

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ РІЗНИХ ДОВЖИН УЗДОВЖ ДУГИ КОЛА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Наталія КОПОТЬ

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Пропонуємо підхід до дослідження напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома різними завдовжки тріщинами уздовж дуги кола за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту уздовж усієї довжини, під дією однорізного поля зусиль на нескінченності. Частковий випадок цієї задачі розглянутий у праці [2] для однакових завдовжки тріщин, які симетрично розміщені відносно центра кола. Розв'язок задачі зведений до інтегрального рівняння, яке відрізняється від інтегрального рівняння згаданої праці.

Ключові слова: пластина, тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Виберемо початок декартової системи координат Oxy у центрі кола радіусом R , уздовж дуг якого розміщені тріщини. Вісь Ox проведемо через середину дуги, де розміщена тріщина, яка характеризується центральним кутом 2φ . Кути, які відповідають кінцям другої тріщини, позначимо φ_1 і φ_2 . Частина дуги кола, де розміщені тріщини, позначимо L , область у середині кола — S^+ , а зовні кола — S^- . Нехай N_1 і N_2 головні напруження на нескінченності, крім того головна вісь, що відповідає N_1 , утворює кут γ з віссю Ox (рис. 1)

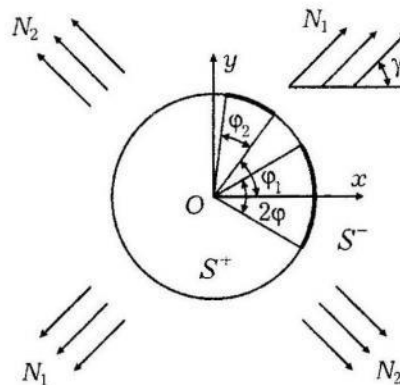


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

Згідно з формулюванням задачі граничні умови матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\vartheta}^+ = \sigma_{r\vartheta}^- = 0, \quad u_r^+ - u_r^- = 0, \quad \text{на } L, \quad (1)$$

де σ_{rr} , $\sigma_{r\vartheta}$ — компоненти тензора напружень у полярній системі координат $(r)(\vartheta)$ з початком в центрі кола радіусом R , u_r , u_ϑ — проекції вектора

переміщення на осі (r) і (ϑ) як у праці [1]; значками '+', '-' позначено граничні значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L з областей S^+ і S^- .

Уведемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо співвідношення [3]

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right), \quad z = r e^{i\vartheta} \quad (2)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \vartheta} ((u_r + iu_\vartheta) e^{i\vartheta}) = iz \left(\kappa \Phi(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \left(\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'(z)}\right) \right), \quad (3)$$

де

$$\Omega(z) = -\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right),$$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль зсуву, E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона; $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоскої деформації та $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для узагальненого плоского напруженого стану.

Функції $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля можна подати у вигляді [3]

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, \\ A_1 + O(z), & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega(z) = \begin{cases} -\bar{A}_1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), & z \rightarrow \infty, \\ \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + O(1), & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4)$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$, A_1 — невідома стала.

Враховуючи (2), з граничної умови (1) одержимо

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0, \quad t \in L \quad (5)$$

Враховуючи (4) та розв'язуючи задачу лінійного спряження (5), отримаємо

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \bar{A}_1 + \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) у (3) та враховуючи останню граничну умову (1), матимемо таку задачу лінійного спряження:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{B}{t} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (e^{i\vartheta} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-)), \quad t = R e^{i\vartheta}, \quad (7)$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$\Phi(z) = \frac{B}{2\pi i} \int_L \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (e^{i\vartheta} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-)) \frac{dt}{t-z} + \Gamma, \quad t = R e^{i\vartheta}, \quad (8)$$

де $B = 2\mu/(\kappa + 1)$.

