і їх береги контактують внаслідок дії сталих згинальних моментів на нескінченності (див. рис. 1).

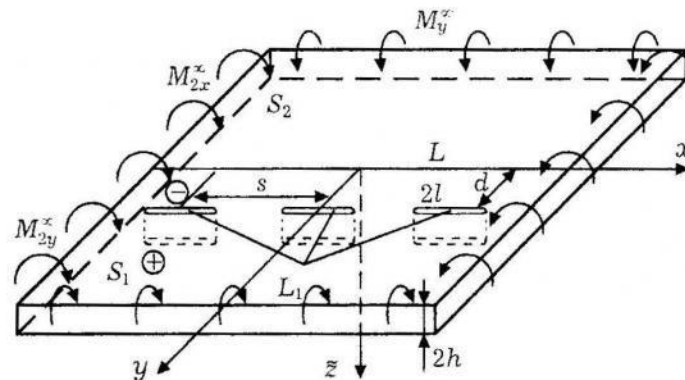


Рис. 1. Схема задачі

Позначмо товщину пластини $2h$, лінію поділу матеріалів — L , частину прямої, де розміщена тріщина — L_1 . Виберімо декартову систему координат $Oxyz$ у серединній площині пластини, провівши вісь Ox уздовж лінії поділу матеріалів. Припустимо, що центри тріщин перебувають на відстані d від лінії поділу матеріалів, а центри двох суміжних тріщин на відстані s . Півплощину, для якої

$y > 0$ ($y < 0$), позначмо S_1 (S_2). Величинам, які пов'язані із півплощиною S_j , приписуватимемо індекс j , причому він набуває два значення $j = 1$ або $j = 2$.

Припускати́мемо, що на лінії поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Контакт бере́гів тріщини розумі́ємо як у праці [1], напружений стан пластини подаємо у вигляді суперпозиції плоского напруженого стану і згину пластини, що описується класичною теорією.

Граничні умови на берегах тріщини запи́шемо у вигляді

$$\sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm = -\frac{N}{2h}, \quad M_y^\pm + i \int P^\pm dx = M_y \quad \text{на } L_1, \quad (1)$$

$$[v] = -h[\partial_y w], \quad M_y = hN \quad \text{на } L_1, \quad (2)$$

σ_y, τ_{xy} — компоненти тензора напружень, а u, v — проекції вектора переміщення на осі Ox, Oy у плоскому напруженому стані; N — контактні зусилля, M_y, P — згинальний момент і узагальнена поперечна сила Кірхгофа відповідно; значками '+' і '-' позначено граничне значення функцій, якщо z прямує до L_1 , причому w — прогин пластини; $z = x + iy$ і $y \rightarrow d \pm 0$; $[f] = f^+ - f^- = f(x, d+0) - f(x, d-0)$; $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$; $i = \sqrt{-1}$.

Для визначення плоского напруженого стану скористаймося комплексними потенціалами Колосова-Мусхелішвілі [2] $\Phi_{Pj}(z)$ і $\Psi_{Pj}(z)$ для кожної півплощини, подавши їх у вигляді

$$\Phi_{Pj}(z) = \Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z), \quad \Psi_{Pj}(z) = \Psi_{P0}(z) + \Psi_P^{(j)}(z), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{P0}(z) &= \frac{1}{2s} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \frac{(t-z+id)\pi}{s} g'(t) dt, \\ \Psi_{P0}(z) &= \frac{1}{2s} \int_{-l}^l \left(\overline{g'(t)} - g'(t) \right) \operatorname{ctg} \frac{(t-z+id)\pi}{s} dt - \\ &\quad - \frac{\pi}{2s^2} (z-2id) \int_{-l}^l g'(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{(t-z+id)\pi}{s} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

де $g'(t) = i(1+\kappa_1)(2\mu_1)^{-1} \partial_x[u+iv]$, $\kappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}$, ν — коефіцієнт Пуассона, μ — модуль зсуву, $\Phi_P^{(j)}(z)$, і $\Psi_P^{(j)}(z)$ — голоморфні в області S_j функції, які на нескінченості зникають.