На основі (8) отримаємо

$$\operatorname{Re} (\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) = -\frac{B}{\pi R} \int_{L_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-) \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{v - \vartheta}{2} \right| dv + 2\Gamma, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im}(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) = -\frac{B}{2\pi R} \int_{L_1} \left(\frac{\partial}{\partial v} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-) \operatorname{ctg} \frac{v - \vartheta}{2} + v \frac{\partial}{\partial v} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-) \right) dv, \quad (10)$$

де $L_1 = [\varphi_1, \varphi_2] \cup [-\varphi, \varphi]$.

Підставивши (6) у (2), враховуючи першу і другу граничні умови (1), та виконавши прості перетворення, отримаємо

$$\sigma_{rr} = \operatorname{Re}(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \cos 2(\gamma - \vartheta) \quad (11)$$

$$\operatorname{Im}(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)) = f_1(\vartheta), \quad t \in L \quad (12)$$

де

$$f_1(\vartheta) = -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2(\gamma - \vartheta) - \frac{B}{2\pi R} \int_{L_1} v \frac{\partial}{\partial v} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-) dv.$$

Підставляючи (9) в (11), знайдемо вираз для визначення контактних напружень σ_{rr}

$$\sigma_{rr} = -\frac{B}{R\pi} \int_{L_1} \frac{\partial}{\partial v} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-) \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{v - \vartheta}{2} \right| dv + 2\Gamma + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \cos 2(\gamma - \vartheta) \quad (13)$$

Увівши позначення $y(\vartheta) = \frac{B}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-)$ та підставивши (10) у (12), одержимо

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} y(t) \operatorname{ctg} \frac{t - \vartheta}{2}, dt = f(\vartheta), \quad \vartheta \in L_1, \quad (14)$$

де $f(\vartheta) = (N_1 - N_2) \sin 2(\gamma - \vartheta)$.

Рівняння (14) доповнимо співвідношеннями, які виражають однозначність переміщень при обході контурів тріщин

$$\int_{-\varphi}^{\varphi} y_1(t) dt = 0, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y_2(t) dt = 0, \quad (15)$$

де $y_1(\vartheta) = y(\vartheta)$, $|\vartheta| \leq \varphi$, $y_2(\vartheta) = y(\vartheta)$, $\varphi_1 \leq \vartheta \leq \varphi_2$.

Систему інтегральних рівнянь (14), (15) для знаходження невідомої функції $y(\vartheta)$ розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Після перетворень прийдемо до системи алгебричних рівнянь для знаходження вузлових значень шуканої функції

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^M U_i(t_m) G_{ij}(t_m, x_r) &= z_j(x_r), \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_j(t_m) &= 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$

де $x_r = \cos \frac{\pi R}{M}$, $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $z_1(x) = f(\varphi x)$, $z_2(x) = f(ax + b)$,

$$\begin{aligned} U_1(t) &= y(\varphi t) \sqrt{1-t^2}, & U_2(t) &= y(at+b) \sqrt{1-t^2}, \\ G_{11}(t, x) &= \varphi \operatorname{ctg} \frac{(t-x)\varphi}{2}, & G_{12}(t, x) &= \varphi \operatorname{ctg} \frac{\varphi t - ax - b}{2}, \\ G_{21}(t, x) &= a \operatorname{ctg} \frac{at+b-\varphi x}{2}, & G_{22}(t, x) &= a \operatorname{ctg} \frac{(t-x)a}{2}, \\ a &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, & b &= \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами

$$K_{1j}^{\pm} = 0, \quad K_{2j}^{\pm} = \mp \sqrt{Rb_j} U_j(\pm 1) \quad (j = 1, 2), \quad (17)$$

де $b_1 = \varphi$, $b_2 = a$ і

$$\begin{aligned} U_j(1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_j(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi, \\ U_j(-1) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} U_j(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi. \end{aligned}$$

Враховуючи (13), контактні напруження можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = (N_1 - N_2) & \left(\frac{\cos 2(\gamma - \vartheta)}{2} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^M b_j \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{t_{jm} - \vartheta}{2} \right| U_j(t_m) \right) + \\ & + \frac{(N_1 + N_2)}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

де $t_{1m} = \varphi t_m$, $t_{2m} = at_m + b$.