Аналітично продовжмо функцію $\Phi_P^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_P^{(j)}(z) = -\overline{\Phi_P^{(j)}}(z) - z\overline{\Phi_P'^{(j)}}(z) - \overline{\Psi_P^{(j)}}(z), \quad (5)$$

тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= \Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z) + R_j(z), \\ 2\mu_j \partial_x \left(u^{(j)} + iv^{(j)} \right) &= \kappa_j \left(\Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z) \right) - R_j(z), \end{aligned} \quad (6)$$

де $R_j(z) = \overline{\Phi_{P0}(z)} + z\overline{\Phi'_{P0}(z)} + \overline{\Psi_{P0}(z)} + \Phi_P^{(j)}(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_P^{(j)}(z)}$.

Граничні умови на лінії поділу матеріалів матимуть вигляд

$$\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = \sigma_y^{(2)} - i\tau_{xy}^{(2)}, \quad u^{(1)} + iv^{(1)} = u^{(2)} + iv^{(2)}, \quad \text{на } L. \quad (7)$$

Уведемо функції

$$\Theta(z) = \Phi_P^{(1)}(z) + \Phi_P^{(2)}(z), \quad z \in S_1 + S_2, \quad (8)$$

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j \Phi_P^{(j)}(z) - \mu_j \Phi_P^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j. \quad (9)$$

Враховуючи (6), з першої умови (7) отримаємо

$$\Theta^+(x) - \Theta^-(x) = 0, \quad x \in L. \quad (10)$$

Якщо розв'язати задачу лінійного спряження (10), то знайдемо

$$\Theta(z) = 0. \quad (11)$$

Проробивши подібні викладки з другою граничною умовою (7), матимемо

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left(A_4 A_1 \left(\overline{\Phi_{P0}(z)} + z\overline{\Phi'_{P0}(z)} + \overline{\Psi_{P0}(z)} \right), \quad z \in S_1 \right) \cup \\ &\cup \left(\Phi(z) = -A_3 A_2 \Phi_{P0}(z), \quad z \in S_2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

де $A_3 = A_2^{-1}(\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1)$, $A_4 = A_1^{-1}(\mu_2 - \mu_1)$, $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$.

Враховуючи (11) і (12), на підставі (8) і (9) отримаємо

$$\Phi_P^{(j)}(z) = (A_j^{-1} \Phi(z), \quad z \in S_j) \cup (-A_{3-j}^{-1} \Phi(z), \quad z \in S_{3-j}). \quad (13)$$

Одну з граничних умов на берегах тріщини запишемо у вигляді

$$\left(\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} \right)^+ + \left(\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} \right)^- = -\frac{N}{h}, \quad \text{на } L_1. \quad (14)$$

Якщо тепер врахувати (6), (4), (13), то на підставі (14) отримаємо

$$\int_{-l}^l [\Pi_{11}(t, x)g'_1(t) + \Pi_{12}(t, x)g'_2(t)] dt = 0, \quad x \in [-l; l], \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l [\Pi_{21}(t, x)g'_1(t) + \Pi_{22}(t, x)g'_2(t)] dt = N, \quad x \in [-l; l], \quad (16)$$

де $g'(t) = g'_1(t) + ig'_2(t)$, $\Pi_{11}(t, x) = \Pi_{22}(t, x)$,

$$\begin{aligned} \Pi_{11}(t, x) &= -2h\pi \left[\frac{A_3 + A_4}{2s} \operatorname{ctg}_2(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi^2 d^2 A_3}{s^3} (c_2(t, x) \operatorname{ctg}_1(t, x) + c_1(t, x) \operatorname{ctg}_2(t, x)) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(t, x) &= (-1)^j 2h\pi \left\{ \frac{1}{s} \operatorname{ctg} \frac{(t-x)\pi}{s} + \frac{A_4 - A_3}{2s} \operatorname{ctg}_1(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + A_4 \left[\frac{4\pi^2 d^2}{s^3} (c_2(t, x) \operatorname{ctg}_2(t, x) - c_1(t, x) \operatorname{ctg}_1(t, x)) + (-1)^j \frac{2\pi d}{s^2} c_2(t, x) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}_1(t, x) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{csch}^2 \beta}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{cth}^2 \beta}, & \operatorname{ctg}_2(t, x) &= -\frac{\operatorname{cth} \beta \operatorname{cosec}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{cth}^2 \beta}, & \alpha &= \frac{t-x}{s} \pi, \\ c_1(t, x) &= 2 \frac{1 - \cos 2\alpha \operatorname{ch} 2\beta}{(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\beta)^2}, & c_2(t, x) &= -2 \frac{\sin 2\alpha \operatorname{sh} 2\beta}{(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\beta)^2}, & \beta &= \frac{2d}{s} \pi. \end{aligned}$$

Для дослідження напруженого стану, пов'язаного зі згином пластини, введемо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ та $\Psi_{3j}(z)$. Тоді згідно з [4], можна записати

$$\partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \Phi_{3j}(z) + \bar{R}_j(z), \quad 2\tilde{\mu}_j \left(-M_y + i \int P dx \right) = \tilde{\kappa}_j \Phi_{3j}(z) - \bar{R}_j(z), \quad (18)$$

де $\bar{R}_j(z) = \overline{\Phi_{3j}(z)} + z \overline{\Phi'_{3j}(z)} + \overline{\Psi_{3j}(z)}$,

$$\tilde{\mu}_j = \frac{1}{2D_j(1-\nu_j)}, \quad \tilde{\kappa}_j = \frac{3+\nu_j}{1-\nu_j}, \quad D_j = \frac{2E_j h^3}{3(1-\nu_j^2)}.$$

Комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi_{3j}(z) = \Phi_{30}(z) + \Phi_3^{(j)}(z) + \Gamma_j, \quad \Psi_{3j}(z) = \Psi_{30}(z) + \Psi_3^{(j)}(z) + \Gamma'_j,$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= -\frac{M_{jx}^\infty + M_{jy}^\infty}{4D_j(1+\nu_j)}, & \Gamma'_j &= (M_{jy}^\infty - M_{jx}^\infty) \tilde{\mu}_j, \\ \Phi_{30}(z) &= \frac{1}{2s} \int_{-l}^l \operatorname{ctg} \frac{(t-x+id)\pi}{s} Q'(t) dt, & Q(t) &= \frac{\partial_x(\partial_y w_1 - i\partial_x w_1)}{1+\tilde{\kappa}_j}, \\ \Psi_{30}(z) &= -\frac{1}{2s} \int_{-l}^l [\tilde{\kappa}_1 \overline{Q(t)} + Q(t)] \operatorname{ctg} \frac{(t-z+id)\pi}{s} dt - \\ &\quad - \frac{\pi}{2s^2} (z-2id) \int_{-l}^l Q(t) \operatorname{cosec}^2 \frac{(t-z+id)\pi}{s} dt, \end{aligned}$$

$\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$ голоморфні в S_j і зникаючі на нескінченості функції.

Продовжимо аналітично функцію $\Phi_3^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою, аналогічною до формули (5) і введемо функції

$$\begin{aligned} \Theta_3(z) &= \Phi_3^{(1)}(z) + \Phi_3^{(2)}(z), & z &\in S_1 + S_2, \\ \Phi_3(z) &= \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j \Phi_3^{(j)}(z) - \tilde{\mu}_j \Phi_3^{(3-j)}(z), & z &\in S_j, \end{aligned}$$

тоді, виходячи з умов ідеального механічного контакту, як це зроблено в плоскій задачі, отримаємо задачі лінійного спряження для визначення функцій $\Theta_3(z)$ і $\Phi_3(z)$, тобто можна записати явний вигляд для функцій $\Phi_3^{(j)}(z)$. Використовуючи граничні умови на берегах тріщини та враховуючи (18), отримаємо

$$A + \int_{-l}^l [z_{11}(t, x) Q_1(t) + z_{12}(t, x) Q_2(t)] dt = 0, \quad x \in [-l; l], \quad (19)$$

$$M_y^{(1)} = M_y^\infty + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l [z_{21}(t, x) Q_1(t) + z_{22}(t, x) Q_2(t)] dt, \quad x \in [-l; l], \quad (20)$$