Для визначення залежності між кутом розкриття тріщини та напруженням станом на нескінченності, за якого відбуватиметься повний контакт, подамо контактні напруження σ_{rr} для $|\vartheta| < \varphi$ та $\varphi_1 < \vartheta < \varphi_2$ у вигляді

$$\sigma_{rr}(\vartheta)/N_1 = 1 - \lambda(\vartheta) + \nu \lambda(\vartheta), \quad (19)$$

де

$$\lambda(\vartheta) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\cos 2(\gamma - \vartheta)}{2} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^M b_j \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{t_{jm} - \vartheta}{2} \right| U_j(t_m) \right), \quad \nu = \frac{N_2}{N_1}. \quad (20)$$

Користуючись (20) знайдемо максимальне та мінімальне значення $\lambda(\vartheta)$. У випадку $|\vartheta| \leq \varphi$ позначимо їх відповідно $\lambda_{1 \max}(\vartheta)$ та $\lambda_{1 \min}(\vartheta)$, а у випадку $\varphi_1 \leq \vartheta \leq \varphi_2$ — $\lambda_{2 \max}(\vartheta)$ і $\lambda_{2 \min}(\vartheta)$.

Уведемо позначення

$$\nu_{j \max} = 1 - 1/\lambda_{j \max}, \quad \nu_{j \min} = 1 - 1/\lambda_{j \min}, \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Як видно з (19), за кожного значення кута ϑ контактні напруження лінійно залежать від ν , тому, якщо ν задовольняє нерівність $\nu_{1 \min} \leq \nu \leq \nu_{1 \max}$, то береги тріщини, яка характеризується центральним кутом 2φ , повністю контактуватимуть, якщо ж $\nu_{2 \min} \leq \nu \leq \nu_{2 \max}$, то контактуватимуть береги іншої

тріщини уздовж усієї довжини. Увівши позначення $\nu_{\min} = \max[\nu_{1\min}, \nu_{2\min}]$ та $\nu_{\max} = \min[\nu_{1\max}, \nu_{2\max}]$, одержимо, що повний контакт відбуватиметься для всіх $\nu < \nu_{\max}$ і для всіх $\nu > \nu_{\min}$ незалежно від значення кутів φ , φ_1 , φ_2 і γ .

Провели числовий аналіз контактних напружень та КІН для різних значень параметрів задачі. Зауважимо, що у частковому випадку, коли $\varphi_1 = \pi - \varphi$, а $\varphi_2 = \pi + \varphi$ (тріщини мають однакові довжини та симетрично розташовані стосовно осей координат) при $\gamma = 0$, результати збігаються з числовими значеннями, які опубліковані у праці [2].

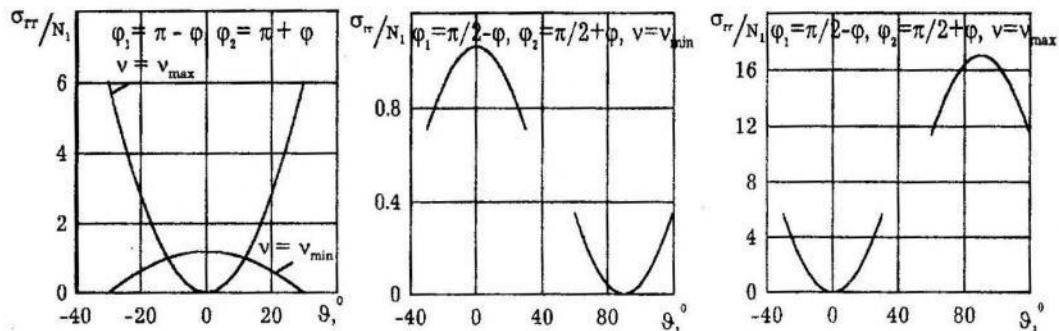


Рис. 2. Залежність контактних напружень від зміни кута ϑ для $\varphi = \pi/6$

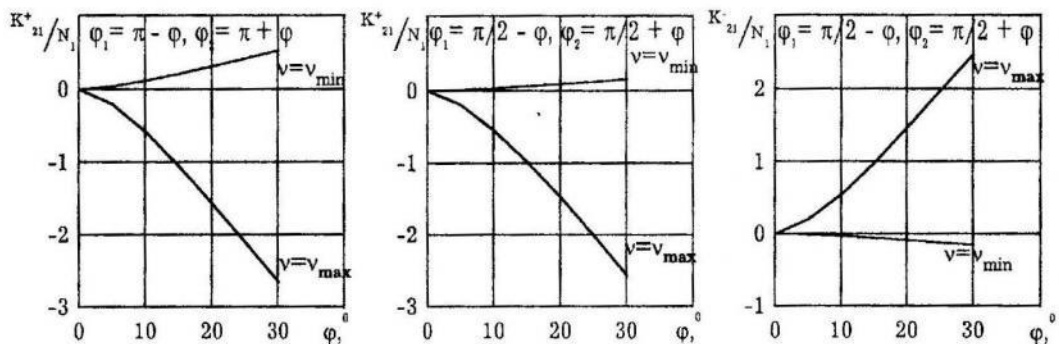


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень від кута φ

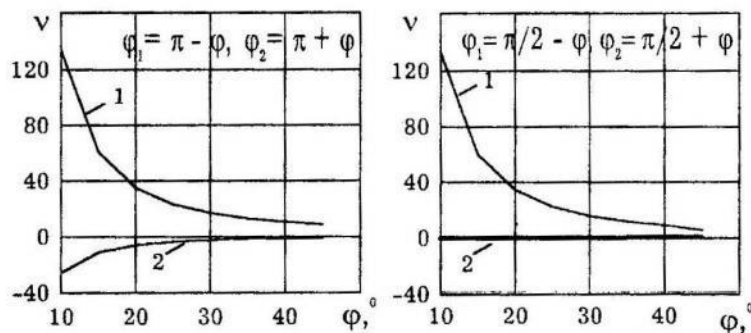


Рис. 4. Залежність відношення $\nu = N_2 / N_1$ від кута розкриття тріщини φ

На рис. 2 зображено розподіл контактних напружень σ_{rr} / N_1 на берегах двох тріщин, у випадках, коли $\nu = \nu_{\min}$ та $\nu = \nu_{\max}$ для різних розміщень однакових завдовжки тріщин у пластині.

Поведінку КІН залежно від кута φ зображено на рис. 3, окрім того, для випадку рівних симетричних тріщин $K_{21}^- = -K_{21}^+ = K_{22}^- = -K_{22}^+$, а для випадку

$\varphi_1 = \pi/2 - \varphi$ та $\varphi_2 = \pi/2 + \varphi$ — $K_{22}^+ = K_{21}^-$ і $K_{22}^- = K_{21}^+$. На рис. 4 зображено відношення головних напружень на нескінченності $\nu = N_2/N_1$ залежно від кута розкриття тріщини. $\nu_{\max}$ відповідає крива 1, а $\nu_{\min}$ — крива 2, окрім того, для будь-якого $\nu_{\min} < \nu < \nu_{\max}$ відбувається повний контакт уздовж тріщин.

1. Мусхелишвили И. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Гриліцький Д. В., Луцишин Р. М. Напряжения в пластинах с коловой лінією розмежування граничних умов. Львів, 1975.
3. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Минск, 1972.

CONTACT PROBLEM FOR A PLATE WITH TWO UNEQUAL CRACKS ON A CIRCLE ARCH

Viktor Opanasovych, Nataliya Kopot'

*Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper the stress state of a isotropic plate containing two unequal cracks on a circle arch of some radius is considered. It is assumed that the faces of the cracks are in smooth contact on all length of the cracks under the influence of a homogeneous load field on infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to singular integral equations. The stress intensity factors and components of stress tensor are investigated on the circle where the cracks are located. In particular cases we have obtained the known results from the scientific literature.

Key words: plate, crack, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002