де $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$; A — невідома стала,

$$\begin{aligned} z_{22}(t, x) = -z_{11}(t, x) = \frac{\pi}{\tilde{\mu}_1 s} \left[\frac{\tilde{k}_1^2 \tilde{A}_4 + \tilde{A}_3}{4} \operatorname{ctg}_2(t, x) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^2 d^2 \tilde{A}_4}{s^2} (\operatorname{ctg}_2(t, x) c_1(t, x) + c_2(t, x) \operatorname{ctg}_1(t, x)) \right], \\ z_{ij}(t, x) = \frac{\pi}{\tilde{\mu}_1 s} \left\{ -\frac{\tilde{k}_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t-x}{s} \pi + \frac{\tilde{k}_1^2 \tilde{A}_4 - \tilde{A}_3}{4} \operatorname{ctg}_1(t, x) + (-1)^{j+1} \frac{\tilde{A}_4 \pi d}{s} \left[\tilde{k}_1 c_2(t, x) + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^j \frac{2\pi d}{s} (c_1(t, x) \operatorname{ctg}_1(t, x) - c_2(t, x) \operatorname{ctg}_2(t, x)) \right] \right\}, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_3 = A_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1), \quad \tilde{A}_4 = \tilde{A}_1 (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1), \quad \tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j} \tilde{\kappa}_j.$$

Підставляючи (20) і (16) у другу граничну умову (2), знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \{ [\alpha \beta \Pi_{21}(t, x) - z_{21}(t, x)] Q_1(t) + z_{22}(t, x) Q_2(t) + \alpha \Pi_{22}(t, x) g_2'(t) \} dt = M_Y^\infty, \\ |x| < l, \quad \beta = -\frac{E_1 h}{1 - \nu_1}, \quad \alpha = h. \end{aligned} \quad (21)$$

Співвідношення (21), (19), (15) дають систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $g_2'(t)$, а також сталої A , причому $g_1'(t) = \beta Q_1(t)$.

Одержану систему рівнянь доповнюємо залежностями

$$\int_{-l}^l Q_j(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^l g_2'(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^l t Q_2(t) dt = 0, \quad (22)$$

які виражають однозначність переміщень, прогинів і кутів повороту під час обходу контура тріщини L_1 .

Зауважмо таке, якщо в рівнянні (21) припустити, що $\alpha = 0$, і приєднати до нього рівняння (19), то отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для кусково-однорідної пластини з тріщиною без урахування контакту її берегів. Крім того, як частковий випадок задачі можна одержати розв'язки відповідних задач для півплощини з вільним краєм ($\mu_2 = 0$) або жорстко затиснутим краєм ($\mu_2 = \infty$).

Систему рівнянь (15), (19), (21), (22) розв'язуємо чисельно методом механічних квадратур [3].

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів знайдемо, використовуючи формули

$$(K_1^\pm - iK_2^\pm, k_1^\pm - ik_2^\pm) = \pm \lim_{t \rightarrow \pm l} \sqrt{(l^2 - t^2)l^{-1}} (D_1(3 + \nu_1)Q(t) - hg'(t)).$$

Провели числовий аналіз задачі для $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$. На рис. 2–4 подані зведені коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль залежно від параметра $n = E_2/E_1$ для різних значень відстаней від лінії поділу матеріалів $\bar{d} = d/l$ та між центрами тріщин $\bar{s} = s/l$. Рис. 5 зображає розподіл контактного тиску у випадку $\bar{d} = 0,1$ уздовж тріщини за різних значень $\bar{s}$ та n .

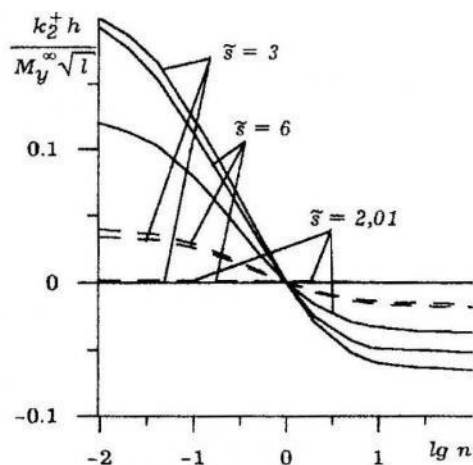


Рис. 2

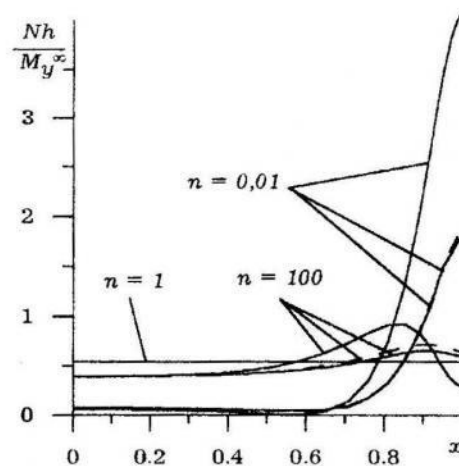


Рис. 3

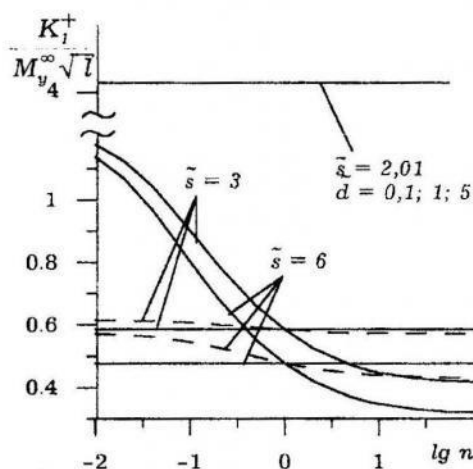


Рис. 4

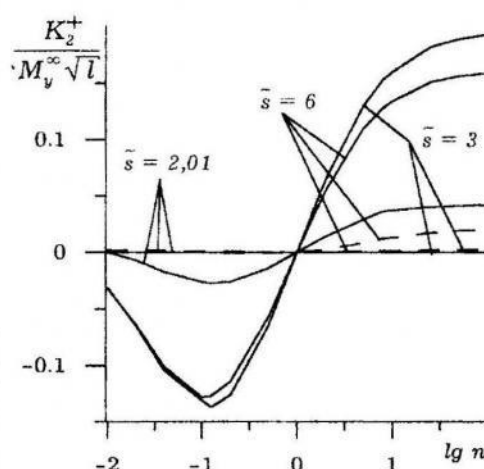


Рис. 5

Зауважмо, що коефіцієнт інтенсивності $k_1^\pm$ визначають через $K_1^\pm$ за формулою $k_1^\pm h = \frac{3(1+\nu_1)}{2(3+\nu_1)} K_1^\pm$; суцільні, штрихові та пунктирні лінії на рис. 2–4 відповідають значенням $\bar{d} = 0, 1, \bar{d} = 1, \bar{d} = 5$, а на рис. 5 — $\bar{s} = 2,01, \bar{s} = 3, \bar{s} = 6$ відповідно.

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та тех. наук. 1998. N 7. С. 49–51.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К., 1976.
4. Прусов И. А. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., 1981.

**BENDING OF A PIECE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE
WITH A PERIODIC SYSTEM OF STRAIGHT CRACKS
WHICH ARE PARALLEL TO INTERFACE WITH THE ACCOUNT
OF CONTACT OF CRACK FACES**

Viktor Opanasovych, Ivan Zvizlo

*Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

Using classical theory of plate bending and methods of the theory of functions of complex variable the problem about bending of a piece-homogeneous plate with straight interface and periodic collinear cracks which are parallel to it is investigated. It is assumed that the crack faces are in contact during deformational process. Solution of the problems is reduced to the system of integral equations, which is solved by mechanical quadratures method. Numerical analysis of force and moments intensities and contact force under the different geometrical and mechanical parameters of the problem is done.

Key words: piece-homogeneous plate, crack, bending moments

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002